

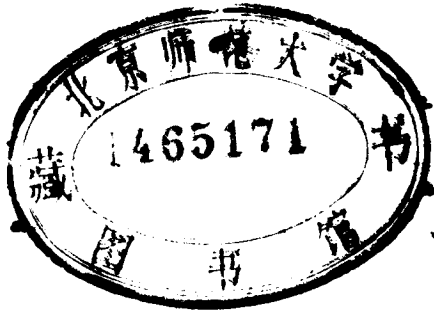
0412.1/47

高等学校教学用书

广义相对论

刘辽著

下川155/24



高等教育出版社

内 容 提 要

本书是刘辽同志根据本人多年来在北京师范大学物理系讲授“广义相对论”课程的经验,在《广义相对论》讲义的基础上整理、撰写而成的。

本书是广义相对论的入门书,内容叙述深入浅出,详尽全面,材料的选择比较恰当,不少篇幅吸收了广义相对论若干经典著作的某些精华,也有不少吸收了近年来有关领域的新鲜成果。内容包括:广义相对论的物理基础、黎曼空间的张量运算、爱因斯坦重力场方程和重力场的能量表述、重力辐射、Kruskal度规、致密物质和致密星、黑洞物理、宇宙学。

本书可作为我国高等学校理工科高年级大学生、研究生的广义相对论课程的教学用书,也可供有关的科学研究人员、教师参考使用。

高等学校教学用书

广义相对论

刘 辽 著

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海市印刷三厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 16 字数 382,000

1987年11月第1版 1987年11月第1次印刷

印数 00,001—3,250

ISBN 7-04-000063-6/O·28

书号 13010·01445 定价 3.60元

谨以此书献给那些
在科学高峰的攀登中
持之以恒，不畏险阻的勇士们！

序 言

狭义相对论和广义相对论分别建立于1905年和1915年前后，它们是由许多实验物理学家、理论物理学家、数学家和天文学家长期集体努力的产物，而集其大成，有突出贡献的则是伟大的德国物理学家爱因斯坦(A. Einstein, 1879—1955)。

两个理论都是物质世界的时空理论和在时空中物质运动的普遍理论。但两者仍有所不同，狭义相对论认为物质世界存在一种优越的所谓惯性系，从惯性系看来，空间的大小和时间的快慢与物体的运动状态有关，但时空的几何性质却丝毫不受运动物质的影响。例如，静置空间各处的标准钟，一旦调整同步，就不受周围运动物质的影响，永远保持同步，用静置空间各处的标准尺所测得空间的几何性质也不受周围运动物质的影响，永远遵守欧几里得几何学。

广义相对论则不然，它首先认为，一切坐标系都是平权的，不仅空间的大小和时间的快慢与物体的运动状态有关，而且物质世界的时空性质完全取决于运动着的物质，完全取决于运动物质所产生的重力场，它断言，我们事实上并不是生活在平直的欧几里得空间而是生活在一个弯曲的黎曼空间。

从哲学上看，广义相对论比狭义相对论更进一步地揭露了时间、空间与运动着的物质之间的辩证关系，标志着人类对客观物质世界的时空结构认识上的深化。

从物理学看，在不同领域，狭义相对论和广义相对论所起的作用则有所不同。大家知道，在通常的宏观物理学中，不论广义相对论或狭义相对论都是可以忽略不计的，而在微观高能物理学

中，狭义相对论却取得了辉煌的成就，例如，目前认为，任何正确的基本粒子理论都必须满足洛伦兹协变性要求，正是在这一思想的指引下，三十年代 P. A. M. Dirac 把狭义相对论和量子力学结合起来预言正电子和其他反粒子的存在，四十年代以来发展起来的洛伦兹协变量子场论在研究基本粒子的相互转化规律方面又取得了巨大成就，所有这些都表明狭义相对论是我们认识微观高能物理现象所不可少的一个重要基础理论。但迄今为止，广义相对论在微观物理学中还没有得到应用，其原因乃在于重力相互作用比其他已知的三种相互作用，即强相互作用，电磁相互作用和弱相互作用分别小 10^{40} 倍到100倍，因此大多数物理学家认为，在微观领域，广义相对论的影响或重力作用可忽略不计。

至于涉及到大幅度时空范围(或称宇观领域)内的物质过程，广义相对论已日益成为一门不可少的理论工具了。

1915年爱因斯坦首次由广义相对论圆满地说明了牛顿力学所无法解释的水星近日点的进动，预言星光经过太阳表面应有 $1.75''$ 的重力偏转。三年后，A. Eddington 实测证实了上述预言，1919年 V. M. Slipher 和 1929年 E. P. Hubble 等人先后发现了河外星系的谱线红移现象，1922年 A. Фридманн 和 1927年 G. Lemaitre 先后由广义相对论提出膨胀宇宙论模型，企图说明这种红移本质上是一种多普勒红移。1948年 G. Gamov 提出大爆炸宇宙论(原始火球模型)首次企图建立一种宇宙的演化理论，1965年所发现的 3K 微波背景辐射被大多数人认为是对原始火球模型提供了有力的支持。60年代所发现的高能天体——类星体和脉冲星大大地刺激了人们对于黑洞的研究，也进一步推动了天体晚期演化——白矮星、中子星等的研究。1968年 J. Weder 声称接受到从银河系中心发射来的重力波，虽然这一试验并未取得以后重复实验的支持，但却推动了这方面的进一步研究。如上所述，广义相对

论在恒星晚期演化问题上，在宇宙演化问题上都起着十分重要的作用。

“一切产生出来的东西都一定要死亡”(歌德“浮士德”)总有一天“地球，一个象月亮一样的死了的冻结了的球体，将在深深的黑暗里沿着愈来愈狭小的轨道绕行在同样死了的太阳周围”(恩格斯：自然辩证法，“导言”第17页)。我们的大宇宙是怎么产生出来的？是原初大爆炸的产物吗？宇宙是无穷无尽的，还是有始有终的？总星系，星系，太阳系是如何形成的？黑洞是不是某些恒星演化的归宿？当星系完成它自己一生的演化后情况又将怎样呢？宇宙的未来是开放的还是闭合的？

恩格斯在自然辩证法的导言中宣称：“我们总确信：物质在它的一切变化中永远是同一的，它的任何一个属性都决不会丧失，因此它在某个时候以铁的必然性毁灭自己在地球上的最美的花朵——思维着的精神，而在另外的某个地方和某个时候又一定以同一种铁的必然性把它重新产生出来”。摆在物理学、天体物理学面前一项十分艰巨的任务是：不仅去阐明一切产生的东西是如何死亡的，而且要去探索死亡的东西是如何复生的。我们相信广义相对论中的黑洞理论与宇宙演化理论将会给我们以启示！

本书是根据作者多年来在北京师范大学物理系的讲稿整理而成的。按照我校广义相对论的课程计划，广义相对论课程分成 I，II 两个阶段。本书就是第一阶段的入门教材，第二阶段的教材，我们采用 Hawking 和 Ellis 的 “*The Large scale structure of space-time*” (1974) 和 R. Wald 的 “*General Relativity*” (1984)。本书的不少内容取自 C. Møller (1952)，Landau 和 Lifshitz (1975)，Zeldovich Novikov (1971)，S. Weinberg (1972) 以及 Misner, Thorne 和 Wheeler (1973) 等人的名作，更多的较新的内容则直接取自原始论文，考虑到目前国内的水平 and 资料的不足，本书力求作到叙述比

较全面,推演比较详尽.因此,本书完全可以作为一本自学的教材.我们希望本书能给有志于学习、研究广义相对论和相对论天体物理理论的读者们带来方便.

不少同行和学生曾对本书的原型——1980年的油印讲义,提出过许多改进意见,在最近一次的修订过程中,肖兴华同志参加了宇宙论一章的编写工作,李宗伟同志参加了致密物质和致密星一章的编写工作,赵峰和桂元星二位同志参加了黑洞物理的编写工作.此外,王永久、王永成、李鉴增、张力生、黄朝光、喻乃昌等同志均参加了本书的整理工作.作者在这里向为本书作过贡献的所有同志致以深切的感谢.

刘 辽

1984年秋于北京

目 录

序言	1
第一章 广义相对论的物理基础	1
§1.1 牛顿重力理论的成就与困难	1
§1.2 等效原理与广义相对性原理	5
§1.3 广义相对论的空间与时间	17
§1.4 重力场中自由粒子的运动方程	30
§1.5 重力场的势	32
§1.6 重力场中的光速	37
§1.7 重力场中运动标准钟的速率	40
附A1 $g_{\mu\nu}$ 的测量	41
A2 转盘上的非欧几何	42
第二章 黎曼空间的张量运算	47
§2.1 度量空间的基本概念	47
§2.2 张量代数	56
§2.3 联络空间——Levi-Civita 平移	58
§2.4 张量分析——协变微分	67
§2.5 黎曼空间的积分公式	72
§2.6 黎曼空间的曲率张量	74
§2.7 局部惯性系	90
§2.8 重力场的影响	94
第三章 爱因斯坦重力场方程和重力场的能量表述	102
§3.1 重力场方程的建立	102
§3.2 重力场方程的几点讨论	104
§3.3 重力场方程的弱场线性近似	112
§3.4 马赫原理	116
§3.5 重力场的变分原理	121

§3.6 正交标架	126
§3.7 重力场的能量	131
第四章 重力辐射	155
§4.1 平面重力波	155
§4.2 重力辐射能	161
§4.3 重力波的探测	170
第五章 真空球对称重力场和爱因斯坦重力论的实验验证	176
§5.1 球对称度规	176
§5.2 Schwarzschild 外部解	180
§5.3 广义相对论实验验证	188
第六章 Kruskal 度规	207
§6.1 Lemaitre 度规	207
§6.2 Kruskal 度规	213
第七章 致密物质和致密星	223
第一部分 费密分布和玻色分布	224
§7.1 预备知识	224
§7.2 费密分布和玻色分布	228
§7.3 非相对论性简并费密气体	232
§7.4 极端相对论性费密气体	236
§7.5 简并玻色气体	238
第二部分 完全简并密物质状态方程	244
§7.6 完全简并理想电子气	244
§7.7 物质的中子化	246
§7.8 完全简并理想中子气	248
§7.9 完全简并非理想气体状态方程	252
第三部分 致密星	262
§7.10 理想流体的Schwarzschild内解和星体结构方程(Tolman- Oppenheimer-Volkoff方程)	262
§7.11 星体的内能	267

§7.12 多层球.....	268
§7.13 白矮星.....	273
§7.14 中子星.....	279
第八章 黑洞物理.....	292
§8.1 Kerr-Newmann 度规	292
§8.2 静界 视界和能层	298
§8.3 Kerr 度规的奇异性	313
§8.4 Kerr 度规中的类时测地线和类光测地线	315
§8.5 Penrose 图, 时空流形的最大解析区和最高完备性	321
§8.6 描述黑洞的参量	337
§8.7 Hawking 面积不减定理.....	346
§8.8 黑洞热力学	354
§8.9 Starobinsky-Unruh 过程	365
§8.10 Hawking 过程.....	386
第九章 宇宙学.....	400
§9.1 宇宙学原理和 R-W 度规	403
§9.2 运动学宇宙论	416
§9.3 标准模型	429
§9.4 射电星系计数	452
§9.5 微波背景辐射	455
§9.6 早期宇宙热历史	464
§9.7 早期宇宙中元素的核合成	472
§9.8 极早期宇宙	480
§9.9 其他宇宙模型	489

牛顿的侄子告诉我，1666年的某天，牛顿到乡下去，看到苹果的下落，这使他陷入了深思……

伏尔泰(1738)

第一章 广义相对论的物理基础

§1.1 牛顿重力理论的成就和困难

对电动力学研究产生了狭义相对论，而对重力理论的研究则产生了广义相对论。

1687年，牛顿(I. Newton, 1642—1727)在哥白尼(N. Copernicus, 1473—1543)、第谷(B. Tycho, 1546—1601)、开普勒(J. Kepler, 1571—1630)和伽利略(G. Galilio, 1564—1642)等人研究成果的基础上，提出了第一个完整的重力理论——万有引力定律。

1.1.1 牛顿理论的基本内容

万有引力定律的表述如下：

任何两个物质质点之间存在一种普适的引力，力的方向在两个质点的联线上，力的大小与两质点的质量的乘积成正比，而与它们距离的平方成反比。

$$f_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} r_{12} = -f_{21} \quad (1.1.1)$$

其中 m_1 、 m_2 为两质点的质量， r_{12} 为两者距离， G 为引力常数，

$G=6.670 \times 10^{-8}$ 达因·厘米²·克⁻¹。

当一个质量为 m , 坐标为 \mathbf{x} 的质点受到 N 个质量为 m_1, m_2, \dots, m_N , 坐标为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ 的质点的作用时, 引力为

$$F(\mathbf{x}) = -Gm \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i),$$

相应的引力势为

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}.$$

同样, 对于连续分布的物质

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x',$$

其中 $\rho(\mathbf{x}')$ 为 \mathbf{x}' 处的物质密度. 利用高斯定理, 不难证明上式的微分形式是泊松方程

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.1.2)$$

Δ 为拉普拉斯算符.

牛顿理论是第一个成功的重力理论. 他在地面上的苹果落地和天上的星辰运行等这样一些似乎迥然不同的现象中, 找到了一个普遍的、统一的因果解释. 从而揭开了天体运行之谜, 给予了哥白尼体系以严格的科学论证. 运用万有引力定律, 不仅解释了潮汐现象、地球的形状、行星和卫星的运动轨道等一系列自然现象, 而且成功地预言了海王星的存在, 精确地预告了彗星出现的时间, 从而得到了举世的公认.

牛顿理论是相当精确的理论, 今天人们对人造卫星和宇宙火箭运行轨道的计算, 仍然完全以这个理论为基础.

1.1.2 牛顿重力理论的困难

牛顿重力理论虽然取得了辉煌的成就, 但从它一诞生起就遇到一些无法克服的困难.

首先，在天文观测上，1859年法国天文学家 Leverrier 发现水星近日点有 $5600''/(100\text{年})$ 的角位移，在扣除总岁差和行星摄动后还有 $42.6'' \pm 0.9''/(100\text{年})$ 的进动无法用牛顿理论解释。

其次，在理论上存在两个困难。

第一个困难是所谓 Neuman-Zeeligler 疑难。这个疑难是说，若承认宇宙是无限的，并假定宇宙物质作均匀分布，那么，牛顿重力论将导致重力场中任一点的场强为无穷大。下面我们就来证明这一点。

类似静电学，引进重力场强度的概念

$$E = -\nabla\phi. \quad (1.1.3)$$

由(1.1.2)式有 $\text{div}E = -\Delta\phi = -4\pi G\rho$. (1.1.4)

利用高斯定理

$$\iiint_V \text{div}E dV = \oiint E \cdot d\sigma, \quad (1.1.5)$$

假定 ρ 是均匀的，以(1.1.4)式代入，可知(1.1.5)式左边部分 $\propto \rho R^3$ ，而右边部分 $\propto ER^2$ ，所以我们有

$$E \propto \rho R. \quad (1.1.6)$$

显然，当 $R \rightarrow \infty$ 时， $E \rightarrow \infty$ 。这意味着空间每一点的重力场强都是无穷大，显然与实际不符。

第二个困难是，牛顿重力理论不符合狭义相对论。狭义相对论要求所有物理学规律应具有洛伦兹协变性，并且一切相互作用不能是超距作用。容易看出(1.1.1)或(1.1.2)式是非洛伦兹协变的，重力的作用是一种超距作用 (r 系同时距离)。牛顿本人就说过：“……这据我看来是一种莫大的荒谬。我相信，没有一个对哲学事物有足够的思考力的人，曾经这样设想过”^[1]。

所以，要使重力理论避免上述困难，就必须对它作一番改造。

1.1.3 对牛顿重力理论的修改

1905年以前，主要的重力理论有 Zeeliger 重力论。为了克服 Neuman-Zeeliger 疑难，Zeeliger 将重力场方程修改为^[2]

$$\Delta\phi - K_0^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (1.1.7)$$

式中引进了所谓宇宙因子项 $K_0^2\phi$ ，其中 K_0 应是一个小量。

当 $\rho = \text{常数}$ 时，解(1.1.7)式得

$$\phi = -G \frac{4\pi\rho}{K_0^2} = \text{常数},$$

即
$$E = -\nabla\phi = 0. \quad (1.1.8)$$

这就避免了上述疑难。当 $\rho = m\delta(r-r_0)$ ，即为点源时，解(1.1.7)式得

$$\phi(r) = \frac{-Gm}{r} e^{-K_0 r}$$

或
$$E \approx -G \frac{m}{r^2} r e^{-K_0 r}.$$

这种修改虽然避免了 Zeeliger 疑难，却将重力改为了短程力：

$$f = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} r e^{-K_0 r}. \quad (1.1.9)$$

而事实上，万有引力是一种长程力。如爱因斯坦指出的，这种修改既没有理论根据，又不能说明水星近日点的进动问题。总之，Zeeliger 重力论是不成功的。

1905年以后，人们企图寻求一个以牛顿重力论为良好近似的洛伦兹协变的重力理论。

我们知道达朗贝尔算符具有洛伦兹协变性，因而可用来取代泊松方程，场方程就可能具有下列形式：

$$\left. \begin{aligned} \square^2\phi &= KT \sim \text{标量理论}, \\ \square^2\phi_\mu &= KT_\mu \sim \text{矢量理论}, \\ \square^2\phi_{\mu\nu} &= KT_{\mu\nu} \sim \text{对称张量理论}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.10)$$

Nordström, Bergman, Birkhoff 和 Moshinsky 等人曾作过许多这方面的尝试,但均未成功^[3]. 1916年,爱因斯坦从完全新的观点出发建立了新的重力理论(即广义相对论)^[4]. 这一理论无论从它与实验的一致、从逻辑上的简单和数学上的严谨来说,所有别重力理论都无法与之匹敌. 自从爱因斯坦重力论问世以来,又有许多人提出过新的理论,但到目前为止,经得起实验和观测检验的,仍然只有爱因斯坦重力理论. 近来,Thirring, Feynman, Weinberg 和 Deser 等曾企图修改如(1.1.10)式中的洛伦兹协变张量理论,虽然克服了各种困难,但最后的形式仍然与爱因斯坦重力论完全等效^[5].

§ 1.2 等效原理和广义相对性原理

爱因斯坦把他的重力理论建立在等效原理和广义相对性原理的基础之上,并把这一理论看作是狭义相对论的推广,因而称它为广义相对论(严格说来,广义相对论并不等价于重力理论,这一点下面还要谈到).

我们在讨论广义相对论之前,先介绍一下作为它的理论基础的等效原理和广义相对性原理.

1.2.1 等效原理

在介绍等效原理之前,我们先谈谈牛顿力学和狭义相对论所无法说明的两个问题,即,重力质量恒等于惯性质量的问题和惯性力的本质问题.

(1) 重力质量恒等于惯性质量

一切物体都有两种最根本的力学属性,即惯性和重力.

由牛顿第二定律

$$F = m_i a \quad (1.2.1)$$

通过对力和加速度的测量,可以定义一个叫作惯性质量的物理量

m_I ，它是物体惯性的量度，反映该物体对加速度的阻抗。

同时，由万有引力定律

$$F = \frac{m_g^{(1)} m_g^{(2)}}{r^2}, \quad (1.2.2)$$

通过对力和距离的测量，可以定义一个叫作重力质量的物理量 m_g ，它是物体重力属性的量度，反映该物体产生与承受重力场的本领。

显然，物质的这两种属性，从它们的物理本质来说是完全不同的，我们无法预先期望它们之间存在任何联系。爱因斯坦曾以地球和石子之间的吸引力为例来说明这一点：“地球以重力吸引石头而对其惯性质量毫无所知，地球的‘召唤’力与重力质量有关，而石头所‘回答’的运动则与惯性质量有关。”^[6]

为了把这一点说清楚，我们来看一下电磁作用。惯性质量为 m_I 的荷电质点，在电磁场作用下所受的力为

$$F = m_I a = q \left(E + \frac{v}{c} \times B \right), \quad (1.2.3)$$

显然，“召唤”力由物体的电荷 q 决定，而所“回答”的运动则与物体的惯性质量 m_I 有关，二者毫无关系。

人们自然会想到，重力质量也应与惯性质量毫无关系。然而，

多次的精确实验表明， $\frac{m_g}{m_I}$ 是一个与物质特性无关的普适常数。

也就是说，对于任何物质，它的重力质量和惯性质量总是成正比的。伽利略、牛顿、Bessel 等都曾对此问题进行过实验研究，其中最著名的是匈牙利物理学家 Eötvös 的扭摆实验。下面我们就来介绍一下这个实验。实验装置见图 1—1。在地面 P 点放置扭摆，在扭摆两端悬挂重力质量相同而材料不同的物体（图 1—1, b），调整悬臂水平，并东西取向。