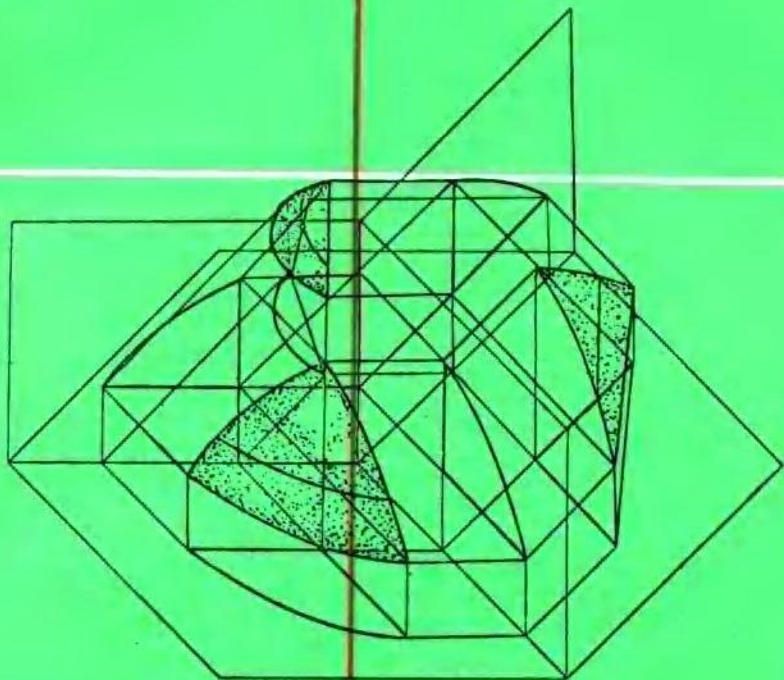
朱辉　程祖衍

编著

多维画法几何学



DUOWEI
HUAFA
JIHEXUE

机械工业出版社

多维画法几何学

朱 辉 程祖衍 编著

机械工业出版社

本书是一本研究多变量图示、解图问题的专著。全书系统地阐述多维几何学的基本概念与理论；详细地论述蒙日体系中几何元素图示和图解的理论和方法；介绍多维空间中各具有图示特点的多种投影体系和作图方法，以及多维画法几何在物理、化学、冶金、曲面设计、多目标优化、线性规划等方面的具体应用。

本书可作为工程图学专业的学生、研究生的教材，也可作为广大工程技术人员、科学工作者、高等院校师生的参考书。

多维画法几何学

朱 辉 程祖衔 编著

*

责任编辑：王正琼

封面设计：郭景云

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 11 3/4·字数 282 千字

1988年2月北京第一版·1988年2月北京第一次印刷

印数 0,001—3,330·定价：3.20元

*

ISBN 7-111-00372-1/O·12

前　　言

多维画法几何学是多维几何学与画法几何学相结合的一门学科，它是以图形来研究多变量图示与图解问题。这门学科从产生以来，已经过了相当长的发展时期，但在近期才取得了较大的进展。我国从八十年代初期开始对这门学科进行深入的研究，在科学技术中的应用也逐渐得到重视，并取得了可喜的进展。1982年，作者受中国工程图学学会的委托，在上海举办了两期多维画法几何讨论班。随后，专门举行了多维画法几何专题研究会，并在全国与地方学会年会上以及有关刊物上陆续发展了大量论文。本书就是以作者在上述讨论班的讲座教材为基础，并综合了一些最新研究成果编写而成的。

本书由朱辉编写第一、二、三、四、九、十、十一、十二各章，程祖衍编写第五、六、七、八、十三、十四、十五、十六各章。

本书编写过程中曾得到前中国工程图学学会理论图学专业委员会主任委员莫善祥教授的鼓励与支持。作者对张九垣教授、厉声林教授以及所有关怀本书编写工作的同志表示衷心感谢。此外，钱毅同志曾对本书的一些章节提出了许多宝贵意见，王继成同志帮助绘制了部分插图，金彬彬同志帮助整理了部分文稿，陆逸影同志描绘了全书插图。在此谨致谢意。

朱　辉　程祖衍

1984年10月于上海

符　号

π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6	投影面（坐标面）
Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4	投影空间（坐标空间）
x、y、z、u	投影轴（坐标轴）
S^n	n维空间
S^p	p维子空间
A、B、C、D	空间点
x_A、y_A、z_A、u_A	空间点A的坐标值
A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6	空间点A在投影面上的投影
$(A)_1$、$(A)_2$、$(A)_3$、$(A)_4$	空间点A在投影空间中的投影
a、b、c、l、m、n	空间直线
a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6	空间直线a在投影面上的投影
$(a)_1$、$(a)_2$、$(a)_3$、$(a)_4$	空间直线a在投影空间中的投影
α、β、γ	空间平面
α_1、α_2、α_3、α_4、α_5、α_6	空间平面α在投影面上的投影
$(\alpha)_1$、$(\alpha)_2$、$(\alpha)_3$、$(\alpha)_4$	空间平面α在投影空间中的投影
T、Λ、Ω	超平面（三维空间）
τ_1、τ_2、τ_3、τ_4、τ_5、τ_6	超平面T在投影面上的迹线
HRL	水平基线
VRL	垂直基线
A_{ij}	投影变换后点A的新投影 i为原投影的下标 j为被变换的次数
$/\!/$	平行
$/\cdot/$	半平行
$\perp$	垂直
$\veebar$	绝对垂直
$\times$	相交
═	相交结果
$\equiv$	重合
d_i	关联度
d_r	垂直度（正交度）
d_p	平行度

目　　录

第三篇　其他体系中的多维画法几何学

第四篇　多维画法几何在科学技术方面的应用

第一篇　多维几何学导论

第一章　多维空间的基本知识

第一节　多维空间的直角坐标与子空间

一、多维空间的直角坐标

从代数学的角度来看，欧氏空间是含有内积运算的线性空间，空间的维数就是在该空间内所包含的线性无关向量的最大数目。以下，n 维欧氏空间简称为 n 维空间，以 S^n 表示，S^3 就是我们熟悉的三维空间；当 $n>3$ 时，就是多维几何学所讨论的多维空间。

由线性代数得知，n 维空间 S^n 中存在 n 个线性无关的标准正交向量 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、……$\vec{e}_n$，即它们满足

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i、j = 1、2、\cdots\cdots n \tag{1-1}$$

取线性空间的零元为原点 O，取 $\vec{e}_i$ 为第 i 个坐标轴 x_i 的方向，则可建立 S^n 的一个直角坐标系 $O-x_1x_2\cdots\cdots x_n$，或记为$\{O, \vec{e}_1、\vec{e}_2\cdots\cdots\vec{e}_n\}$，$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、……、$\vec{e}_n$ 称为 S^n 的一组标准正交基向量。

在 n 维空间 S^n 中，任一向量 $\vec{C}$ 可由基向量线性表示：

$$\vec{C} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \cdots\cdots + c_n\vec{e}_n \tag{1-2}$$

式中 （c_1、c_2、……、c_n）称为向量 $\vec{C}$ 的坐标。

同样，对于 S^n 中任一点 P，$\overrightarrow{OP}$ 可由基向量线性表示：

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots\cdots + x_n\vec{e}_n \tag{1-3}$$

式中（x_1、x_2、……x_n）称为点 P 在直角坐标系 $O-x_1x_2x_3\cdots x_n$ 中的坐标，x_i 是点 P 在第 i 个 x 坐标轴上的坐标分量。

二、多维空间的子空间

设 u_1、u_2、……u_k 是 S^n 中的 k 个线性无关的向量，L^k 表示它们所生成的 S^n 的子集（也即所有可能的线性组合所生成的集合）。设 P_0 是 S^n 中任一已知点，则 S^n 的子集

$$P_0 + L^k = \{P_0 + a \mid a \in L^k\} \tag{1-4}$$

称为 S^n 的一个 k 维子空间，以 S^k 表示。当 $k = 0、1、2、3$ 时，S^0、S^1、S^2、S^3 分别称为 S^n 中的点、直线、平面和三维空间。

为便于讨论，引入符号 $\|A_{m\times n}\|_r = 0$，表示 $m\times n$ 阶矩阵 A 中的所有 r 阶子式都为 0，即矩阵 A 的秩为 $r-1$。不难证明：在 $\|A_{m\times n}\|_r = 0$ 中，含有 $(m-r+1)(n-r+1)$ 个独立条件。

设 $P(x_1、x_2、\cdots\cdots、x_n)$ 是 S^k 中的任一点，显然，$P-P_0$ 可由 $u_1、u_2、\cdots\cdots、u_k$ 线性表示，也即矩阵

$$\begin{bmatrix} P-P_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}_{(k+1)\times n}$$

的秩是 k。

因此

$$\left\|\begin{matrix} P-P_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{matrix}\right\|_{k+1} = 0 \tag{1-5}$$

它所包含的独立条件数为：

$$[(k+1)-(k+1)+1][n-(k+1)+1]=n-k$$

因此可在其中找出 $n-k$ 个独立的 $k+1$ 阶子行列式为零，从而得

$$S^k: \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots a_{1n}x_n+b_1=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots a_{2n}x_n+b_2=0 \\ \vdots \\ a_{(n-k)_1}x_1+a_{(n-k)_2}x_2+\cdots\cdots+a_{(n-k)_n}x_n+b_{(n-k)}=0 \end{cases} \tag{1-6}$$

当 $k=n-1$ 时

$$S^{n-1}: \ a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n+b=0 \tag{1-7}$$

由此可见，S^n 的 k 维子空间 S^k 是 $n-k$ 个 $n-1$ 维子空间的交空间。

在讨论 n 维空间时，其所属的 k 维子空间均以 S^k（$k=0、1、2、\cdots\cdots n-1$）表示。

第二节 多维图形

一、多维单纯形及其确定方法

单纯形是指最简单的图形，如点为零维空间的单纯形，即为零维单纯形。直线是由两点所确定的，即两个零维图形决定一个一维图形。直线在一维空间中是最简单的图形，即为一维单纯形，如图 1-1 中的 AB。由不在同一个一维空间中的三个点确定的三角形是二维单纯形(三点形)，如图 1-2 中的 $\triangle ABC$。由不在同一个二维空间中的四个点确定的四面体是三维单纯形（四点形），如图 1-3 中的四面体 $ABCD$。由不在同一个三维空间中的五个点确定的四维图形即为四维单纯形(五点形)，如图 1-4 中的图形 $ABCDE$。可以推出，由不在$(n-1)$维空间中的 $n+1$ 个点所确定的 n 维图形是 n 维单纯形（$n+1$ 点形）。以上这些点称为独立点。所谓独立点，是指这些点中任一点的位置都不取决于其它点的位置，即这些点是不相关

图1-1　一维单纯形

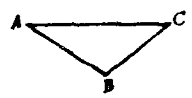


图1-2　二维单纯形

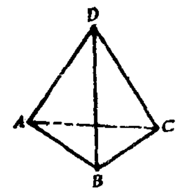


图1-3　三维单纯形

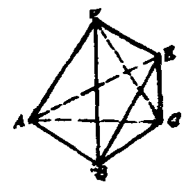


图1-4　四维单纯形

的。在该单纯形上不能通过它的对角线得到 $n-1$ 维的截切单纯形。

由图 1-3 可知，一个三维图形（即四点形）包含四个零维单纯形，六个一维单纯形，四个二维单纯形。同理，由图 1-4 可知，一个四维单纯形包含五个零维单纯形，十个一维单纯形，十个二维单纯形和五个三维单纯形。由此可推出 n 维单纯形包含

$n-1$ 维单纯形数：$C_n^{n-1}=\dfrac{n!}{(n-n+1)!\ (n-1)!}=n$

$n-2$ 维单纯形数：$C_n^{n-2}=\dfrac{n!}{2!\ (n-2)!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$n-3$ 维单纯形数：$C_n^{n-3}=\dfrac{n!}{3!\ (n-3)!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$\vdots$

三维单纯形数：$C_n^3=\dfrac{n!}{(n-3)!\ 3!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

二维单纯形数：$C_n^2=\dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$

一维单纯形数：$C_n^1=\dfrac{n!}{(n-1)!}=n$

由此可知，$C_n^{n-1}=C_n^1$，$C_n^{n-2}=C_n^2$，$C_n^{n-3}=C_n^3$，即 n 维单纯形中包含的 $n-1$ 维单纯形数等于一维单纯形数，$n-2$ 维单纯形数等于二维单纯形数，其余依此类推。

表 1-1 为不同维数的单纯形所包含的较低维的单纯形数。

表1-1　不同维数的单纯形所包含的较低维单纯形数

维数	单纯形	组成的单纯形数											
		零维单纯形	一维单纯形	二维单纯形	三维单纯形	四维单纯形	五维单纯形	六维单纯形	七维单纯形	八维单纯形	九维单纯形	十维单纯形	十一维单纯形
0	点	1											
1	直线段	2	1										
2	三角形	3	3	1									
3	四点形	4	6	4	1								
4	五点形	5	10	10	5	1							
5	六点形	6	15	20	15	6	1						
6	七点形	7	21	35	35	21	7	1					
7	八点形	8	28	56	70	56	28	8	1				
8	九点形	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
9	十点形	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
10	十一点形	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
11	十二点形	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

表中每一个数都是这样的两个数之和：第一个数在所求数的上方，第二个数在第一个数的左侧。

二、多维空间

任何维数的空间都可以由相应的同一维数的单纯形给定。通常三维空间可由下列几何元素组之一给定：

（1）四个不在同一平面上的点；

（2）一个平面和平面外一点；

（3）一个平面和不在平面上面与平面相交或平行的一条直线；

（4）不在同一平面上的两条直线；

（5）过同一点但不在同一平面上的三条直线；

（6）平行或相交于一条直线的两个平面；

对于四维空间可由下列几何元素组之一给定：

（1）不在同一超平面内的五个点；

（2）一个超平面和超平面外一点；

（3）一个超平面和与之相交或平行的一条直线；

（4）一个超平面和与之相交或平行的一个平面；

（5）相交于一直线的三个平面；

（6）相交或平行的两个超平面；

（7）过同一点但不在同一超平面内的四条直线；

（8）相交于一点的两个平面。

由此可类似地推出对于 n 维空间及其所包含的子空间的给定方式。

三、四维空间中的正多胞体

如同在三维空间中要求正多面体的面是正多边形一样，在四维空间中要求形体的三维边界是正多面体。这种形体称为“胞形”或“胞体”，如果它被 n 个多面体包围，称为“n-胞形”或“n-胞体”。四维空间中的正多胞形有六种，如表 1-2 所示。

表1-2　四维空间中的正多胞形

符　号	名　称	边界多面体的个数和类型	顶点数	棱边数	平面数
C_5	正5-胞形	5个正四面体	5	10	10
C_8	正8-胞形	8个正立方体	16	32	24
C_{16}	正16-胞形	16个正四面体	8	24	32
C_{24}	正24-胞形	24个正八面体	24	96	96
C_{120}	正120-胞形	120个正十二面体	600	1200	720
C_{600}	正600-胞形	600个正四面体	120	720	1200

在四维空间中，胞形的顶点数、棱边数、平面数和边界多面体数的关系应符合庞加莱（Poincaré）公式，即：

$$\text{顶点数} - \text{棱边数} + \text{平面数} - \text{边界多面体数} = 0$$

图 1-5～图 1-10 为上述正多胞形的直观图。

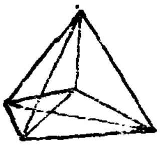


图1-5　正5-胞形

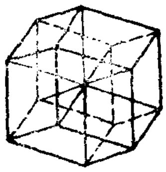


图1-6　正8-胞形

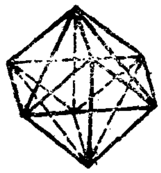


图1-7　正16-胞形

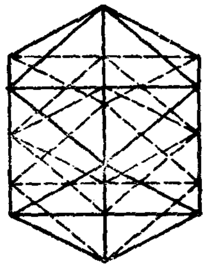


图1-8　正24-胞形

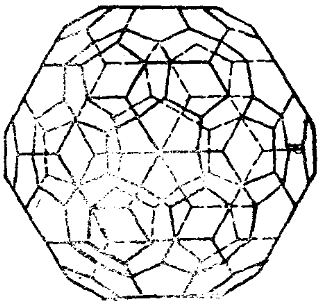


图1-9　正120-胞形

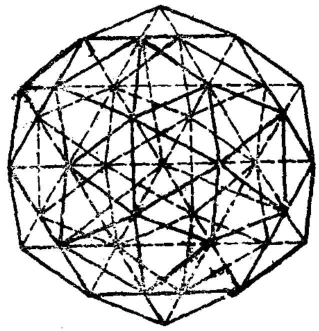


图1-10　正600-胞形

第三节　自由度与对偶性

通常，自由度是指点（即零维空间）在n维空间中的自由度。例如，点在直线上有一个自由度，在平面上有二个自由度，在三维空间中有三个自由度，以此类推，在n维空间中有n个自由度。本节讨论p维子空间在n维空间中的自由度。

定理 1　在n维空间S^n中，p维子空间S^p的自由度数为$(p+1)(n-p)$。

证：S^p需由$p+1$个独立点确定，S^n中的每个点需要n个条件，因此共需$(p+1)n$个条件，因S^p上的每个点应有p个自由度，故$p+1$个独立点中的每一个点仅需$n-p$个条件给定，因此S^n中S^p的自由度数d_f为$(p+1)(n-p)$。S^p的自由度数d_f也称为S^p的不变数。

定理 2　在n维空间S^n中，通过r维子空间S^r的p维超平面的自由度数d_f为$(n-p)\times(p-r)$。

证：由上述定理得知，S^p的自由度为$(p+1)(n-p)$，若S^p通过r维子空间S^r，则S^p有$(p+1)-(r+1)=p-r$个独立的点，这时S^p的自由度数$d_f=(n-p)(p-r)$。

下面讨论其对偶性质：在n维空间S^n中，若p维超平面S^p与$(n-p-1)$维超平面S^{n-p-1}具有相同的自由度$(p+1)(n-p)$，则S^p与S^{n-p-1}称为对偶空间，由此可得下列定理。

定理 3　在n维空间中，两个子空间S^p和S^{n-p-1}是对偶空间。

表 1-3 为两个互相对偶的空间与相应的自由度数。

运用对偶原理，如果将n维空间中的有关空间互换，则相应的命题仍然成立。如在四维

表1-3 两个对偶空间和相应的自由度数

两个对偶空间		自由度数 d_f
S^0	S^{n-1}	n
S^1	S^{n-2}	$2(n-1)$
S^2	S^{n-3}	$3(n-2)$
⋮	⋮	⋮
S^p	S^{n-p-1}	$(n-p)(p+1)$
S^{n-1}	S^0	n

空间中，点与三维超平面，直线与平面都互相对偶，根据上述确定多维空间命题方法，可推出相应的对偶命题，如表 1-4 所示。

表1-4 对偶命题

①	两点决定一直线	两超平面相交于一平面
②	三点决定一平面	三超平面相交于一直线
③	四点决定一超平面	四超平面相交于一点
④	一点及一直线决定一平面	一超平面与一平面相交于一直线
⑤	一点及一平面决定一超平面	一超平面与一直线相交于一点
⑥	两条作为点的连线的直线决定一超平面	两个作为超平面相交的平面，只有一个公共点

第四节 四维空间的直角坐标体系与几何模型

一、四维空间的直角坐标体系

如第一节所述，当 $n=4$ 时，可通过原点建立一个直角坐标体系，它的四个坐标轴互相正交（图 1-11）。以下分析其构成。

（1）互相垂直的四条坐标轴 x、y、z、u 相交于原点 O。

（2）互相垂直的两条坐标轴构成一个坐标面，如 xu、yu、zu、xy、xz、yz，分别构成 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6 六个互相垂直的坐标面。

（3）每三条坐标轴或三个坐标面构成一个坐标空间，共有四个坐标空间，如 $yzu(\pi_2\pi_3\pi_6)$、$xzu(\pi_1\pi_3\pi_5)$、$xyu(\pi_1\pi_2\pi_4)$、$xyz(\pi_4\pi_5\pi_6)$，分别以 Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4 表示。

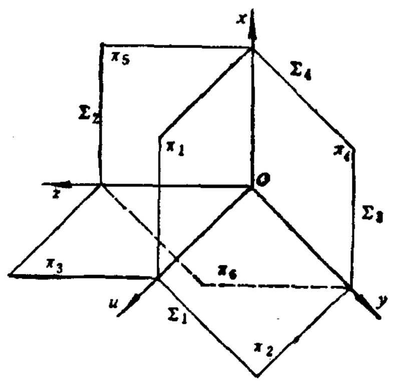


图1-11 四维空间的直角坐标体系

（4）每三个坐标面或三个坐标空间相交于一条坐标轴，如 $\pi_1\pi_4\pi_5(\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4)$、$\pi_2\pi_4\pi_6(\Sigma_1\Sigma_3\Sigma_4)$、$\pi_3\pi_5\pi_6(\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_4)$、$\pi_1\pi_2\pi_3(\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3)$ 分别相交于 x、y、z、u 四条坐标轴。

（5）每一坐标轴与不包含该坐标轴的坐标空间垂直，如 $x \perp \Sigma_1$、$y \perp \Sigma_2$、$z \perp \Sigma_3$、$u \perp \Sigma_4$。

（6）每两个坐标面之间互相垂直。

二、四维空间的几何模型

为了便于直观地了解四维空间中几何元素的各种相对位置，可用三维空间中的图形作为四维空间的几何模型。

在射影空间中，一组平行直线相交于同一非固有点，同一平面上的两组平行直线决定两个非固有点，即平面内两条不平行直线上的两个非固有点决定了该平面上的一条非固有直线，也即平面内两条不平行的直线决定了平面的方向。非固有点、非固有直线分别表示直线和平面的方向，同理，以非固有平面来表示三维空间的方向。依此类推，在 n 维空间中有一个 $n-1$ 维非固有超平面，它代表 n 维空间的方向。

在四维空间中有一个三维非固有超平面，它代表四维空间的方向，因此把三维空间作为四维空间的非固有超平面来讨论。四维空间中的直线、平面和超平面分别与该三维空间相交于点、直线和平面，也即将四维空间中的几何元素皆降一维来讨论。

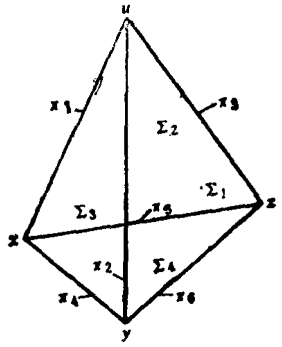


图1-12　四维空间的非固有超平面的几何模型

如图 1-12 所示，是以三维空间中的正四面体作为四维空间的三维非固有超平面 S^3 的几何模型，其性质如下：

（1）在四维空间中，四条互相垂直的坐标轴与四维空间中的三维非固有超平面 S^3_∞ 相交于 x、y、z、u 四个顶点，这四个顶点表示四个坐标轴的方向。

（2）在四维空间中，六个互相垂直的坐标面与三维非固有超平面 S^3_∞ 相交于 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6 六条棱线，这六条棱线表示六个坐标面的方向。

（3）在四维空间中，四个互相垂直的三维坐标空间与三维非固有平面 S^3_∞ 相交于 Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4 四个棱面，这四个棱面表示四个坐标空间的方向。

上述 S^3_∞ 中的棱线和棱面都是可以延伸的。

根据上述四维空间的坐标体系可得各坐标空间的方程为

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1: &\quad x = 0\\
\Sigma_2: &\quad y = 0\\
\Sigma_3: &\quad z = 0\\
\Sigma_4: &\quad u = 0
\end{aligned}
\tag{1-8}
$$

各坐标面的方程为

$$
\begin{aligned}
&\pi_1: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad && \pi_4: \begin{cases} z = 0 \\ u = 0 \end{cases}\\
&\pi_2: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} && \pi_5: \begin{cases} y = 0 \\ u = 0 \end{cases}\\
&\pi_3: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} && \pi_6: \begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-9}
$$

各坐标轴的方程为

$$x:\begin{cases}y=0\\z=0\\u=0\end{cases}\qquad z:\begin{cases}x=0\\y=0\\u=0\end{cases}$$

$$y:\begin{cases}x=0\\z=0\\u=0\end{cases}\qquad u:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}\tag{1-10}$$

第五节　四维空间中的各类几何元素

设x、y、z、u为四维空间中的坐标轴。根据本章第二节所述，一般位置的几何元素的线性方程如下：

超平面：

$$Ax+By+Cz+Du+E=0\tag{1-11}$$

平面：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0\end{cases}\tag{1-12}$$

直线：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0\\A_3x+B_3y+C_3z+D_3u+E_3=0\end{cases}\tag{1-13}$$

点：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0\\A_3x+B_3y+C_3z+D_3u+E_3=0\\A_4x+B_4y+C_4z+D_4u+E_4=0\end{cases}\tag{1-14}$$

对于特殊位置的直线、平面、超平面的方程，需说明如下：

一、特殊位置直线

由四维空间的几何模型得知，特殊位置直线有三种类型，即空平行线，其非固有点在棱面上；面平行线、其非固有点在棱线上；轴平行线，其非固有点在顶点上。

1. 空平行线

与一个坐标空间平行的直线称为空平行线。在几何模型上，直线l的非固有点l_∞在四面体的棱面上，如图 1-13 所示，l_∞在yzu棱面上，即直线l平行于Σ_1。设该直线l的方向为（O、B、C、D），过定点$P_0(x_0、y_0、z_0、u_0)$的直线l的方程为

$$\left\|\begin{matrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0\\0 & B & C & D\end{matrix}\right\|_2=0$$

即

$$\begin{cases}x=x_0\\y-y_0=\dfrac{B}{C}(z-z_0)\\y-y_0=\dfrac{B}{D}(u-u_0)\end{cases}\tag{1-15}$$

由上述方程可知，在与直线垂直某一轴，其相应的坐标值为常数。

2. 面平行线

与一个坐标面平行的直线称为面平行线。在几何模型上，直线 m 的非固有点 m_∞ 在四面体的棱线上。如图 1-13 所示，m_∞ 在 xy 棱线上，即直线 m 平行于 $xy(\pi_4)$面。设直线 m 的方向为（A、B、0、0），过 $P_0(x_0$、y_0、z_0、$u_0)$ 的 m 直线的方程为

$$\left\| \begin{matrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ A & B & 0 & 0 \end{matrix} \right\|_2 = 0$$

即

$$\begin{cases} y-y_0=\dfrac{B}{A}(x-x_0) \\ z=z_0 \\ u=u_0 \end{cases} \tag{1-16}$$

3. **轴平行线**

与一条轴平行的直线称为轴平行线。在几何模型上，直线 n 的非固有点 n_∞ 在四面体的顶点上。如图 1-13 所示，n_∞ 在 u 上，即直线 n 平行于坐标轴 u，其方向为（0，0，0，1），则过某一点 $P_0(x_0$、y_0、z_0、$u_0)$ 且平行于坐标轴 u 的直线 n 的方程为

$$\left\| \begin{matrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|_2 = 0$$

即

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases} \tag{1-17}$$

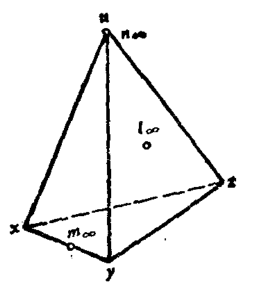


图1-13　几何模型上的特殊位置直线

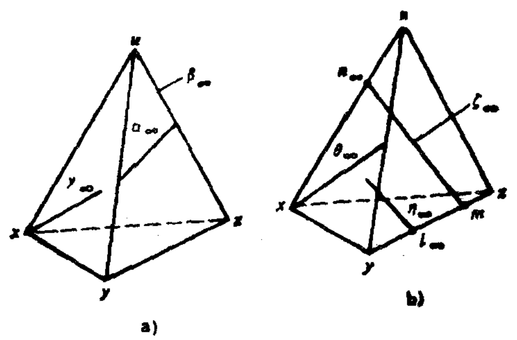


图1-14　几何模型上的特殊位置平面

二、特殊位置平面

由四维空间的几何模型得知，特殊位置平面有六种类型，即空平行面，其非固有直线在棱面上；面平行面，其非固有直线与棱线重合；空垂直面，其非固有直线通过顶点；空平行空垂直面，其非固有直线通过顶点且在棱面上；单面半平行面，其非固有直线与一条棱线相交；双面半平行面，其非固有直线通过相对的两条棱线相交。

1. 空平行面

与一个坐标空间平行的平面称为空平行面。在几何模型上，平面 α 的非固有直线 α_∞ 在四面体的棱面上，但不过顶点。如图 1-14 a 所示，α_∞ 在 yzu 棱面上。直线 α_∞ 由两点所决定，其方向为（0，a，0，b）、（0，0，c，d），若平面 α 过定点 P_0，其方程为

$$\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & c & d \end{Vmatrix}_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 \\ By + Cz + Du + E = 0 \end{cases} \tag{1-18}$$

2. 面平行面

与一个坐标面平行的平面称为面平行面。在几何模型上，平面β的非固有直线β_∞与四面体的一条棱线重合。如图1-14a所示，非固有直线与zu棱线重合。由于该棱线与两个棱面（坐标空间）相连，故平面β与两个坐标空间平行，即$\beta \parallel \Sigma_1$，$\beta \parallel \Sigma_2$，也即$\beta \parallel \pi_3$。过P_0的平面β的方程为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \tag{1-19}$$

3. 空垂直面

与一个投影空间垂直的平面称为空垂直面。在几何模型上，平面γ的非固有直线γ_∞过四面体的一顶点，但不在四面体的面上。如图1-14a所示，γ_∞通过顶点x，这时平面γ平行于x轴，也即垂直于Σ_1空间。设平面γ的γ_∞由两个方向为(1，0，0，0)、(0，a，b，c)的直线所确定，过P_0的平面γ的方程为

$$\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \end{Vmatrix}_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} z = K_1 y + b_1 \\ u = K_2 y + b_2 \end{cases} \tag{1-20}$$

4. 空平行空垂直面

与一个坐标空间垂直且与另一坐标空间平行的平面称为空平行空垂直面。在几何模型上，平面θ的非固有直线θ_∞通过四面体的一顶点，并在一棱面上。如图1-14b所示，θ_∞过顶点x且在xyu面上，即$\theta \perp \Sigma_1$、$\theta \parallel \Sigma_3$，也即$\theta \parallel x$，$\theta \perp z$。设$\theta$由两个方向为（1，0，0，0）、（0，$a$，0，$b$）的直线所确定，则过点$P_0$的$\theta$平面方程为

$$\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{Vmatrix}_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} z = z_0 \\ y = Ku + b \end{cases} \tag{1-21}$$

5. 单面半平行面