

高等学校教材

结 构 力 学

下 册

[第 二 版]

杨天祥 主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据1980年5月审订的高等工业学校本科四年制土建类专业的《结构力学教学大纲(草案)》进行修订编写的。

全书共十三章,分上、下两册出版。上册共十章,内容包括:平面体系的几何组成分析,静定结构的内力计算,虚功原理和结构位移的计算,力法,位移法,渐近法,静定和超静定结构的影响线及其应用,矩阵位移法,附录I。下册共三章,内容包括:梁和刚架的极限荷载,结构的弹性稳定计算,结构的动力计算,附录II。每章末均附有大量习题以及大部分习题的答案。为了学习结构矩阵分析时培养使用计算机的能力,在附录I中编入了连续梁和刚架的源程序,并附有说明。

本书可作为土建类专业“结构力学”课程的教材,也可供有关专业以及土建工程技术人员参考。

高等学校教材

结 构 力 学

下 册

[第 二 版]

杨天祥 主编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

水利电力出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 7.5 字数 172,000

1987年2月第2版 1987年2月第1次印刷

印数 00,001—3 150

书号 15010·0773 定价 1.20 元

目 录

第十一章 梁和刚架的极限荷载	1
§ 11-1 一般概念	1
§ 11-2 极限弯矩; 塑性铰; 破坏机构	1
§ 11-3 单跨超静定梁的极限荷载	4
§ 11-4 比例加载的几个定理	5
§ 11-5 确定极限荷载的方法; 连续梁的极限荷载	6
§ 11-6 用矩阵位移法计算刚架的极限荷载	12
习题	15
第十二章 结构的稳定计算	18
§ 12-1 概述	18
§ 12-2 确定临界荷载的静力法和能量法	20
§ 12-3 弹性支承等截面直杆的稳定	30
* § 12-4 变截面杆件的稳定	34
§ 12-5 剪力对临界荷载的影响	37
§ 12-6 组合压杆的稳定	39
* § 12-7 刚架稳定计算的概念	45
习题	51
第十三章 结构的动力计算	54
§ 13-1 概述	54
§ 13-2 单自由度体系的运动方程	58
§ 13-3 单自由度体系的自由振动	61
§ 13-4 单自由度体系在简谐荷载作用下的动力计算	66
§ 13-5 单自由度体系在任意荷载作用下的动力计算	73
§ 13-6 多自由度体系的自由振动	75
§ 13-7 多自由度体系的强迫振动 直接解法	89
§ 13-8 多自由度体系的强迫振动 振型叠加法	94
§ 13-9 能量法	101
习题	104
附录 II 函数 $\xi_1(u)$、$\xi_2(u)$、$\xi_3(u)$、$\eta_1(u)$、$\eta_2(u)$、$\eta_3(u)$ 的数值	111
主要参考书目	110

第十一章 梁和刚架的极限荷载

§11-1 一般概念

在前几章,我们讨论了结构的内力计算问题。但不论用什么方法以及对哪种结构,我们都假定结构是弹性的。也就是说,在使结构产生变形的荷载全部卸除以后,结构仍将恢复原来的形状。此外,我们还假定,材料服从虎克定律,即应力和应变成正比。两者合在一起即称为线性弹性。由材料力学我们知道,塑性材料(或称延性材料,如钢材)或是脆性材料(如铸铁)的物体,在应力未达到比例极限以前,都近似符合上述情况。以此为根据的上述计算,通常即称为弹性分析。利用弹性分析的结果,我们就可以进行设计,以确定结构杆件截面的尺寸;或是已知杆件截面的尺寸而验算最大的应力。

长期以来,人们认识到,弹性分析具有一定的缺点。例如,对于塑性材料的结构,尤其是超静定的结构,在最大应力到达屈服极限,甚至某一局部已进入塑性阶段时并不破坏,也就是说,并没有耗尽全部承载能力。但弹性分析就无法考虑材料超过屈服极限以后结构的这一部分承载力,因此表明按弹性设计是不够经济的。

塑性分析方法就是为了改进弹性分析的缺点而提出并发展起来的。按照塑性分析解决结构的强度问题时,需要计算结构的极限荷载,也就是结构开始破坏瞬时的荷载值,或者说塑性变形将开始无限制地增长时的荷载值。

在塑性分析中,为了计算的简化,对于所用材料,常采用如图 11-1 所示的应力-应变(σ - ϵ)关系。 σ_s 为屈服极限, ϵ_s 为屈服应变。应力 σ 和应变 ϵ 在屈服极限 σ_s 之前成正比(材料处于弹性阶段),到达屈服极限后,材料进入塑性阶段。如对结构继续加载,应变将无限制地增加,而应力不变仍为 σ_s 。若在到达B点后,对结构卸载,应力和应变将同时成比例地减少,在 σ - ϵ 图上可以用直线BC表示($BC \parallel OA$)。此时,材料的性质又恢复为弹性的,服从上述应力-应变关系的材料,我们称为理想弹塑性材料。在本章中我们还假定材料拉、压时的应力-应变关系相同。

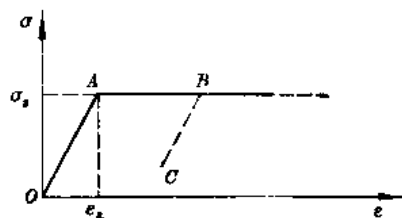


图 11-1

§11-2 极限弯矩; 塑性铰; 破坏机构

为了说明塑性分析中几个基本概念,我们考虑一理想弹塑性材料的矩形截面梁,承受纯弯曲作用如图 11-2 所示。

假设弯矩作用在对称平面内。随着弯矩的增大,梁的各部分逐渐由弹性阶段过渡到塑性阶段。

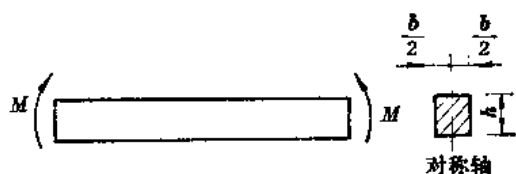


图 11-2

实验表明,无论在哪一阶段,都可以认为,原来的平面截面在弯曲以后仍然保持为一平面。

在梁由弹性阶段过渡到塑性阶段时,截面应力和应变以及塑性区的变化过程如图 11-3 所示。其中图 a 表示截面的全部纤维仍在弹性阶段。图 b 表示最外侧纤维应力到达屈服值,这时的弯矩称为屈服弯矩,用 M_s 表示。图 c 表示弹塑性阶段,这时外侧部分纤维屈服(图中用阴影线表示的部分),但内部尚在弹性阶段,这一部分通常称为弹性核。图 d 表示塑性阶段,即除去极小一部分弹性核外,其余全部纤维已屈服,为便于计算,通常将这极小一部分弹性核略去,这样,上下两部分塑性区就连结在一起,也就是说,整个截面应力都达到屈服值。相应的弯矩值称为截面的极限弯矩,并以 M_u 表示。这时,截面的纵向纤维在极限弯矩值保持不变的情况下将无限制地伸长或缩短。因此,在该截面所在的一小段内,梁将产生转动。这一截面称为塑性铰。塑性铰和普通铰的区别在于:普通铰不能承受弯矩,而塑性铰则能承受弯矩(极限弯矩),但在荷载减小后,由于弯矩也随之减小,塑性铰即消失,也就是,截面即不再有塑性铰的性质。此外,普通铰为双向铰,它的两侧可以沿两个方向发生相对转动,而塑性铰则为单向铰,它的两侧只能发生与极限弯矩指向一致的单向相对转动。

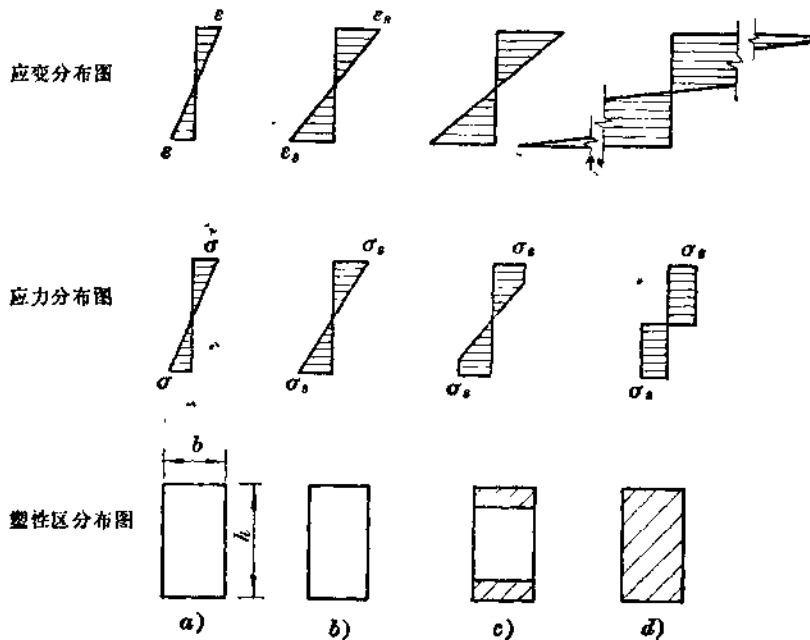


图 11-3

设有一简支梁 AB 如图 11-4 中的实线所示。在集中荷载 P 的作用下,截面 C 处的弯矩 M_c 最大。若荷载 P 逐渐增大, M_c 最终将达到极限弯矩值,这时截面 C 即形成一个塑性铰。由于简支梁两端原有两个铰,在截面 C 处又形成一个塑性铰后,该梁即变成一个几何可变体系。我们就把这一几何可变体系称为破坏机构,或简称机构。这时,梁可以发生任意大小的位移(图中虚线表示某一位移状态,黑点表示塑性铰),而荷载不变。这种状态称为极限状态或破坏。如上所述,

结构开始破坏的瞬时荷载也就是极限荷载。

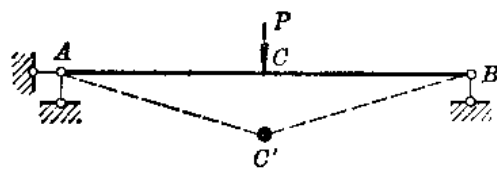


图 11-4

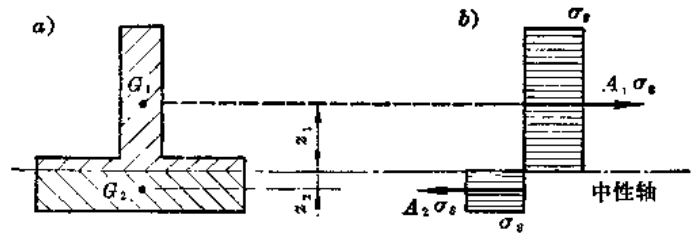


图 11-5

截面的极限弯矩 M_J 可以利用平衡条件求得。以图 11-5, a 所示的截面为例。图 11-5, b 表示极限状态的应力分布图。设 A_1 和 A_2 分别代表中性轴以上和以下部分截面面积； A 为截面总面积； G_1 和 G_2 分别为 A_1 和 A_2 的形心； z_1 和 z_2 分别为两个形心到中性轴的距离。由平衡条件可知，截面法向内力之和应等于零。这样得

$$A_1 \sigma_s = A_2 \sigma_s$$

或

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2} A$$

即表明在极限状态下中性轴将截面面积分为两个相等部分。极限弯矩

$$M_J = A_1 \sigma_s z_1 + A_2 \sigma_s z_2 = \sigma_s \left(\frac{A}{2} z_1 + \frac{A}{2} z_2 \right)$$

或

$$M_J = \sigma_s (S_1 + S_2)$$

如令

$$W_s = S_1 + S_2 \quad (11-1)$$

则得

$$M_J = \sigma_s W_s \quad (11-2)$$

式中 $S_1 = \frac{A}{2} z_1$ 和 $S_2 = \frac{A}{2} z_2$ 分别代表 A_1 和 A_2 对中性轴的静矩。 W_s 称为塑性截面模量。

对于矩形截面，设以 b 和 h 分别代表截面的宽和高，则

$$W_s = 2 \times \frac{bh}{2} \times \frac{h}{4} = \frac{1}{4} bh^2$$

因此，矩形截面的极限弯矩

$$M_J = \frac{1}{4} bh^2 \sigma_s \quad (11-3)$$

而截面模量

$$W = \frac{1}{6} bh^2$$

所以矩形截面的屈服弯矩

$$M_s = \frac{1}{6} bh^2 \sigma_s$$

极限弯矩与屈服弯矩之比

$$\frac{M_J}{M_s} = \frac{W_s}{W} = \alpha$$

称为截面形状系数,其值与截面形状有关。对于矩形截面,由上可知, $\alpha = 1.5$; 对于圆形截面 $\alpha = \frac{16}{3\pi} = 1.7$; 对于工字形截面 $\alpha \approx 1.15$ 。

§11-3 单跨超静定梁的极限荷载

对结构进行塑性分析的主要目的,就是要确定它的极限荷载。这时,由于在结构的某些部分形成了塑性铰而使结构成为一破坏机构,变形将继续增大,而荷载值则保持不变。在 §11-5 我们将介绍可以直接确定极限荷载的方法。利用这种直接方法,可以不必考虑在荷载逐渐增大到极限值的过程中出现塑性铰的先后次序。为了更好地理解这种直接分析法,我们以下举例说明随着荷载的增大,塑性铰相继形成而使结构最终变为一破坏机构的过程,并说明如何确定极限荷载。

考虑一两端固定的等截面梁 AB , 承受均布荷载 q , 如图 11-6, a 所示。设正负弯矩的极限值都等于 M_J 。试求极限荷载 q_J 。

在加载的初始过程,梁处于弹性阶段。弯矩分布如图 11-6, b 所示,两端弯矩值最大,都等于 $ql^2/12$ 。因而当荷载到达屈服值 q_s 时,两端截面的最外纤维首先屈服。由

$$\frac{q_s l^2}{12} = M_s$$

$$\text{得} \quad q_s = \frac{12 M_s}{l^2} \quad (a)$$

而跨中截面 C 处弯矩为

$$M_{cs} = \frac{q_s l^2}{24} = \frac{M_s}{2} \quad (b)$$

当荷载继续增大, A 、 B 两端弯矩将首先达到极限值 M_J 。这时,截面 A 、 B 即形成塑性铰,梁转化成静定梁。此后若再继续加载,两端弯矩 M_J 保持不变,两个塑性铰将继续存在,而跨中截面 C 的弯矩则继续增大。当截面 C 的弯矩也达到 M_J 时,截面 C 也形成塑性铰。这样,梁即成为一破坏机构(图 11-6, d),荷载达到极限值 q_J ,相应的弯矩图如图 11-6, c 所示。

极限荷载 q_J 值可以根据梁在极限状态的平衡条件来计算。为此,有两种作法:一种常称为“平衡弯矩法”,即根据平衡的要求,写出某个截面处的弯矩所应具有的关系式,藉以计算极限荷载。如在图 11-6, c 中,虚线 ab 和抛物线之间的部分即相当于简支梁在 q_J 作用下的弯矩图。它在跨中的最大竖标等于 $q_J l^2/8$ 。根据梁的平衡条件,有

$$\frac{q_J l^2}{8} - M_J = M_J$$

由此得

• 4 •

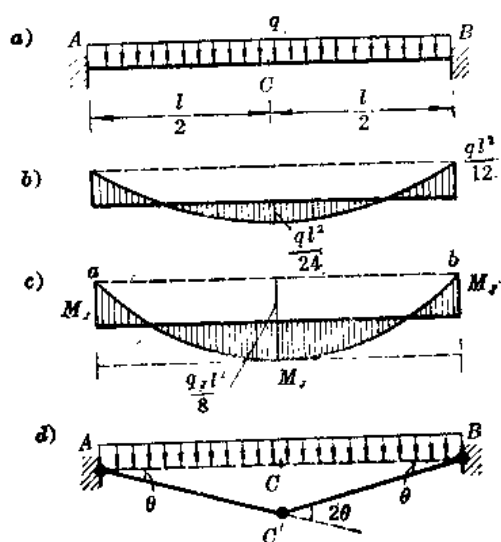


图 11-6

$$q_J = \frac{16M_J}{l^2} \quad (c)$$

另一种作法,则是利用虚位移原理,写出表征平衡条件的虚功方程,藉以计算极限荷载。如在图 11-6, d (梁成为一破坏机构) 中,使机构有一虚位移, C 移到 C' , 根据虚位移原理可得

$$M_J \cdot \theta + M_J \cdot 2\theta + M_J \cdot \theta = 2 \int_0^{l/2} q_J \theta x \cdot dx$$

或

$$4M_J \cdot \theta = \frac{1}{4} q_J l^2 \theta$$

由此得

$$q_J = \frac{16M_J}{l^2}$$

和式(c)相同。

§11-4 比例加载的几个定理

由上节的例题可以看到,当结构只有一种可能的破坏形式时,直接确定其极限荷载并不困难。但若结构可能有很多种破坏形式时,就需要判别哪一种是实际的破坏形式,以便确定极限荷载。为此,我们可以应用以下有关确定极限荷载的几个定理。在介绍这几个定理之前,我们先指出结构在极限状态下所必须满足的几个条件:

(1) 机构条件:当荷载达到极限值时,结构上必将有足够数目的截面(该处弯矩达到极限弯矩值)形成塑性铰,而使结构变为一破坏机构。

(2) 屈服条件:当荷载达到极限值时,结构上各个截面的弯矩都不能超过其极限值,即 $-M_J \leq M \leq M_J$ 。

(3) 平衡条件:当荷载达到极限值时,作用在结构整体上或任一局部上所有的力都必须维持平衡。

在下述几个定理中,我们假定作用在结构上的所有荷载都按一定的比例增加,即所谓比例加载的情况。

与弹性分析时一样,在进行塑性分析时,我们也假定结构的变形很小,从而可以按照未变形的状态考虑各力之间的平衡。此外,由于弹性变形常远小于塑性变形,对在极限状态下的变形,便可以略去前者,而只考虑塑性变形。在以下的讨论中,我们还略去了对极限弯矩影响较小的剪力和轴力的作用^{*)}。

现在我们给出确定极限荷载的三个定理^{**) :}

1. 上限定理(或称机动定理,也称极小定理)

这个定理可以表述为:对一比例加载作用下的给定结构,按照任一可能的破坏机构,由平

*) 关于剪力和轴力对极限弯矩的影响,读者可以参阅书后所列参考书 4、9。

**) 关于三个定理的证明,读者可以参阅本书第一版或书后所列参考书 2、4。

平衡条件所求得的荷载(即同时满足机构条件和平衡条件的荷载,这一荷载称为可破坏荷载)将大于或等于极限荷载。

换种方式,这一定理也可以表述为:对于一比例加载作用下的给定结构,按照各种可能的破坏机构,由平衡条件所求得的各可破坏荷载,其最小值就是极限荷载的上限值。

2. 下限定理(或称静力定理,也称极大定理)

这个定理可以表述为:对于一比例加载作用下的给定结构,按照任一静力可能而又安全(即同时满足平衡条件和屈服条件)的弯矩分布所求得的荷载(称为可接受荷载)将小于或等于极限荷载。

换种方式,这一定理也可以表述为:对于一比例加载作用下的给定结构,按照各种静力可能而又安全的弯矩分布所求得的各可接受荷载,其最大值就是极限荷载的下限值。

3. 单值定理(或称唯一性定理)

将以上两个定理综合在一起就得到这一定理。它可以表述为:对于一比例加载作用下的给定结构,如荷载既是可破坏荷载,同时又是可接受荷载,则此荷载即极限荷载。

这一定理也可表述为:对于一比例加载作用下的给定结构,同时满足平衡条件、屈服条件和机构条件的荷载也就是极限荷载。

§11-5 确定极限荷载的方法;连续梁的极限荷载

在这一节,我们介绍确定极限荷载的机动法和试算法,并利用连续梁加以说明,而后再分析几个连续梁的例题。

一、机动法(或称机构法)

机动法是以上限定理为依据的。按照上限定理,要确定某一给定结构的极限荷载时,我们首先假定各种可能的破坏机构,而后根据平衡条件(此种情况下,利用虚位移原理比较方便)分别计算相应的荷载。这些荷载都将大于或等于极限荷载,而其中的最小值就是极限荷载的上限值。这样求得的荷载都满足机构条件和平衡条件。

以下我们从图 11-7, a 所示的两跨等截面连续梁为例来说明这一方法。设两跨的极限弯矩都等于 M_J 。

假定为比例加载, $P_1:P_2=1.1P:P=1.1:1$ 。 P 即荷载参数。现在求其极限值 P_J 。

我们假定 4 种破坏机构分别如图 11-7, b、c、d、e 所示。现分别计算相应的荷载。

对于机构 1,设有一虚位移如图 11-7, b 所示。根据虚位移原理,由于这一虚位移,荷载所做的功应等于塑性铰处极限弯矩 M_J 所做的功。因此得以下的虚功方程

$$P > a\theta = M_J \times \theta + M_J \times 2\theta$$

故

$$P \geq 3 \frac{M_J}{a} \geq P_J$$

也就是说, P 应大于或等于极限荷载 P_J 。

其次,考虑机构 2 (图 11-7, c)。类似地,可得

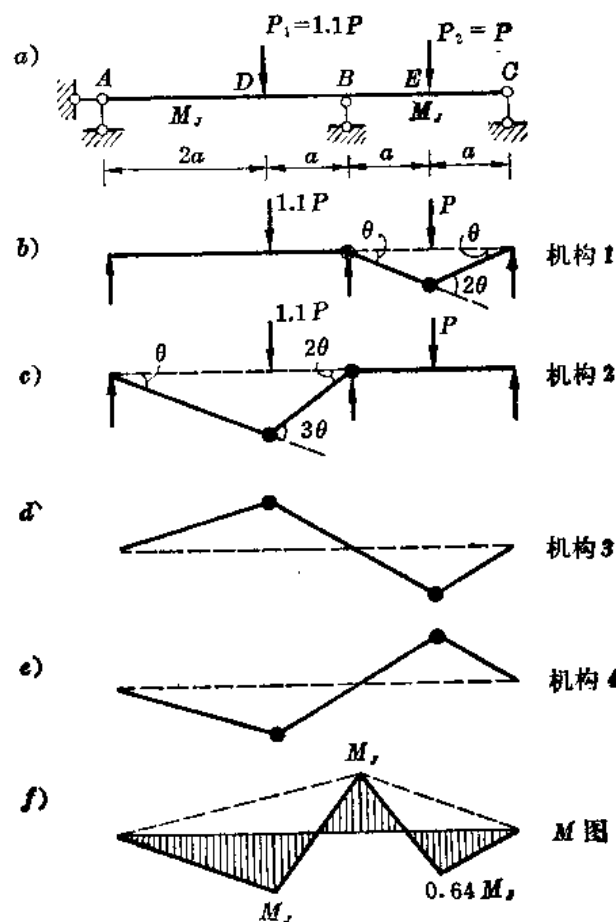


图 11-7

$$1.1P \times 2a\theta = M_j \times 3\theta + M_j \times 2\theta$$

故

$$P = 2.27 \frac{M_j}{a} \geq P_j$$

再考虑机构 3 (图 11-7, d)。在这个机构中, D 处塑性铰向上移动。这表明该塑性铰是由负弯矩所产生, 也就是 D 处的 M_j 应为负, 即弯矩为最小。现在我们设荷载以向下为正。取梁轴为 x 轴, 以向右为正; 并将集中荷载看作为在梁上分布于很小一段的均布荷载 q 之和。这样根据已知的关系式

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$$

可知, 因 $q > 0$, 故 $\frac{d^2 M}{dx^2} < 0$ 。这说明, M 图曲线为 $\cap$ 形状; 此外, 又因设此处已形成塑性铰, 即弯矩已达到极限值, 若如此, 则此处弯矩为最大, 于是 M_j 应为正。而这却与假定的破坏形式不相符的, 故说明机构 3 不是可能的破坏机构。同样, 机构 4 也是不可能的。因此, 我们今后即不再考虑类似这样的破坏机构。这也表明, 对于等截面连续梁 (各跨截面可以不等), 若各跨荷载的作用方向相同, 则每跨的破坏与其它跨的荷载和尺寸无关。而当连续梁的某一跨破坏时 (如机构 1

或机构 2) 梁即丧失承载能力; 因此, 在分析连续梁时, 可以将各跨即作为一单跨超静定梁而分别计算。

比较由机构 1 和机构 2 所得的结果, 其中最小值 $2.27 \frac{M_J}{a}$ 就是极限荷载 P_J 的上限值。

通过上例可将机动法求极限荷载的步骤归纳如下:

(1) 确定可能出现塑性铰的各个位置(如集中荷载作用点, 杆与杆的接合点, 分布荷载作用下剪力为零的点, 截面尺寸变化处等)。

(2) 选择各种可能的破坏机构。

(3) 利用虚位移原理求各相应的荷载, 其最小值就是极限荷载的上限值。

二、试算法

试算法是以单值定理为依据的。我们可以检验某个荷载是否同时为一可破坏荷载和可接受荷载, 据此来确定极限荷载。

一般说来, 与计算可接受荷载相比, 求结构的可破坏荷载较为简便。因此, 我们可以先用机动法求极限荷载的上限值, 然后验算与这一荷载相应的弯矩分布是否满足屈服条件, 如果满足, 这一荷载也就是极限荷载。

仍以图 11-7, *a* 所示的两跨连续梁为例。以上用机动法得出极限荷载的上限值为 $2.27 \frac{M_J}{a}$ 。现在绘出与其相应的弯矩图如图 11-7, *f* 所示。在截面 *D*、*B* 处已出现塑性铰, 在这两处的弯矩分别为 M_J 和 $-M_J$ 。为了验算屈服条件, 只需计算截面 *E* 的弯矩

$$\begin{aligned} M_E &= \frac{P \times 2a}{4} - \frac{M_J}{2} = \frac{1}{4} \times 2.27 \frac{M_J}{a} \times 2a - \frac{M_J}{2} \\ &= 0.64 M_J < M_J \end{aligned}$$

可见已满足屈服条件, 因此, $2.27 \frac{M_J}{a}$ 也就是极限荷载值, 即

$$P_J = 2.27 \frac{M_J}{a}$$

下面我们再分析几个例题。

例 11-1 求图 11-8, *a* 所示三跨连续梁的极限荷载。设各跨的极限弯矩都等于 M_J 。

[解] 一、用机动法求极限荷载的上限值

选择 4 种可能的破坏机构分别如图 11-8, *b*、*c*、*d*、*e* 所示。

1. 机构 1

由虚位移原理得

$$1.2P \times a\theta = M_J \times \theta + M_J \times 2\theta$$

故

$$P = 2.50 \frac{M_J}{a}$$

2. 机构 2

$$2 \times \frac{2P}{a} \times a \times \frac{a\theta}{2} = M_J \times \theta + M_J \times 2\theta + M_J \times \theta$$

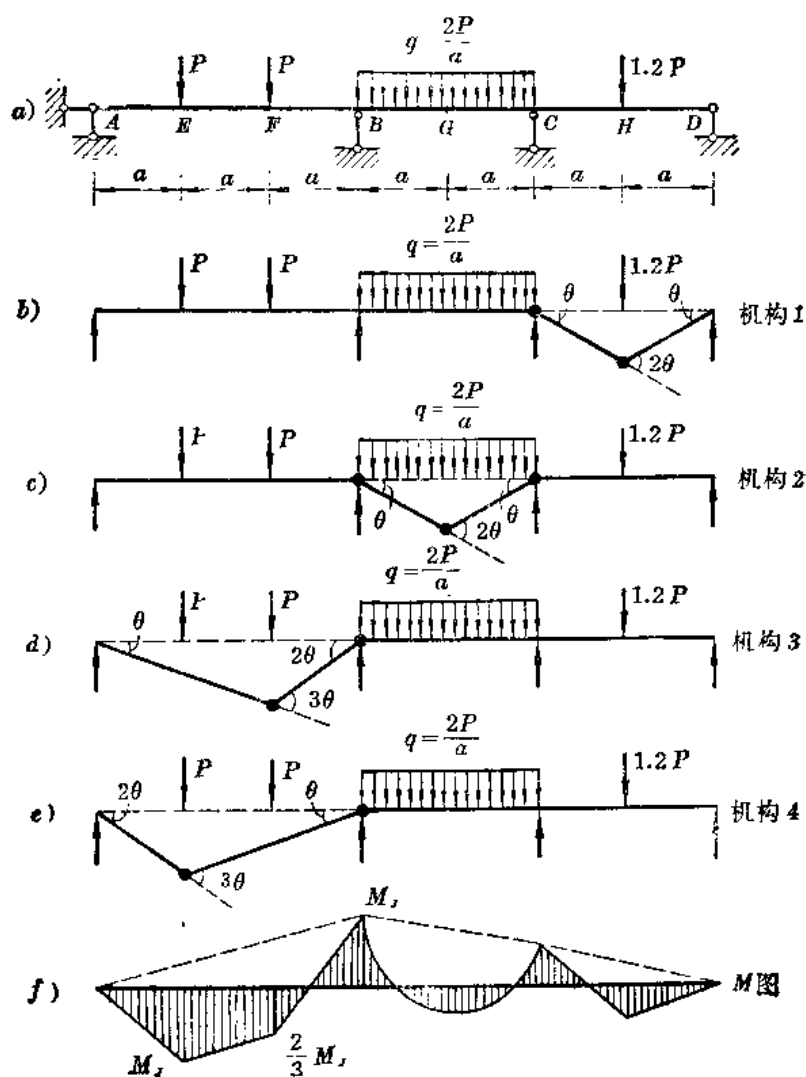


图 11-8

$$P = 2 \frac{M_j}{a}$$

3. 机构 3

$$P \times a\theta + P \times 2a\theta = M_j \times 3\theta + M_j \times 2\theta$$

$$P = 1.67 \frac{M_j}{a}$$

4. 机构 4

$$P \times 2a\theta + P \times a\theta = M_j \times 3\theta + M_j \times \theta$$

$$P = 1.33 \frac{M_j}{a}$$

比较以上所得结果, 可知最小值 $1.33 \frac{M_j}{a}$ 就是所求极限荷载的上限值。

二、用试算法求极限荷载

现在检验一下上面根据机构 4 所得到的上限值 $1.33 \frac{M_j}{a}$ 是否满足屈服条件。由图 11-8, f 所示与机构 4 相

应的弯矩图可以看出, AB 跨上其它截面弯矩的绝对值都小于 M_J ; 而 BC 和 CD 两跨上任一截面弯矩的绝对值, 不难证明, 在任何情况下 (如使 M_C 在零和 $-M_J$ 之间变化) 也都小于 M_J 。这表明屈服条件也已满足。因此, 得极限荷载

$$P_J \approx 1.33 M_J / a$$

例 11-2 求图 11-9, a 所示两跨连续梁的极限荷载。设 AB 和 BC 两跨截面不等但各自为等截面, 其极限弯矩分别为 $1.5M_J$ 和 M_J 。

〔解〕 需要指出, 对于这种相邻两跨截面不等的连续梁, 如果在截面改变处形成塑性铰, 这个塑性铰必然在极限弯矩较小的截面上。对于本例来说, 也就是塑性铰将出现于 BC 跨的 B 端。因为若塑性铰出现在 AB 跨的 B 端, 则极限弯矩将是较大的一个, 即 $1.5M_J$, 而这时 BC 跨靠 B 端一段的弯矩将大于本跨的极限弯矩, 显然这是不合理的。

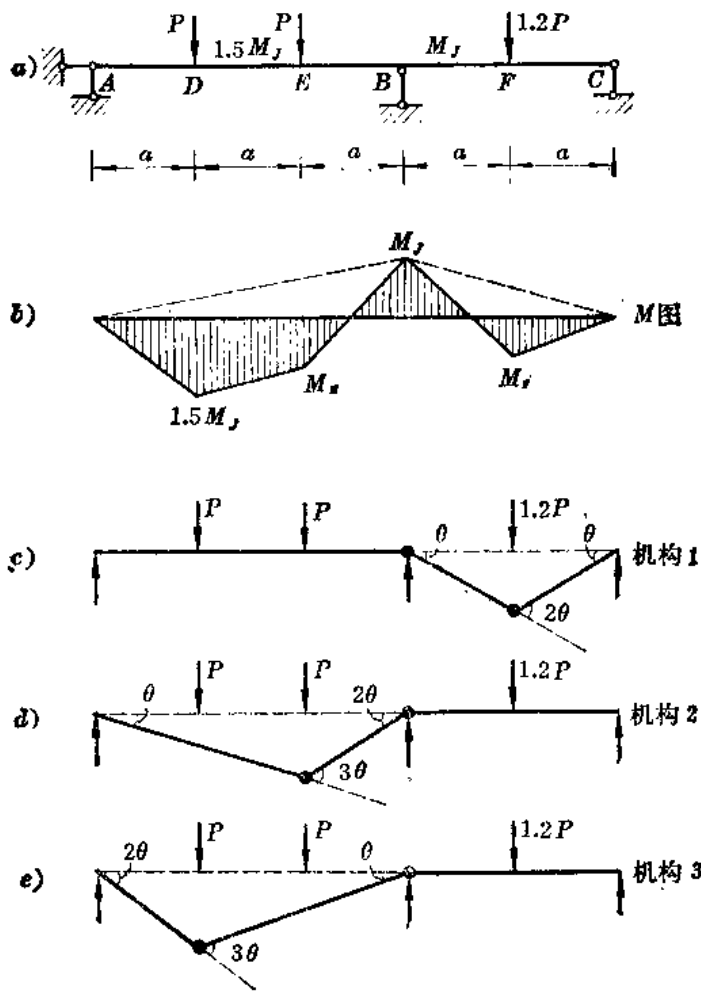


图 11-9

一、用机动法求极限荷载的上限值

几种可能的破坏机构分别如图 11-9, c, d, e 所示。

1. 机构 1

由虚位移原理得

$$1.2P \times a\theta = M_J \times \theta + M_J \times 2\theta$$

故

$$P = 2.5 \frac{M_J}{a}$$

2. 机构 2

$$P \times a\theta + P \times 2a\theta = 1.5 M_J \times 3\theta + M_J \times 2\theta$$

故

$$P = 2.17 \frac{M_J}{a}$$

3. 机构 3

$$P \times 2a\theta + P \times a\theta = 1.5 M_J \times 3\theta + M_J \times \theta$$

故

$$P = 1.83 \frac{M_J}{a}$$

比较以上结果, 可知其中最小值 $1.83 \frac{M_J}{a}$ 就是极限荷载的上限值。

二、用试算法求极限荷载

我们验算 $P = 1.83 M_J / a$ 是否满足屈服条件。此时的弯矩图大致如图 11-9, b, 在梁的 D、B 处已出现塑性铰; AB 跨中各截面弯矩的绝对值不会大于 $1.5 M_J$ 。再计算截面 F 的弯矩

$$\begin{aligned} M_F &= \frac{1}{4} \times 1.2 \times 1.83 \frac{M_J}{a} \times 2a - \frac{1}{2} M_J \\ &= 0.6 M_J < M_J \end{aligned}$$

可见屈服条件也已满足。故

$$P_J = 1.83 \frac{M_J}{a}$$

例 11-3 求图 11-10, a 所示两跨连续梁的极限荷载。设两跨的极限弯矩都等于 M_J 。

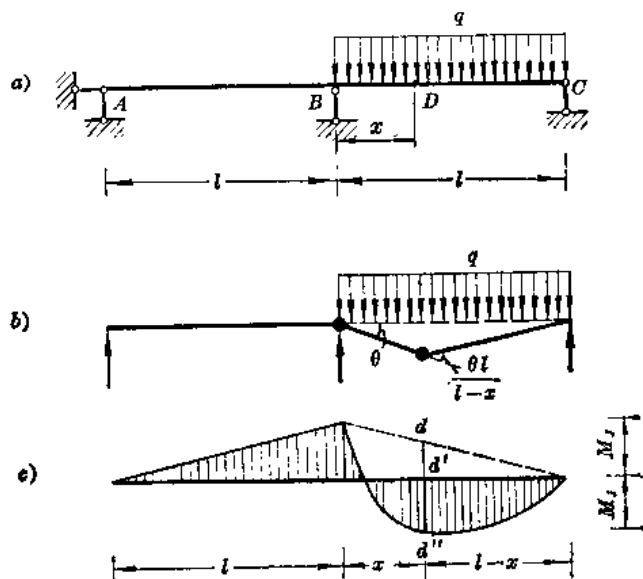


图 11-10

【解】 我们预先不知道 BC 跨内最大弯矩(出现第二个塑性铰)的位置, 因此, 设塑性铰距 B 支座的距离为 x (参见图 11-10, a)。

设可能的破坏机构如图 11-10, b 所示。由虚位移原理得

$$q l \theta x \cdot \frac{1}{2} = M_J \left(\theta + \frac{\theta l}{l-x} \right)$$

故

$$q = \frac{2(2l-x)}{x(l-x)l} M_J$$

为了确定塑性铰的位置,应使 q 为最小,因而由 $\frac{dq}{dx} = 0$, 可得

$$x = (2 - \sqrt{2})l$$

另一个解 $x = (2 + \sqrt{2})l > l$, 不必考虑。将 $x = (2 - \sqrt{2})l$ 代入上式,得极限荷载的上限值

$$q = \frac{2\sqrt{2} M_J}{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)l^2} = \frac{11.65 M_J}{l^2}$$

与所求荷载相应的梁的弯矩图如图 11-10, c 所示,由此 M 图可以看出,屈服条件也是满足的,因此,以上所得 $q = \frac{11.65 M_J}{l^2}$ 也就是极限荷载值。

§11-6 用矩阵位移法计算刚架的极限荷载

在第十章我们曾用矩阵位移法求刚架的位移和内力。同样,我们也可以用它计算刚架的极限荷载。在以下的讨论中,除本章中以前的各项假定外,尚采用下面的假定:

1. 所有荷载按比例增加,且全为结点荷载;如有非结点荷载,则将它们作用处的截面作为结点处理。

2. 结构上某处形成塑性铰后,假设塑性区在该处退化为一个截面,而其余部分仍为弹性区。

现在将矩阵位移法计算刚架极限荷载的原理概述如下:

(1) 因假定所有荷载系按比例增加,亦即比例加载,故可先设荷载参数 $P=1$,然后用矩阵位移法求出各控制截面(结点)的弯矩,从而即可判明出现第一个塑性铰的位置,并可求出相应的荷载参数 P_1 。计算过程中所组成的整体刚度矩阵设为 K_1 。

(2) 根据前一步骤求出的塑性铰(这时刚架中增加了一个铰结点)修改整体刚度矩阵,设修改后的整体刚度矩阵为 K_2 。再令荷载参数 $P=1$,算出各控制截面的弯矩。根据这些弯矩值以及各控制截面的极限弯矩与第一个塑性铰出现时弯矩的差值,可以判明出现第二个塑性铰的位置并求出相应的荷载参数增量 ΔP_2 。此时荷载参数 $P_2 = P_1 + \Delta P_2$ 。

(3) 根据刚架中已出现了两个塑性铰的情况,再修改整体刚度矩阵,设为 K_3 。仍令荷载参数 $P=1$,求各控制截面的弯矩。仿照(2)中作法,判明第三个塑性铰出现的位置,并求出相应的荷载参数 P_3 。

(4) 重复以上作法,直至(假设为第 n 步)整体刚度矩阵变为奇异矩阵为止。此时刚架成为破坏机构,相应的荷载参数 P_{n-1} 即为所要求的极限荷载。

为了进一步比较详细地说明用矩阵位移法求刚架极限荷载的过程,以下给出一个例题;但为节省篇幅,只列出计算步骤而略去数字演算。

例 11-4 求图 11-11, a 所示刚架的极限荷载。

[解] (a) 第一阶段(图 11-11)

先设荷载参数 $P=1$,用矩阵位移法求出各控制截面 1、2、3、4、5 的弯矩 M_1 如图 11-11, b 所示。设结构的整体刚度矩阵为 K_1 。

再用各控制截面的 M_1 值除相应截面的极限弯矩,其中最小值就是这第一阶段終了时的荷载参数 P_1 ,

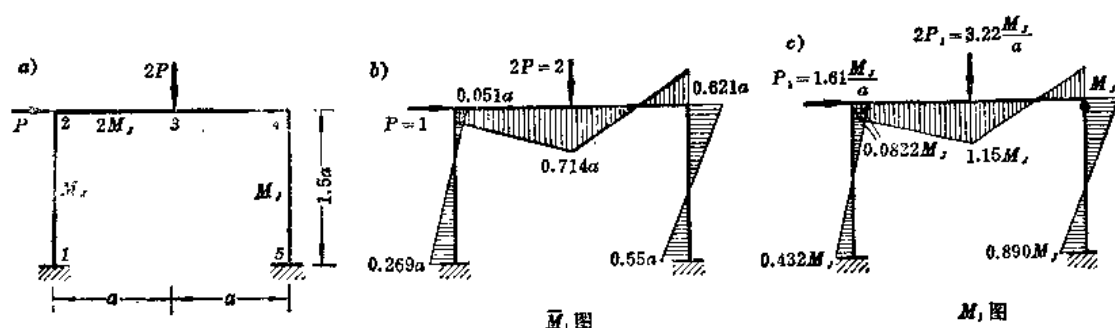


图 11-11

亦即

$$P_1 = \left(\frac{M_j}{\bar{M}_1} \right)_{\min} = \frac{M_j}{0.621a} = 1.61 \frac{M_j}{a}$$

将图 11-11, b 中的 \$\bar{M}_1\$ 乘以 \$1.61 M_j / a\$ 即得与 \$P_1 = 1.61 M_j / a\$ 相应的弯矩 \$M_1\$ 如图 11-11, c 所示。可以看出, 这时在右柱上端截面 4 处出现了第一个塑性铰。

(b) 第二阶段 (图 11-12)

在这一阶段的计算中, 截面 4 即可当作铰结点并据以修改整体刚度矩阵, 设为 \$K_2\$。再令荷载参数 \$P=1\$, 算出各控制截面的弯矩 \$\bar{M}_2\$ 如图 11-12, a 所示。

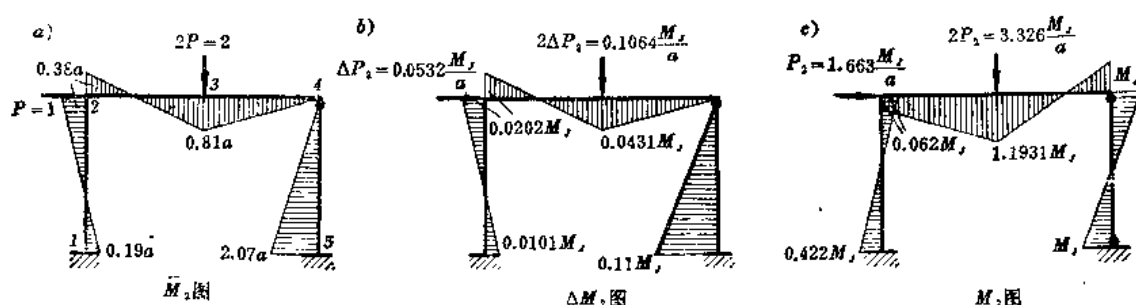


图 11-12

将各控制截面的极限弯矩与相应的弯矩 \$M_1\$ (图 11-11, c) 的差值除以相应的 \$\bar{M}_2\$, 其中最小值即为第二阶段的荷载参数增量

$$\Delta P_2 = \left(\frac{M_j - M_1}{\bar{M}_2} \right)_{\min} = \frac{M_j - 0.890M_j}{2.07a} = 0.0532 \frac{M_j}{a}$$

将图 11-12, a 中的 \$\bar{M}_2\$ 乘以 \$\Delta P_2\$ 即得弯矩增量 \$\Delta M_2\$ 如图 11-12, b 所示。然后将 \$\Delta M_2\$ 与图 11-11, c 中相应的 \$M_1\$ 叠加即得如图 11-12, c 所示的 \$M_2\$。荷载参数的累加值为

$$P_2 = P_1 + \Delta P_2 = 1.61 \frac{M_j}{a} + 0.0532 \frac{M_j}{a} = 1.663 \frac{M_j}{a}$$

这时, 在截面 5 处又出现一个塑性铰 (图 11-12, c)。

(c) 第三阶段 (图 11-13)

因为截面 5 处又形成一个塑性铰, 据此可再修改整体刚度矩阵, 设为 \$K_3\$。仍令 \$P=1\$ 并算出各控制截面的弯矩 \$\bar{M}_3\$ (图 11-13, a)。

将各控制截面的极限弯矩与相应的弯矩 \$M_2\$ (图 11-12, c) 的差值除以相应的 \$\bar{M}_3\$, 其中最小值即为第三阶段

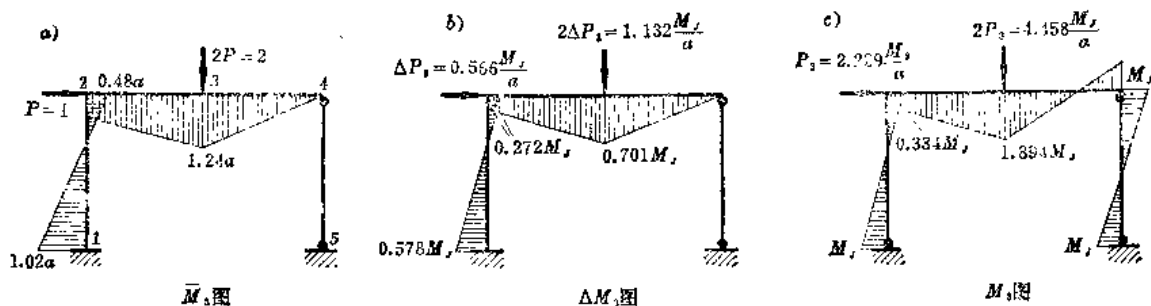


图 11-13

的荷载参数增量

$$\Delta P_3 = \left(\frac{M_j - M_2}{\bar{M}_3} \right)_{\min} = \frac{M_j - 0.422M_j}{1.02a} = 0.566 \frac{M_j}{a}$$

用 ΔP_3 乘 $\bar{M}_3$ (图 11-13, a) 得弯矩增量 ΔM_3 (图 11-13, b), 再与相应的 M_2 (图 11-12, c) 叠加则得 M_3 如图 11-14, c 所示。荷载参数的累加值为

$$P_3 = P_2 + \Delta P_3 = 1.663 \frac{M_j}{a} + 0.566 \frac{M_j}{a} = 2.229 \frac{M_j}{a}$$

这时, 在截面 1 处又形成一个塑性铰。

(d) 第四阶段 (图 11-14)

由于截面 1 又形成塑性铰, 因此须再修改整体刚度矩阵, 设为 K_4 。仍令 $P=1$, 算出各控制截面的弯矩 $\bar{M}_4$ (图 11-14, a)。

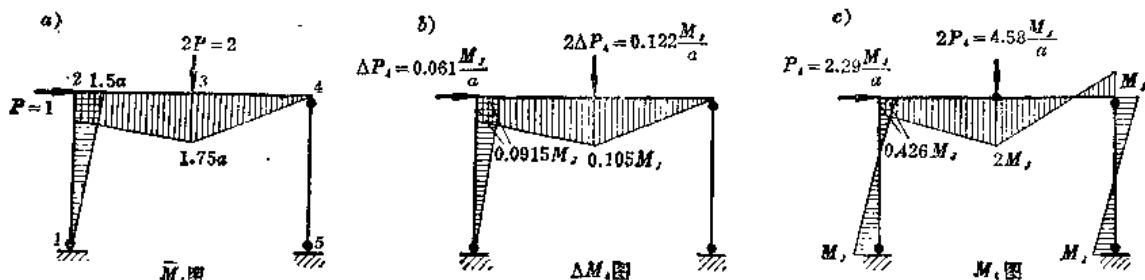


图 11-14

将各控制截面的极限弯矩与相应的弯矩 M_3 (图 11-13, c) 的差值除以相应的 $\bar{M}_4$, 其中最小值即为第四阶段的荷载参数增量

$$\Delta P_4 = \frac{2M_j - 1.894M_j}{1.75a} = 0.061 \frac{M_j}{a}$$

用 ΔP_4 乘 $\bar{M}_4$ (图 11-14, a) 得弯矩增量 ΔM_4 (图 11-14, b)。然后与 M_3 (图 11-13, c) 叠加则得 M_4 (图 11-14, c) 荷载参数的累加值为

$$P_4 = P_3 + \Delta P_4 = 2.229 \frac{M_j}{a} + 0.061 \frac{M_j}{a} = 2.290 \frac{M_j}{a}$$

在截面 3 处又形成一个塑性铰 (图 11-14, c)。

(e) 第五阶段

如图 11-14, c 所示, 刚架在截面 3 处又形成一个塑性铰, 再修改的整体刚度矩阵为一奇异矩阵, 说明刚架已变为机构, 因此