高等数学

答问·辨析·思考

洪继科 编

·上册·

上海科学技术文献出版社

高　等　数　学

答问·辨析·思考

（上　册）

洪继科　编

上海科学技术文献出版社

内 容 提 要

本书是在教学实践基础上，将樊映川等编《高等数学讲义》与国内流行的几本高等数学教材中的主要内容，用【设问】、【解答】的方式介绍出来；对学习中的常见错误或容易混淆的地方，用问题辨析的方式列出来；对需要深入理解的问题用思考题的方式提出来。并充实了从国内外高等数学中精选出来的500多道例题(其中不少是应用问题)，300多道思考题。本书既可作为理工医农学习高等数学的各专业的普通高校学生、函授生、电大学生、职大学生和自学青年的自学参考书，又可作为广大教师的教学参考书。

高 等 数 学

答问·辨析·思考

(上 册)

洪继科 编

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路2号)

新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 11.25 字数 272,000

1987年7月第1版 1987年7月第1次印刷

印数：1—22,000

书 号：ISBN 7-80513-005-1/O·01

定 价：2.65 元

《科技新书目》145-256

着眼于能力培养的新尝试(代序)

多年来，樊映川等编《高等数学讲义》多次出版发行，受到高教界普遍欢迎并且被全国高校广泛采用．各地围绕高等数学课程陆续出版了多种高等数学教学参考资料和学习辅导材料．它们各具特色，对国内非数学专业，特别是各类工科专业的高等数学课教学，无疑起过积极作用．但是，它们往往偏于解题材料的积累，忽略获取知识和提高思维能力的培养．使用时，不易窥测本门课程教学的全过程．

洪继科同志在同济大学数学教研室执教期间，受到樊映川教授等数学教育界权威的长期熏陶并亲聆教诲，细心揣摹前辈们学术思想和教学经验的真蒂．近年来，他结合自己的教学实践，深入钻研国内外数学教学资料，编写了《高等数学教学参考》一书．我们有幸阅读了它的初稿，对书中精心搜集的丰富多彩的素材，感到由衷的钦佩．现在作者本着精益求精的科学态度，对原书又进行了认真修订，并更名为《高等数学——答问·辨析·思考》，使其更切合本书的宗旨和内容．

《高等数学——答问·辨析·思考》以樊映川等编《高等数学讲义》为主要蓝本，兼及当前国内通行的同类教材(如同济大学数学教研室主编《高等数学》等)．各章列有“教学要求”、“概念强化”、“例题分析”、“问题辨析”、“教材增补”和“思考问题”等项目，对高等数学教学过程中可能遇到的问题几乎都涉及到．特别要提到的是，它把教材中的重要概念进一步叙说清楚，以帮助理解；再把一些模棱两可的模糊认识和直观错觉，用答问形式加

以仔细辨析，以弄清是非关键所在；同时还恰当地增补一些在一般教材中往往略而不讲但在习题和应用中又经常碰到的非主要概念和运算技巧，这无疑对加深理解课文、扩大知识面和加强运算能力都有好处．更由于当前科学技术的迅猛发展，尤其需要强调对大学生自学能力的培养．本书在这方面作了有益的尝试．在普遍重视学习方法指导和注意提高思维逻辑能力的同时，本书还在“思考问题”中列出若干个具有探索性的问题，让读者思索探讨．这样，既能加深对所学知识的理解，又能促使大家进一步学习本门课程的兴趣，逐步养成阅读参考书的习惯．总之，本书的正式出版，确为大学教学园地上增添了一朵鲜花．它对广大师生都有参考意义，值得向大家推荐．

当前，教育要面向现代化，面向世界，面向未来．教学改革的步伐正在不断加快．高等数学教学也将面临一个更新、提高、突破旧框框的崭新过程．我们对本书编者的辛勤劳动表示感谢，并瞩望他也能在教学改革和教材建设方面进行新的尝试，作出新的贡献。

陆子芬　陈雄南

于上海

一九八六年二月二十一日

前　言

目前，在国内大专院校、电视大学、职工业余大学和刊授大学中，选用樊映川等编《高等数学讲义》(简称《樊书》)或同济大学现行修改本《高等数学》作为教材的甚多，本人根据在同济大学及本校二十多年的教学实践，特编写与此教材相适应的《高等数学——答问·辨析·思考》．在编写过程中，也注意到对国内几本流行的高等数学的通用性．

本书从师生要教好与学好的共同愿望考虑，每章内容分为如下几个方面：

一、教学要求；二、概念强化；三、例题分析；四、问题辨析；五、思考问题；六、教材增补等项目．

本书中有从国内外高等数学教材中精选出来的500多道例题；还有从多年教学实践中积累起来的学生学习中的常见错误．为了便于教师应用启发式教学，加强对学生能力的培养，属概念方面的用【设问】与【解答】的方式介绍出来；属计算方面的用问题辨析的方式给出来；对需要学生进一步理解的问题则以思考问题的方式提出来．本书中列有思考题300多个．

本书在编写过程中，得到了院系的大力支持，陈启明、黄汉禹、卢祥攀等同志从多方面给予了必要的帮助．本书曾得到陆子芬教授、陈雄南副教授等的热情关心与支持，陆子芬教授还仔细地审阅了原稿，在此一并致谢．

限于本人学识水平和教学经验，书中不妥之处在所难免，希读者不吝指正．

编　者

一九八五年九月于上海技术师范学院

目　　录

第一章　函数及其图形

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是微积分学研究的对象．这一章讨论了函数的概念及函数的一些简单性质．重点是函数概念、基本初等函数及其定义域、图象、简单性质．

§1·1　教学要求

1．掌握实数绝对值的定义与简单性质，并能用不等式和绝对值表示实数的范围．

2．掌握函数概念，重点是定义域、对应规律及值域三个环节．

3．理解并熟记基本初等函数的定义、分析式、定义域、值域、图象及简单性质．

4．搞清楚复合函数概念，复合与分解，侧重于分解．

5．了解反函数概念．

§1·2　概念强化

«樊书»中所采用的函数定义是前一世纪卅年代由俄罗斯数学家罗巴契夫斯基(Лобачевский, 1793～1856)及德国数学家狄里赫莱(Dirichlet, 1805～1859)引入的，且很快获得数学界的普遍承认．

为了强化函数概念，便于对照，把定义抄录如下，并在重要的词汇下面加上着重号．

函数的定义：设 x 与 y 是两个变量，当变量 x 在数轴上某一

部分 $\mathscr{X}$ 上取某一数值时，如果变量 y 依照某一法则，总有一个或多个确定的数值与之对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数，记为

$$y=f(x) \quad x\in\mathscr{X}\text{（读作 } x \text{ 属于 } \mathscr{X}\text{）}$$

x 称为自变量，y 称为因变量，从 x 到 y 的对应规律（法则）f 又称函数关系.

为了与现行高中统一教材、现代数学中常用符号一致，以后用 D 表示定义域，R 表示函数值域.

【设问】1 学了函数定义之后，有人说："有两个变量，一个变，另一个也变，两个变量就成函数关系"．请问此说法对吗？

【解答】 不对，这种说法很不确切．我们知道，函数关系是反映物质运动过程中两个变量的相互联系及其依从关系．定义中告诉我们：

① 自变量 x 在什么范围内（定义域上）取值；

② 因变量 y 按怎样的法则（对应规律）被确定；

③ 值域 $R=\{y: y=f(x),\ x\in D\}$.

这是确定两个变量是否成函数关系的三要素．很明显，定义域 D 和对应规律 f 确定了，函数的值域也就确定了．因此，定义域与对应规律是确定函数的必不可少的要素．只有当这两点完全确定，我们才称两个变量成函数关系，更清楚地说变量 y 是自变量 x 的函数．否则我们就会得出许多荒唐可笑的结论：如拖拉机的耗油量与你的饭量成函数关系．因耗油量、饭量是两个变量，一个会变，另一个也会变．这显然是不对的，因为两变量之间没有确定的对应规律.

【设问】2 下列问题 ①～⑤ 中，y 是 x 的函数吗？

① $y=\sqrt{-x}$；

② $y=5$；

③ $x=3$；

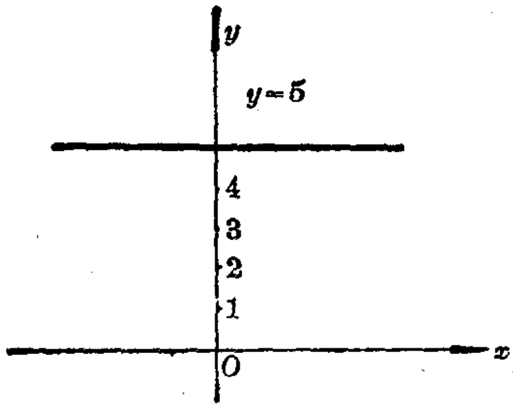


图 1-1

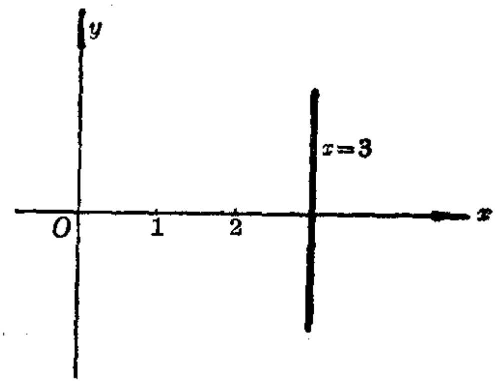


图 1-2

④ $y=\begin{cases}-x, 当\ x\leqslant 0\ 时;\\ x^2, 当\ x>0\ 时;\end{cases}$

⑤ $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2}}$.

【解答】 ① 因对$(-\infty,0]$中每一x值，都有一个y值与之对应，所以y是x的函数.

② 是. 因$y=5$中，虽表面上不含x，但不论x取什么实数，y总有确定的值5与之对应. 见图1-1.

③ 不是. 因为对于$x=3$，有无穷多个y值与之对应. 见图1-2.

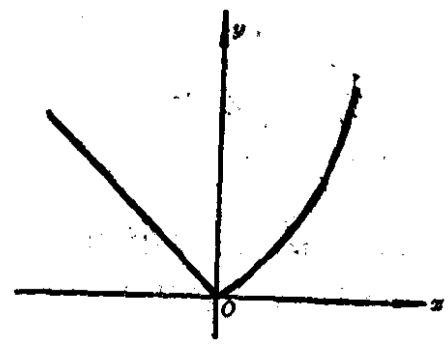


图 1-3

④ y是x的函数. 这类函数叫做分段函数. 它是由几个分析式子表示的一个函数. 它的图形如图1-3所示.

⑤ y不是x的函数，因对任何值$x\in(-\infty,+\infty)$，在实数范围内无y值与之对应.

【设问】3 下列各对函数是否为同一函数?

① $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

② $f(x)=\dfrac{x}{x(1+x)}$, $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$;

③ $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $g(x)=1$;

④ $y=f(x)$, $u=f(t)$.

【解答】 首先要明确判断两个函数是否相同的根据是什么?根据就是函数定义的两个要素:定义域与对应规律. 如果两个函数的定义域和对应规律都相同(函数的值域也必相同), 那么这两个函数就是相同的. 两者有一不同,就是不同的函数.据此可以回答:

① 不相同. 因对应规律不同,事实上 $g(x)=|x|$.

② 不相同. 因定义域不同. $D_f=\{x:x\neq0,\ x\neq-1\}$, $D_g=\{x:x\neq-1\}$.

③ 相同,因定义域、值域及对应规律都相同.

④ $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 是表示同一函数, 因对应规律同为 f, 函数的定义域(或存在域)也相同. 例如 $y=2x$ 与 $u=2t$ 是表示同一个函数. 由此可知一个函数由定义域与对应规律完全确定,而与用什么字母表示无关,这点应特别注意.

【设问】4 函数表示法除分析法、图示法及表格法外, 还有其它表示法吗?请举例.

【解答】 有其它表示法,如用语句来表达一个函数.

例 1 "y 是不超过 x 的最大整数", 则也表示 y 是 x 的函数,通常记为 $y=[x]$. 如: $y=[3.7]=3$; $y=[-2.1]=-3$ 等.

例 2 "设 x 是有理数时, y 的值是 1; x 是无理数时, y 的值是 0". 这句话也确定了 y 是 x 的函数. 记为

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.}\end{cases}$$

这个函数叫做狄里赫莱函数.

这两个函数以后将经常用到.

【设问】5 设由函数

$$y=f(x), \tag{1}$$

所确定的反函数为

$$x=\varphi(y). \tag{2}$$

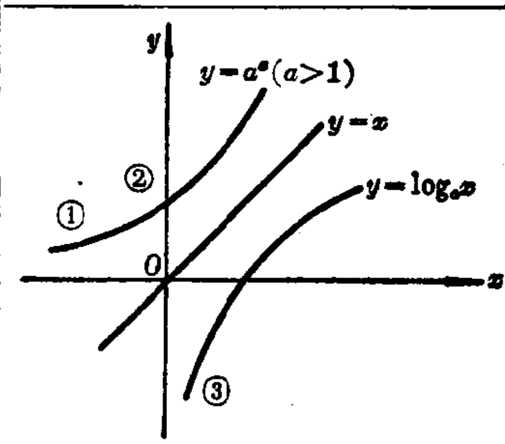
若再将(2)中 x 与 y 位置对调得函数

$$y=\varphi(x). \tag{3}$$

试问(3)是否是(1)的反函数?两者图形有何关系?试举例说明.

【解答】 由设问3的解答中所说的道理知: $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是表示同一个函数. $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数, 所以 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数. $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 在 Oxy 坐标系下是同一个图形. 而 $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是横坐标 x 与纵坐标 y 位置互换, 即点 (x, y) 换成 (y, x), 因此两者图形对称于直线 $y=x$, 故 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$, 以指数函数为例. 列表 (1-1) 对比如下:

表 1-1

一般	特殊	编号	函数之间关系	图形之间关系	图形
$y=f(x)$	$y=a^x$	①	①与②互为反函数	①与②为同一图形	
$x=\varphi(y)$	$x=\log_a y$	②	①与③互为反函数	①与③图形对称于直线 $y=x$	
$y=\varphi(x)$	$y=\log_a x$	③	②与③为同一函数		

* 此处都假定反函数是存在的.

【设问】6 你学了函数特性一节之后, 是否认为函数就分为两类: 奇函数与偶函数?有没有一个函数既不是奇函数又不是

偶函数？有没有一个函数既是奇函数又是偶函数？请各举一例.

【解答】 我初学函数特性时是这样认为的，函数不属奇函数就属偶函数. 后来仔细钻研了教材，领会到函数中有这样特性的两类函数，但并非只有奇函数或偶函数. 还有既不是奇函数也不是偶函数的，例如：线性函数 $y=kx+b$，(k, b 为非零常数). 不仅如此，还有既是奇函数又是偶函数的，且这样的函数只有一个 $y=0$.

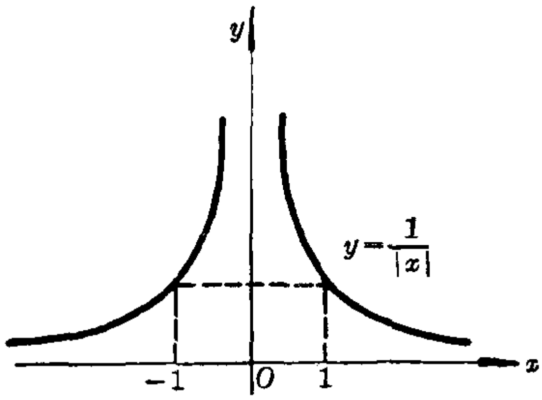


图 1-4

【设问】7 设 $f(x)$ 在其定义域 D_f 内有界，$f(x)$ 在 D_f 的一部分（称子集）上是否有界？又若 $f(x)$ 在其定义域 D_f 内无界，试问在 D_f 的子集上是否一定无界？试举例说明.

【解答】 由题设：对一切 $x\in D_f$ 有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，所以对 $x\in A\subseteq D_f$，也有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，即 $f(x)$ 在 D_f 的子集 A 上也有界.

又答 $f(x)$ 在其定义域 D_f 上无界，但在 D_f 的子集上不一定无界，因为 $f(x)$ 有界与否，是与所在区间紧密联系在一起的. 例如：函数 $y=\frac{1}{|x|}$（见图 1-4），在整个定义域 D_f：$(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 上无界，但在子集 $A=\{x:1\leqslant x<+\infty\}$ 上却有界. 事实上 $|y|=\frac{1}{|x|}\leqslant 1$，对一切 $x\in[1, +\infty)$ 成立. 但是在另一子集 $\overline{A}=\{x:0<x<1\}$ 上函数 $y=\frac{1}{|x|}$ 却又无界.

【设问】8 是否任意两个函数都可以复合而成复合函数？试举例.