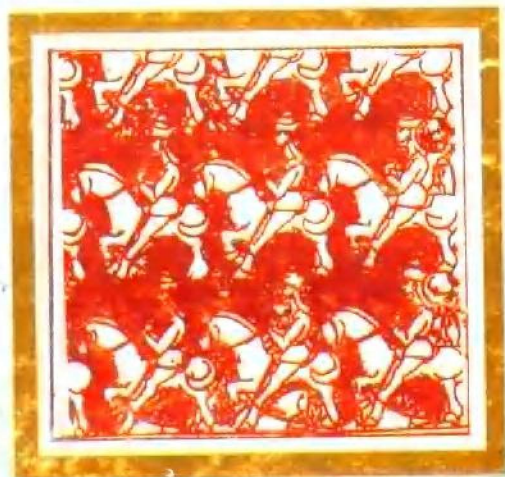


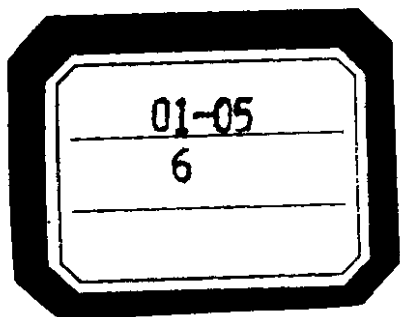
数学中的美

—— 数学美学初探

吴振奎 刘舒强 著



天津教育出版社



1751042

331/152/03

数学

吴振奎 刘舒强 著



中的美

数学美学初探

天津教育出版社



北师大图书 B1369042

数学中的美
数学美学初探
吴振奎 刘舒强

*

天津教育出版社出版

(天津市张自忠路 189 号)

邮政编码:300020

新华书店天津发行所发行

天津市大港光明报刊印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开 8 印张 1 插页 196 千字

1997 年 8 月第 1 版

1997 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—3000

ISBN 7-5309-2525-3
B·28 定价:12.00 元

吴振奎教授：

12月5日来信敬悉。

历来有科学家、哲学家讲科学美。但我认为：首先必须区别科学研究中的“美”和产品设计中外型的“美”。后者是所谓“工业设计”，实是技术美术中的美学。前者属艺术中的“美感”，实是哲学；说透了，是科学思维中意识到马克思主义哲学，并感到与马克思主义哲学相和谐，从而得到“美感”。

因此说科学“美”是把事情简单化了。我以为正确的认识应从科学技术的体系概念出发，即十七部门、十架到马克思主义哲学的桥梁（见附上复印件），把科学“美”深化到马克思主义哲学的最高概括，美即与宇宙真理相和谐。

这是我的想法，当否？请指教。

此致。

敬礼！

钱学森

1992.12.10

JY11/159/03

前 言

美是自然。数学作为“书写宇宙的文字”(伽利略语)反映着自然,数学中当然存在着美。

美学是研究现实(包括艺术、科学)中的美,以及如何去创造美的科学。

数学美学研究的主要内容也包括数学中的现实美、美感和美的创造。

数学(特别是现代数学)作为自然科学的基础,指导国民经济的工具,其本身就具有许多美的特性,它们是形象、生动而具体的(这一点有别于其它科学)。数学的简洁性、抽象性、和谐性、奇异性等诸方面均展现着数学自身的美——这些一旦让人觉知,一旦被认识,至少可改变人们对数学固有的偏见:枯燥、干瘪和乏味。

把数学,特别是现代数学中美的现象展示出来,再从美学角度再认识,这不仅是对人们观念的一种启迪,同时可帮助人们去思维、去探索、去研究、去发掘。

世界应该是美的,数学研究也应如此。

一个结论(定理、公式、图形)如果看上去很美,差不多可以说它是正确的。

笔者曾就数学美学中一个重要的常数“黄金数”0.618为基准提出过一个“小康消费公式”,它先后被数十家报刊转载,这说明它已被人们认可。

这就是说:从美学角度探索数学中的一些现象,揭示其中的某些规律,往往可以得到一些研究数学的方法。

简言之,数学中包含美,美学方法又可指导数学研究。

数学中的美的现象,很早就为一些大数学家(如毕达哥拉斯、高斯等)关注,并提出过不少见解,但遗憾的是未能有专门文章或论著面市。(我国古代数学家也从“趣味”角度,探讨过这类问题)

当今,科学美越来越被科学家们重视,钱学森教授就此发表过一系列文章,提出许多真知灼见。本人曾就此请教过钱学森教授,他复信中谈了许多精辟、独到的见解。

本书试图从哲学范畴出发,配以大量数学实例去揭示数学潜在的规律,探索运用美学原理指导数学研究的问题,这对数学的教、学、研究均有裨益;另外,通过数学美学的研究,也是对美学乃至哲学自身的一种丰富。因而全面系统地阐述此问题,或许是必要而有益的。

鉴于笔者的水平和能力,做好这件工作的困难是可以想象的,因而书中难免会有不少缺点和错误,恳切希望读者批评、指正。

此书成稿于十年之前,终因阴差阳错未能与读者见面。笔者感谢天津教育出版社的领导和编辑的鼎力支持,才使此书得以面市。但愿此书出版不会辜负他们的一片美意!

作 者

1996年元旦

目 录

引言(数学与美学).....	1
一、数学美的简洁性.....	16
1. 符号美	20
2. 抽象美	35
3. 统一美	65
二、数学美的和谐性.....	80
1. 和谐美	81
2. 对称美	102
3. 形式美	112
三、数学美的奇异性	141
1. 奇异美	142
2. 有限美	167
3. 神秘美(朦胧美)	186
4. 常数美	212
四、美的扭曲	221
五、数学美学研究的意义	231
参考文献.....	246

引 言

(数学与美学)

社会的进步就是人类对美的追求的结晶。

——马克思

数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高的美。

——罗素

人类社会历史的发展和自然界的进化告诉人们：一切事物生存和发展所共同遵守的法则是：美战胜丑。为此，美学家断言：美是一切事物生存和发展的本质特征。

什么是美？美是心借物的形象来表现情趣，是合规律性与合目的性的统一（朱光潜语）。美又是自由的形式：完好、和谐、鲜明、真与善、规律性与目的性的统一，就是美的本质和根源（李泽厚语）。然而人们认识美、探索美的秘密却是一个极为古老的课题。

美的秘密世代代搅挠着人类的思维。在历史上，关于美的谈论相当相当多（尽管是只言片语）。

最古老的文明遗留下的古迹中，无不打上古代人们的世界观和审美观。

苏格拉底认为：最有益的即是最美的。因而古希腊的美学是知识不可分割的一部分，这恰恰由于当时许多学科的幼芽尚未从人类知识大树上长成独立的枝干。当时的哲人们认为：美和宇宙之美是统一的。

毕达哥拉斯学派(请注意这是一个数学团体)认为世界是严整的宇宙,整个天体就是和谐与数。正是这个学派在研究音乐时最早使用了数学(他们试图提出一个声调对比关系的数学公式:八度音与基本音调之比为 $1:2$,五度音等于 $2:3$,四度音等于 $3:4$ 等等),这也是人们最早用数学方法研究美的实践与创始。

古希腊哲人赫拉克利特认为:和谐不是静止的平衡,而是运动着的活动状态。

恩培多克勒认为:生物的进化与世界之美的完善,与美、与和谐形成是等过程的。

原子论者德谟克利特认为:生活需要有美的享受。

苏格拉底认为:“美是许多现象所固有的一个唯一的東西,是具有最普遍的具体性”,但“美是难以捉摸的。”

亚里士多德认为:数学能促进人们对美的特性:数值、比例、秩序等的认识。

黑格尔在哲学史稿中说:“美包含在体积和秩序中。”

十八世纪法国启蒙主义者伏尔泰、狄德罗等人认为“美是大自然本身的自然属性。”

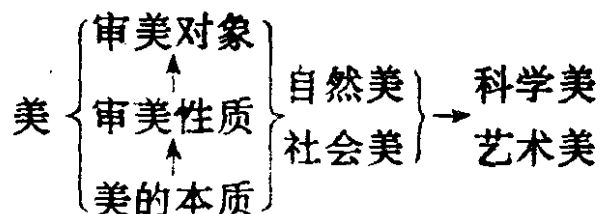
德国哲学家黑格尔把美看作是精神的(绝对观念的)整个世界运动的阶段之一,观念得到完善的、相同的表现形式,这就是美。

俄国文学家车尔尼切夫斯基认为:美就是生活。

从以上的叙述中我们可以看到:人们对于美的认识是一个古老而又漫长的过程,人们也提出了各种观念,大体上可总结为下面几种模式:

- (1)美是绝对观念在具体事物和现象中的表现或体现;
- (2)美是有意向的,从主观上认识事物的结果;
- (3)美是生活的本质同作为美的尺度的人相比,或者同他的实际需要、同他的理想和关于美好生活观念相比较的结果;
- (4)美是自然现象的自然属性。

当代美学家们则认为：美应包含下列各项：



说得具体点，美的基本类别（客观来源）有二：自然美和社会美。自然事物或自然界中的美叫自然美；社会事物的美叫社会美。

美的社会形态也有二：艺术美和科学美（更确切地讲是科技美）。艺术美是艺术家通过艺术形象再现生活中的美；科学美主要指理论美（技术美还包括技术规律和创造），其内涵是指结构美和公式美。艺术美和科学美都是自然美和社会美的客观反映，只不过方法与侧重点不同罢了。艺术美侧重于表现社会，即使表示自然也是通过人的社会感情去实现。而科学美则侧重于表示自然，且逐步向社会现象渗透。

这正如著名物理学家海森堡说的那样：美的王国远远延伸到艺术领域之外，它无疑包括精神生活的其他领域，自然美也反映自然科学的美之中。物理学中包含了两个极端：实验与想象、逻辑与直觉、客观的真实与主观的美感。

（顺便一提：技术美是人类将技术规律纳入人的目的的轨道，在造物活动中把物的尺度与人的社会尺度结合在一起而创造的美，它使得技术产品不再是与人对立的异己力量，而是使之成为具有亲合力的人的有效工具。）

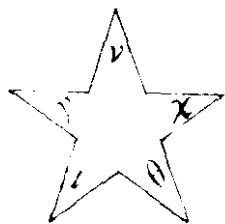
在当今的科学分类研究中，许多学者称哲学和数学是普遍科学，且认为二者可应用于任何学科和任何领域，其差别在于刻画现实世界时使用的方法和语言不同：哲学使用的是自然语言，数学使用的是人工语言（数学符号）；哲学使用的是辩证逻辑方法，而数学使用的是形式逻辑与数理逻辑方法。这样哲学家有时可以“感觉到”思维的和谐，而数学家则有时可以“感觉到”公式与定理的和

谐,即美.

数学也是自然科学的语言,故它具有一般语言文学与艺术所共有的美的特点,即数学在其内容结构上、方法上也都具有自身的某种美,即所谓数学美.因而数学美是具体、形象、生动的.数学美的起源遥远、历史悠久.

古希腊著名的学者毕达哥拉斯对数学有很深的造诣,其中毕氏定理(在我国称勾股定理)正是他的杰作(为此他的弟子们曾举行了盛大的“百牛大祭”以资庆贺).

他还在现今称为库洛的地方领导了一个数学学术团体,成员们经常聚在一起研究、讨论、交流各自的学习心得,他们的成果对外人是严格保密的.每个成员都守口如瓶,否则会遭杀身之祸.这样一个团体,成员们都有一个特殊的标志,即是用五角星作图案的徽章,并在角顶上分别注上希文 ν 、 γ 、 ι 、 θ 和 χ ,按顺序把它们读下来(逆时针)即 $\nu\gamma\iota\theta\chi$,意思为“健康”.

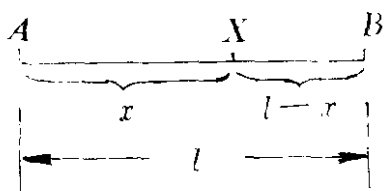


五角星是他们经过筛选、研究过,并十分喜欢的图形.他们为何对五角星独有偏爱?因为五角星是一个美的图形,它里面包含许多有趣的比.

几何上,我们学过“黄金分割”,即把线段 l 分成 x 和 $l-x$ 两段,使其比满足:

$$x : l = (l - x) : x$$

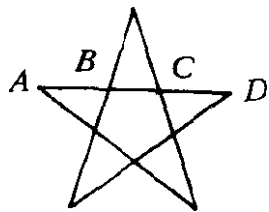
这样解得 $x \approx 0.618l$,这种分割称为“黄金分割”.



我们可以证明(见右图)在五角星里,角星里:

$$BC : AB = AB : AC = AC : AD.$$

显然,毕达哥拉斯学派的学者们发现了它,并且喜欢这种比.



进一步计算还可知它们的比值均为 $0.618\cdots$ 。

$0.618\cdots$ 这是被中世纪学者、艺术家达·芬奇誉为“黄金数”的重要数值，它也曾被德国科学家开卜勒赞为几何学中两大“瑰宝”之一（另一件即为“勾股定理”）。

顾名思义，黄金数当有着黄金一样的价值，人们喜欢它。事实上，黄金比值一直统治着中世纪西方建筑艺术，无论是古埃及的金字塔，还是古雅典的他依神庙；无论是印度的泰姬陵，还是今日的巴黎埃菲尔铁塔，这些世人瞩目的建筑中都蕴藏着 $0.618\cdots$ 这一黄金比数（这显然展示着数学美感）。

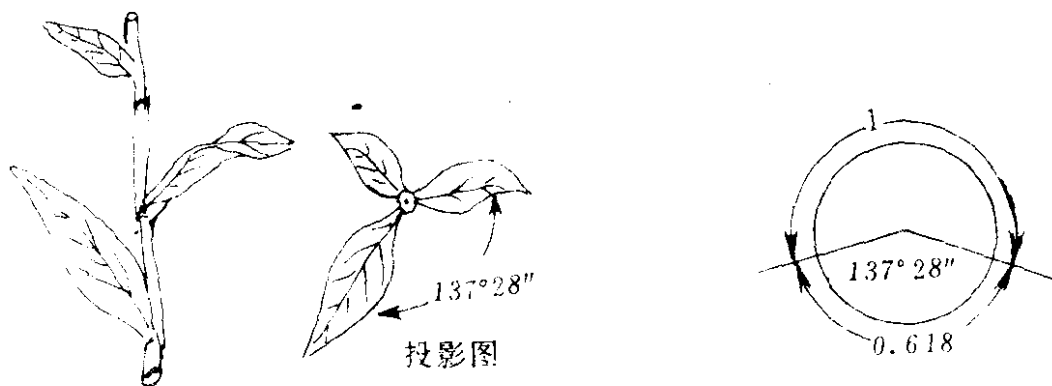
一些著名的艺术佳作也处处体现了黄金比值——许多名画的主题都是在画面的黄金分割点处，不少著名乐章的高潮在全曲的 $0.618\cdots$ 处，……

更有趣的是，人体中有着许多黄金分割的例子，比如：人的肚脐是人体长的黄金分割点，而膝盖又是人体肚脐以下部分体长的黄金分割点。在口腔比较解剖学范畴内，符合 $0.618\cdots$ 这个比例的六龄牙（六岁时萌出的第一颗大磨牙），由于其牙冠大、牙尖多、咀嚼面积广、牙根分叉结实等特点，显出它“与众不同来”，它不仅在咀嚼食物时发挥作用最集中、担负咀嚼压力最大，同时它在维持颜面下三分之一部位的端正（面容），和保持上、下牙弓间的咬合关系，均起着重要的作用。

德国天文学家开卜勒研究植物叶序问题（即叶子在茎上的排列顺序）时发现：叶子在茎上的排列也遵循黄金比。

我们知道：植物叶子在茎上的排布是呈螺旋状的，你细心观察一下，不少植物叶状虽然不同，但其排布却有相似之处。比如相邻两张叶片在与茎垂直的平面上的投影夹角是 $137^{\circ}28'$ ，科学家们经计算表明：这个角度对植物叶子通风、采光来讲，都是最佳的（正因为此，建筑学家们仿照植物叶子在茎上的排列方式设计、建造了的新式仿生房屋，不仅外形新颖、别致、美观、大方，同时还有优良的

通风、采光性能)。



有趣的是：这个角度正是把圆周分为 $1:0.618\cdots$ 的两条半径的夹角。

开卜勒还发现：叶子在茎上环绕的圈数和它绕一个周期时茎上叶数之比 ω 随植物不同而异。他观察后发现了许多种树的 ω 值，比如榆树为 $\frac{1}{2}$ ，山毛榉为 $\frac{1}{3}$ ，樱桃为 $\frac{2}{5}$ ，梨为 $\frac{3}{8}$ ，柳为 $\frac{5}{13}$ ，……

请注意它们的分子和分母分别是：

1, 1, 2, 3, 5, ……

2, 3, 5, 8, 13, ……

这恰恰是两列斐波那契数列^①（这个数列的特点是从第三项起，每项均为其前面两项之和）。

有人还从花的瓣数中，找到了这个数列（花瓣通常只是 2, 3, 5, ……瓣）。

在股票分析中，美国人艾略特于 1934 年在研究股指（股票指

① 所谓斐波那契数列是十三世纪意大利学者伦纳德（绰号称斐波那契）在其著述《算盘书》中，以生小兔问题而引出的一系列数： $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 它的特点是 $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ，由于这列数有许多奇妙性质和用途，因而引起人们的关注，且称之为斐波那契数列（关于它我们后文还要阐述）。

数)变化规律时,提出了所谓“波浪理论”(他于1942年出版了《宇宙奥秘之自然规律》一书),该理论可对许多经济活动作出预测和估计,而其中重要结论是:这类经济活动的指数波动中遵循斐波那契数列规律而变化。

此外,人们还在许多领域中发现了该数列的身影,比如在晶体结构研究中,人们对某些准晶体中结点分布规律里,也发现与该数列有关(详见文献[33])。

更为有趣的是:这个数列前后两项之比,越来越接近黄金比值0.618...

上世纪德国一位心理学家曾做过一次试验:他展出20种不同规格的(即长宽比例不一的)长方形,让参观者从中选出自己认为最美的,结果多数人选择了长:宽=1:0.618...或接近这个比的长方形。

由于0.618...满足关系式 $x^2+x-1=0$,而它的倒数 u 满足 $u^2-u-1=0$,即因为 $u=(1+\sqrt{5})/2$,故 $u^{-1}=0.618...$

考察数列 $1, u, u^2, \dots, u^n, \dots$,注意到

$$u^3 = u \cdot u^2 = u(1+u) = u + u^2 = u + (1+u) = 2u + 1,$$

$$u^4 = u \cdot u^3 = u(2u+1) = 2u^2 + u = 2(1+u) + u = 3u + 2,$$

$$u^5 = u \cdot u^4 = u(3u+2) = 3(1+u) + 2u = 5u + 3,$$

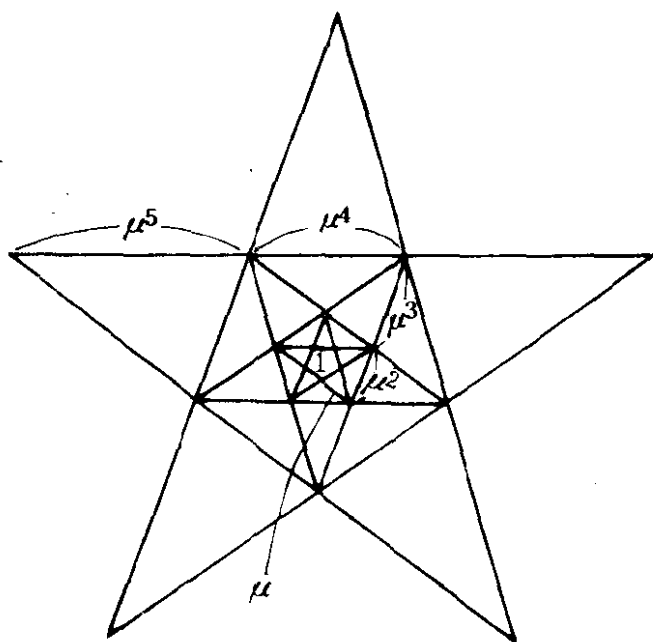
$$\text{一般地, } u^n = nu + (n-2)u.$$

$$\text{又 } u^n = u^{n-1} + u^{n-2} \quad (n \geq 2).$$

故 $u^2, u^3, u^4, \dots$ 恰好也构成一个斐波那契级数(指广义的,确切地讲应称为鲁卡斯数列)。

而 $1, u, u^2, \dots$ 也恰好在下页嵌套的五角星群中体现:

这些除了“黄金分割”自身直觉的美感外,还有一种奇异美(即它的许多美妙性质),比如:人们还发现这个数与其它一些数有密切联系:除了前面提到的斐波那契数列中前后两项比的极限是0.618...外,它还和“杨辉三角”有关系(详见后文)。

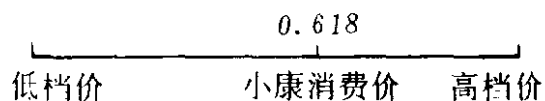


近年来,人们又在最优化方法中找到了这个数的应用,比如优选学中的“0.618…方法”,就是利用了黄金数去选优(它显然应视为数学美的一个应用).

笔者还曾以 0.618 为尺度,提出过一个“小康型购物公式”,它先后被国内不少家报刊转载,从中亦可见人们对这个“黄金数”的偏爱. 这个公式是这样的:

小康型消费价格 = $0.618 \times (\text{高档消费价格} - \text{低档消费价格}) + \text{低档消费价格}$.

它的图示见下图:



这就是说:您在选购商品时,您据自己的财力状况若认为高档价格过于昂贵,而低档价格的商品款式、性能等不尽人意,那么您

可以选购价格为上面公式所给出的档次的商品——它的价格中等偏上,堪称得上“小康”水准。

当然,这里的高、低档概念与界限系依个人财力(经济状况)、爱好(包括习惯)、市场现状等等诸多因素决定的,它会因人而异,也会因时而别(十年前彩电系高档商品,如今已相当普及),特别是高档的涵义是对您自己而言,而非市场现有的或者是你盲目追求,但不切实际的奢望。

就拿彩电来讲,商店中的高、低档价格相去数万元,那里的高档非一般家庭能力所及,这样你在选购前先确定你打算购买的基本档次(包括规格),比如你打算买台 21 吋国产机,这类彩电中高档的(平面、直角、遥控、多画面)价格在 2800 元左右,而低档的(非平面直角)价格在 1800 元左右,那么您的小康消费水准为:

$$(2800-1800) \times 0.618 + 1800 = 2418(\text{元}),$$

换言之,价格为 2400 元左右的为宜。这正是大多数家庭喜欢,且能够接受的档次(市场调查发现,此档次彩电销量最大)。

上述公式对指导商品生产也有实际价值。

数学自身的美,还体现在许许多多方面。

哲理是抽象的,常常使人感到枯燥无味,难以理解,但是用数学知识来做比喻却能使许多哲理富有形象,生动感人,发人深思。

时间是宝贵的,但有些人却不知不觉地白白浪费。德国诗人歌德稍作计算,就使人们大吃一惊:“一个钟头等于 60 分钟,一天就超过了 1000 分钟。明白这个道理后就可知道人能对世界作出多少贡献!”没有时间就没有贡献,浪费时间意味着什么,岂不令人深思?

很多人都想掌握成功的秘诀,于是爱因斯坦就用一道公式来回答众人: $X+Y+Z=A$ 。且他解释说:“X 代表艰苦的劳动,Y 代表正确的方法”。“Z 代表什么呢?”有个年轻人急不可耐地问道,爱因斯坦严肃地回答说:“少说空话!”这个比喻告诉人们成功所必备

的三个条件。

爱迪生曾用百分比来比喻灵感和劳动的关系。他说：“一个好的发明只有百分之一决定于他的天才和灵感，其余百分之九十九决定于他的劳动和汗珠。”这正是“天才出于勤奋”的生动说明。

古希腊哲学家基诺用几何图形中的圆圈来比喻人们掌握的知识，讲了一段颇富哲理的话：“大圆圈比小圆圈掌握的知识当然多一点，但因为大圆圈比小圆圈的圆周长，所以它与外界空间的接触面就比小圆圈大。因此更感到知识不足，需要努力地学习才能弥补。”在“知识爆炸”的当今时代，这个比喻尤有其现实意义：学习学习再学习，这是永恒的真理。

有些人不能正确认识自己，稍有成绩就骄傲自满。托尔斯泰用分数做比喻告诫道：“一个人就好像是一个分数，他的实际才能好比分子，而他对自己的估价好比分母。分母愈大则分数的值就愈小。”看来人要有点自知之明是多么重要。

这几年社会上曾流行这样一道算式： $8-1>8$ 。这在数学上是不成立的，但在生活中却饱含着辩证法。它告诉人们：每天八小时中拿出一小时锻炼身体，其效果要比八个小时全学习、工作还好。

上述比喻除了证明人们对于数学的偏爱之外，也说明数学本身内涵的美——有了数学这才使比喻更富哲理，更加形象，更为生动。

数学与美学还有更特殊、更密切的关系：

当一门学说可以用精确的数学形式表达时，它才成为科学的，由于数学还未进入美学（既然美学是一种科学，它应当可由数学语言来描述），因而美学仍处于前科学状态。美学家李泽厚先生说：

审美……结构……具体形式将来可以用某些数学方程和数学结构来作出精确的表述。

美感是尚待发现和解答的某种未知的数学方程式。这方程式的变数很多，不同比例的配合可以变成不同种类的美感。