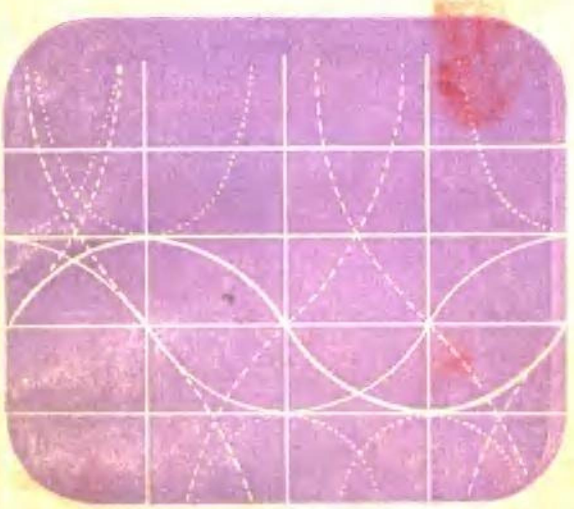


单墫

覆盖

上海教育出版社

覆　　盖

单　墫

上海教育出版社

覆 盖

单 墫

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行 江苏南漕印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 3.75 字数 79,000
1983 年 7 月第 1 版 1983 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—33,000 本

统一书号：7150·2937 定价：0.32 元

前　　言

拿一张纸，剪出两个大小不等的圆，那么大圆一定能覆盖小圆．也就是说，能把大圆放在小圆上面，将小圆完全遮盖住．但是，一个小圆显然不能覆盖大圆，就是两个小圆也不能覆盖一个大圆． 我们必须有三个小圆才可能覆盖一个大圆，而且这三个小圆的半径还不能太小．如果小圆的半径都是大圆半径的一半，那么六个这样的小圆还不能覆盖一个大圆，而要七个小圆才能覆盖一个大圆．

在一块凸平面形的地基上造起来的大厦，我们只要有四个方向的平行光线，就可以在晚间把大厦的各个侧面照亮．要是大厦的横截面不是平行四边形，那就只要三个方向的光线就够了．

古城堡里有一块任意形状的广场，设立卫兵哨位时希望他能从哨位上看到广场的每一个角落，你知道可以设哨的区域是什么形状？本书将会告诉你，这个区域是一个凸形．

你觉得这些事有趣吗？你过去注意到这些事实吗？这些事似乎都比较直观，但从数学上加以证明就不象想象得那么容易了．这本小册子将要围绕着这类问题引出许多数学知识，主题将是“覆盖”．这些知识大体上属于“组合几何学”的范围，它们是中学生能够理解的． 它的许多问题也是中学生能够解决的．通过对一些著名问题的剖析和精巧的典型方法的介绍，我们希望能够使读者的能力得到提高，并了解一些有用的数学知识．

目　　录

§1 覆　盖

在前言中已经提到圆的覆盖问题．圆是最简单而又用得最多的图形．为了明确起见，在本书中，我们把到定点O的距离等于定长r的点的集合称为圆周．把圆周及其内部，也就是到定点O的距离$\leqslant r$的点的集合称为圆，并记为$\odot(O, r)$或$\odot O$，O称为圆心，r称为半径．同样地，本书中说到的三角形、多边形、椭圆，也都是同时包括了这些图形的边界及其内部的，而不单是指围成这些图形的边界．

在本书中要遇到的图形是多种多样的，它们都是点的集合（点集）．

现在我们给出覆盖的严格的定义．

定义 1　设M、N是两个点集，如果点集M的每一个点都属于点集N（采用集合论的符号写，就是$M\subset N$），那么我们就说点集N*覆盖*（包含）点集M．如果点集M的点不全属于点集N，那么我们就说点集N*不覆盖*（不包含）点集M．

点集N（不）覆盖点集M，也常常说成点集M（不）被点集N覆盖．

我们举两个简单的例子．

如果点集M由一个点O组成，点集N为$\odot(O, r)$．圆显然覆盖自己的圆心，所以点集N覆盖点集M．

如果点集M为$\odot(O, r_1)$，点集N为$\odot(O, r_2)$，$r_2\geqslant r_1$，即点集M、N是同心圆，那么点集N覆盖点集M．这是因为点集M的任一点A到圆心O的距离$OA\leqslant r_1$，但是$r_1\leqslant r_2$，所

以 $OA\leqslant r_2$. 这就是说 A 属于点集 N(图 1.1).

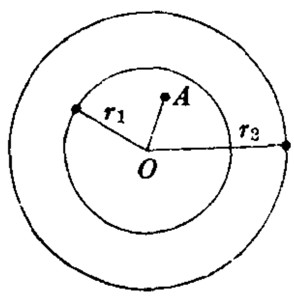


图 1.1

如果 M 覆盖 N, N 又覆盖 M, 那么 M、N 就是完全相同的图形了. 这一点从直观上看很显然, 它和集合论中"$M\subset N$ 及 $N\subset M \Leftrightarrow M=N$"是一回事.

在本书中, 更常用的是下面的定义 2. 请注意它与定义 1 不同的地方.

定义 2 M、N 都是平面点集, 如果能经过一个适当的运动, 使得点集 N 成为点集 N_1, 而 N_1 覆盖点集 M, 那么我们就说点集 N 能覆盖点集 M. 如果不存在上述的运动, 那么我们就说点集 N 不能覆盖点集 M.

这里所说的运动是指平移(平行移动)、绕一个定点的旋转、轴对称(反射)或者它们的有限多次的组合. 显然一个点集 N 经过运动后得到的点集 N_1 与原来的点集 N 除了位置不同外, 是完全一样的(即图形 N 与 N_1 合同).

点集 N 能(或不能)覆盖点集 M, 也常常说成点集 M 能(或不能)被点集 N 覆盖.

"能覆盖"与"覆盖"不是完全相同的概念. 但是为了简便起见, 在不致混淆的时候, 我们对定义 2 中的点集 N_1 与 N 不加严格区分, 并且常常将点集 N_1 也记作 N.

下面的例 1 是在前言中已经提过的问题.

[例 1] 已知 $M_1=\odot(O_1, r_1)$, $M_2=\odot(O_2, r_2)(r_2>r_1)$, 是两个大小不等的圆, 证明圆 M_2 能覆盖圆 M_1, 而圆 M_1 不能覆盖 M_2.

解 平移圆 M_2, 使得圆心 O_2 与 O_1 重合, 则圆 $M_2'=\odot(O_1, r_2)$ 与圆 $M_1=\odot(O_1, r_1)$ 是同心圆. 因为 $r_1<r_2$, 所以

圆 M'_2 覆盖圆 M_1，也就是圆 M_2 能覆盖圆 M_1.

其实，要证明圆 M_2 能覆盖圆 M_1，并不一定非要使圆心 O_2 与 O_1 重合不可. 只要经过平移使点 O_2 与 O_1 之间的距离 $\leqslant r_2-r_1$ 就可以了. 因为这时对于圆 M_1 的任一点 A，有 $O_1A\leqslant r_1$，从而(参见图 1.2)

$$O_2A\leqslant O_1A+O_1O_2\leqslant r_1+(r_2-r_1)=r_2,$$

因此 A 一定属于 $\odot(O_2, r_2)$，即圆 M_2 能覆盖圆 M_1.

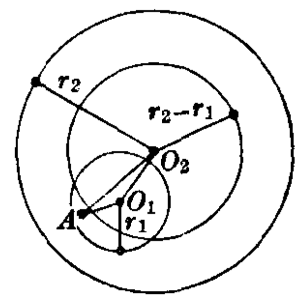


图 1.2

这实际上就是说，我们可以将圆 M_1 与圆 M_2 的半径都减去 r_1，使 M_1 收缩为一个点 O_1 (我们称它为点圆 O_1)，而 M_2 收缩为 $\odot(O_2, r_2-r_1)$，再由 $\odot(O_2, r_2-r_1)$ 显然覆盖点 O_1，导出原来的圆 M_2 能覆盖圆 M_1. 在覆盖问题中，这种收缩(或膨胀)是经常采用的一种方法，后面我们还会遇到.

现在来证明小的圆 M_1 不能覆盖大的圆 M_2. 虽然这个论断直观上很显然，但是证明却有点迂回.

第一种方法是比较两个圆的面积.

如果点集 N 能覆盖点集 M 时，那么由于 M 是 N 的子集，所以 N 的面积 $\geqslant M$ 的面积. 但

$$\text{圆 } M_1 \text{ 的面积 } \pi r_1^2 < \text{圆 } M_2 \text{ 的面积 } \pi r_2^2,$$

所以圆 M_1 不能覆盖圆 M_2.

为了简便起见，本书中有时将点集 M 的面积也记作 M，例如 $\odot O$、$\triangle ABC$ 或 $\square ABCD$ 的面积也记作 $\odot O$、$\triangle ABC$ 或 $\square ABCD$.

第二种方法是比较两个圆的直径.

为了今后的应用，我们先给出一般点集的直径的定义.

定义3 把点集 M 中任意两点 A、B 的距离 AB 的最大值记为 d, 即 $d=\max\{AB\}$. 如果 d 是一个有限数, 那么称 d 是点集 M 的直径.

显然, 当点集 M 为圆时, 点集 M 的直径就是通常所说的圆的直径. 不难证明三角形的直径就是这个三角形的最长的边. 读者可以考虑一下弓形、扇形(或其他熟悉的图形)的直径是什么.

一个点集的直径不一定只有一条.

关于覆盖问题与直径的关系, 有一个简单而实用的结论, 即如果点集 N 能覆盖点集 M, 那么由于 M 是 N 的子集, 所以点集 M 的直径≤点集 N 的直径. 反过来, 如果点集 M 的直径>点集 N 的直径, 那么 N 不能覆盖点集 M. 于是例1可有下面的解法:

因为上面所说的圆 $M_1=\odot(O_1, r_1)$ 的直径 $2r_1$ 小于圆 $M_2=\odot(O_2, r_2)$ 的直径 $2r_2$, 所以圆 M_1 不能覆盖圆 M_2.

比较某种与集合相关联的量(如面积、直径等), 从而导出一个集合不能覆盖另一集合, 这也是覆盖问题中常常用到的一种方法.

下面的例2到例4, 是用圆覆盖其他点集的问题.

[例2] 已知 $\triangle ABC$, 求出覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的圆.

解 显然 $\triangle ABC$ 的外接圆覆盖 $\triangle ABC$, 粗看似乎这个圆就是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的圆. 其实这个结论并不完全正确.

我们分三种情况来讨论.

(1) $\triangle ABC$ 是钝角三角形

以最长边 $BC=a$ 为直径作 $\odot O$. 对属于 $\triangle ABC$ 的任一点 A', 因为 $\angle BA'C \geqslant \angle BAC > 90°$, 所以 A' 在 $\odot O$ 内, 即

$\odot O$ 覆盖 $\triangle ABC$ (图 1.3(1)).

因为任意一个覆盖 $\triangle ABC$ 的圆，它的直径不小于 $\triangle ABC$ 的直径即 $BC=a$，所以 $\odot O$ 就是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的圆.

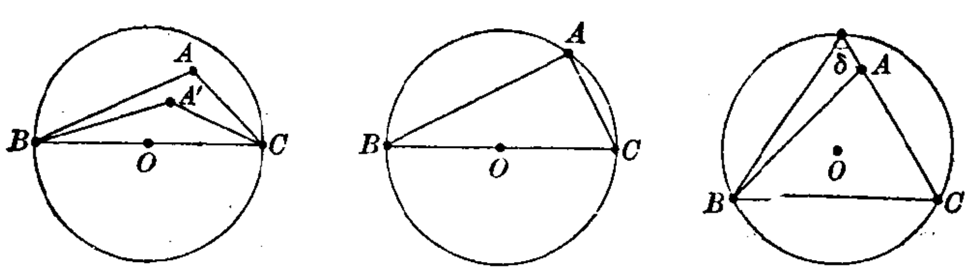
在这一情况下，$\odot O$ 比 $\triangle ABC$ 的外接圆小. 因为 $\angle BAC>90^\circ$，所以 BC (即 $\odot O$ 的直径)不会是外接圆的直径，从而小于外接圆的直径.

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形

与(1)类似，以斜边 $BC=a$ 为直径的圆是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的覆盖圆. 在这种情况下最小的覆盖圆就是 $\triangle ABC$ 的外接圆(图 1.3(2)).

(3) $\triangle ABC$ 是锐角三角形

这时 $\triangle ABC$ 的外接圆也是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的圆. 这只要证明其他任何覆盖 $\triangle ABC$ 的圆，都大于等于 $\triangle ABC$ 的外接圆就行了. 因为如果 $\odot O$ 覆盖 $\triangle ABC$，将 $\triangle ABC$ 在 $\odot O$ 中适当地运动，总可以使得三角形有两个顶点，比如说 B、C，在圆周上. 详细些说，我们先在 $\odot O$ 中平移 $\triangle ABC$，使得一个顶点 B 被移到圆周上，然后再在 $\odot O$ 中将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转，使得另一个顶点 C 也落到圆周上. 由于始终是在 $\odot O$ 中运动，所以这时第三个顶点 A 在 $\odot O$ 内或圆周上(图



(1) (2) (3)

图 1.3

1.3(3)). $\overset{\frown}{BC}$(劣弧)所对圆周角 $\delta\leqslant\angle BAC<90^\circ$, 因此

$$\odot O\text{的直径}=\frac{BC}{\sin\delta}\geqslant\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\triangle ABC\text{的外接圆的直径}.$$

定义 4 如果点集 M 能被一个圆覆盖, 那么我们就说 M 是有界点集.

圆、三角形、多边形、椭圆都是有界点集, 抛物线不是有界点集.

一般地, 一条(不自身相交的)闭曲线及其内部是一个有界点集, 我们把它叫做有界闭集.

定义 5 设点集 M 是有界点集. 覆盖 M 的圆中最小的一个叫做 M 的最小覆盖圆. 最小覆盖圆的半径叫做点集 M 的覆盖半径.

设 $\triangle ABC$ 的最大边 $BC=a$, 那么 $\angle BAC\geqslant 60^\circ$, 所以综合例 2 的(1)、(2)、(3) 可知 $\triangle ABC$ 的覆盖半径 ρ 满足

$$\frac{a}{2}\leqslant\rho\leqslant\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}},$$

左边的等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为钝角或直角三角形时成立; 右边的等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立. 上述右边不等式的详细推导留给读者. 这个不等式给出了三角形的覆盖半径的上下界.

n 边形的最小覆盖圆与覆盖半径将在 §3 中讨论. 对于正 n 边形, 问题是很简单的, 我们现在就可以解决它.

[例 3] 设正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 a, 求它的覆盖半径.

解 我们证明正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆 $\odot O$ 就是它的最小覆盖圆. 证明 $\odot O$ 是最小覆盖圆的通常步骤是: (1) $\odot O$ 是覆盖圆. (2) 任何覆盖圆的半径 $\geqslant\odot O$ 的半径.

我们就用这样的方法来证本题.

显然$\odot O$覆盖这个n边形.

在n为偶数$2m$时,A_1A_{m+1}是$\odot O$的直径($\overset{\frown}{A_1A_{m+1}}$是半个圆周),因此每个覆盖正$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$的圆的直径$\geqslant A_1A_{m+1}=\odot O$的直径,即$\odot O$是最小覆盖圆.

在n为奇数$2m-1$时,易知$\triangle A_1A_mA_{m+1}$是等腰三角形,顶角为锐角:$\angle A_mA_1A_{m+1}=\dfrac{\pi}{2m-1}$,所以$\triangle A_1A_mA_{m+1}$是锐角三角形,根据例2,它的最小覆盖圆是$\odot O$,因而正$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$的最小覆盖圆为$\odot O$.

总之,正n边形$A_1A_2\cdots A_n$的外接圆$\odot O$就是最小覆盖圆.因此覆盖半径就是$\odot O$的半径r,易知

$$r=\frac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}.$$

[例4] 设点集M由两个互不包含的圆$\odot(O_1, r_1)$及$\odot(O_2, r_2)$组成(用集合论的符号可以写成$M=\odot(O_1, r_1)\cup\odot(O_2, r_2)$),求$M$的覆盖半径.

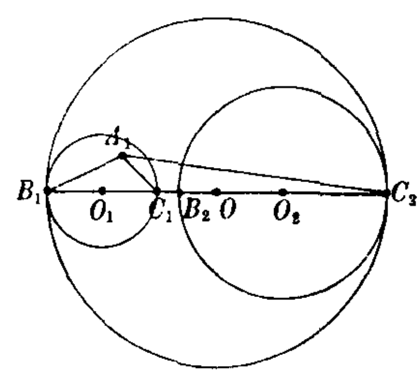


图 1.4

解 设直线O_1O_2交$\odot O_1$于B_1、C_1,交$\odot O_2$于B_2、C_2,并且O_1、C_1、B_2、O_2都在线段B_1C_2上(图1.4).以B_1C_2为直径作$\odot O$,我们证明这个圆就是最小覆盖圆,覆盖半径$r=\dfrac{1}{2}B_1C_2$.

对于$\odot O_1$中任一点A_1,连结A_1B_1、A_1C_1、A_1C_2.因为B_1C_1是$\odot O_1$的直径,所以$\angle B_1A_1C_1\geqslant 90°$,从而

$$\angle B_1A_1C_2 \geqslant \angle B_1A_1C_1 \geqslant 90°,$$

A_1 在 $\odot O$ 中. 于是 $\odot O$ 覆盖 $\odot O_1$, 同样 $\odot O$ 覆盖 $\odot O_2$, 因此 $\odot O$ 覆盖 M.

任何一个覆盖 M 的圆至少都要覆盖点 B_1、C_2, 因而它的直径 $\geqslant B_1C_2$, 所以 $\odot O$ 是最小覆盖圆.

容易看出在 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外离、外切或相交时, r 大于、等于或小于 r_1+r_2.

我们也可以考虑用三角形或多边形来覆盖圆.

[例 5] 证明在能覆盖 $\odot(O, r)$ 的正 n 边形中, 以 $\odot(O, r)$ 的外切正 n 边形的边长为最小.

解 设正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 覆盖 $\odot(O, r)$, 则 O 到这 n 边形的每一条边的距离 $\geqslant r$. 将这 n 边形的每边向内平移直至与 $\odot(O, r)$ 相切(即与 O 点的距离为 r), 这样截得一个 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ (图 1.5). 我们先证明 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 也是一个正 n 边形.

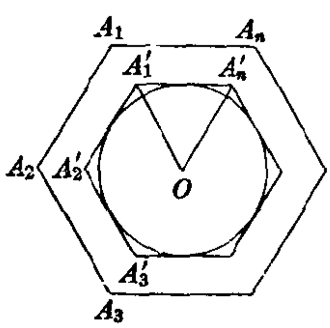


图 1.5

因为两个 n 边形的对应边平行, 所以对应角相等. 由于正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的角全相等, 所以 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 的角也全相等. 又因为 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 是 $\odot(O, r)$ 的外切多边形, 所以 $\angle OA_1'A_n' = \angle OA_1'A_2' = \angle OA_2'A_1' = \angle OA_n'A_1' = \frac{1}{2}\angle A_n'A_1'A_2'$, 从而 $\triangle OA_1'A_2' \cong \triangle OA_1'A_n'$, $A_n'A_1' = A_1'A_2'$. 同理可知 $A_1'A_2' = A_2'A_3' = \cdots = A_{n-1}'A_n'$. 因此 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 是 $\odot(O, r)$ 的外切正 n 边形.

正 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 被正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 覆盖, 因而它

的面积不大于正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积. 从而它的边长也不大于正 n 边形的边长. 证毕.

我们可以证明比例 5 更强的结论, 即在全体覆盖 $\odot(O,r)$ 的 n 边形(不一定是正 n 边形)中, 以这圆的外切正 n 边形的面积为最小.

[例 6]* 设 n 边形 M 覆盖 $\odot(O, r)$, M_n 为 $\odot(O, r)$ 的外切正 n 边形, 则面积 $M \geqslant M_n$.

解 我们把证明分两段, 这里先假定 M 是一个凸多边形. 采用例 5 中的方法将 M 的各边向内平移, 得到一个 $\odot(O, r)$ 的外切多边形 M', M' 是凸的, 且面积 $M' \leqslant M$.

设 $\odot(O, r')$ 是正 n 边形 M_n 的外接圆, M' 的边截 $\odot(O, r')$ 得到 n 个弓形 S_1、S_2、$\cdots$、S_n (图 1.6). 由于 M' 是 $\odot(O, r)$ 的外切多边形, O 到 M' 的各边的距离都等于 r, 即在 $\odot(O, r')$ 中, 弓形 S_1、S_2、$\cdots$、S_n 的弦与圆心 O 的距离都等于 r, 从而这些弓形的面积相等. 因此多边形 M' 与 $\odot(O,r')$ 的公共部分 $M' \cap \odot(O, r')$ 的面积满足:

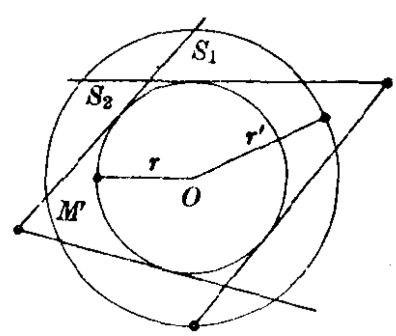


图 1.6

$$M' \cap \odot(O, r') \geqslant \odot(O, r') - (S_1 + S_2 + \cdots + S_n)$$
$$= \odot(O, r') - nS_1.$$

而 M_n 就等于 $\odot(O, r') - nS_1$, 所以 $M' \geqslant M_n$, 更有 $M \geqslant M_n$.

为了对不是凸多边形的情况进行论证, 先引进一个推论.

推论 $\odot(O, r)$ 的外切正 n 边形 M_n 的面积 M_n 是 n 的减函数, 即 $M_{n+1} \leqslant M_n$.

证明 正 n 边形 M_n 可以看成是 $n+1$ 边形, 其中有两个

打 * 号的例题难度较大, 初次阅读时可以略去

顶点重合. 因此, 根据上面得到的结果 $M_{n+1} \leqslant M_n$.

现在我们继续证明在 M 不是凸多边形时, 仍然有 $M \geqslant M_n$.

首先证明对于凹的多边形 M, 都可以找到一个多边形 M'', M'' 的边数比 M 少, 并且 $M \supset M'' \supset \odot(O, r)$. 这是因为每个凹多边形 M 都有一个内角 $\alpha > 180°$(图 1.7), 反向延长它的边 A_2A_1, 设与 M 的边相交于 A_3'(如果交点不止一个, 取与 A_2 最近的一个), 则 A_1A_3' 把 M 分成两个多边形, 每一个的边数都比 M 少. 如果其中有一个覆盖 $\odot(O, r)$, 那么它就是所要找的多边形 M''. 如果不是这样, 那么直线 A_1A_2 与 $\odot(O, r)$ 相交. 反向延长 A_2A_3, 在直线 A_2A_3 与 $\odot(O, r)$ 不相交时, 同样能找到所需要的多边形 M''. 如果直线 A_1A_2、A_2A_3 均与 $\odot(O, r)$ 相交(图 1.8). 连 OA_2, 过 A_2 作 OA_2 的垂线. 由于 A_2 不在 $\odot(O, r)$ 内部, 所以这垂线不与 $\odot(O, r)$ 相交, 因而不在角 $\beta(\beta = 360° - \alpha)$ 及其对顶角内, 从而与 M 的边相交于 A_1'、A_3', A_1'、A_3' 分别在 A_2 的两侧(如果某一侧交点的个数不只一个, 取与 A_2 最近的一个). 线段 $A_1'A_3'$ 将多边形 M 分为两个多边形, 其中覆盖 $\odot(O, r)$ 的那一个就是所要找的多边形 M''.

如果把多边形 M 当作一块蛋糕, 中间涂了一块形状为

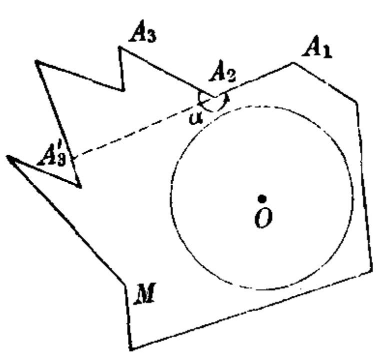


图 1.7

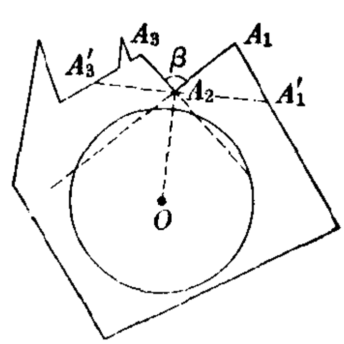


图 1.8

$\odot(O,\ r)$的奶油，那么刚才所说的结论就是，对于凹的蛋糕，总可以用刀切去一块，使得蛋糕的边数减少，但不切到奶油．

采用上面的"切法"，使 M 的边数减少，得到多边形 M''．如果 M'' 还是凹多边形，再继续切，如此下去，直到切出一个凸多边形（边数为三的多边形，即三角形，当然是凸多边形）．不妨假定这个凸多边形就是 M''，它的边数 $m<n$．

由于 M'' 是凸 m 边形，并且 M'' 覆盖 $\odot(O,\ r)$，所以面积 $M''\geqslant M_m$，这里 M_m 是 $\odot(O,\ r)$ 的外切正 m 边形的面积．根据推论，$M_m>M_n$，所以 $M''>M_n$，更有 $M>M_n$．证毕．

从上面的证明不难看出当且仅当 M 为 $\odot(O,\ r')$的内接正 n 边形（即$\odot(O,\ r)$ 的外切正 n 边形）时，$M=M_n$．

下面的两个例题是正三角形与正方形的覆盖问题．

［例 7］ 一个边长为 a 的正三角形 EFG 覆盖一个边长为 1 的正方形 $ABCD$，求 a 的最小值．

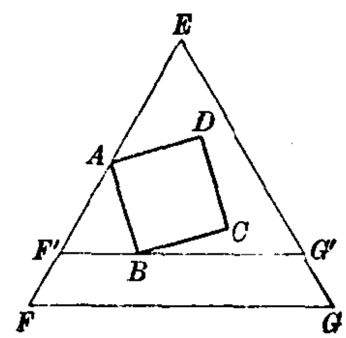


图 1.9

解 可以假定 $\triangle EFG$ 的每一条边上至少有正方形 $ABCD$ 的一个顶点，否则就可以将这条边，不妨设为 FG（图 1.9），向三角形内平移至 $F'G'$，使得它含有正方形 $ABCD$ 的一个顶点，从而得到了一个更小的正三角形 $EF'G'$．

这时有两种情况：

(1) 正方形 $ABCD$ 的四个顶点全在 $\triangle EFG$ 的边上（图 1.10）．

这时 $a=ED+DF=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$．

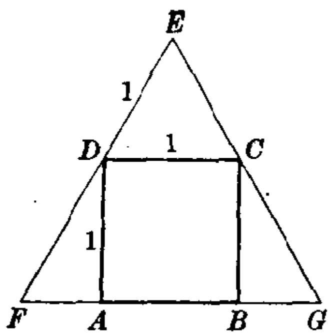


图 1.10

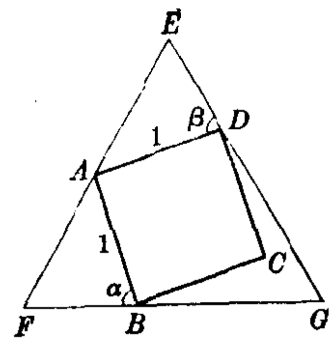


图 1.11

(2) 正方形 $ABCD$ 有一个顶点不在 $\triangle DEF$ 的边上(图 1.11). 这时,

$$a=AF+AE=\frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ}+\frac{\sin\beta}{\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

因为 $\qquad \alpha+\beta=360^\circ-60^\circ-60^\circ-90^\circ=150^\circ,$

并且 $\alpha<90^\circ$, $\beta<90^\circ$, 所以,

$$\alpha>60^\circ,\ \beta>60^\circ,\ -30^\circ<\alpha-\beta<30^\circ,$$

于是

$$a=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{150^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{150^\circ}{2}\cos\frac{30^\circ}{2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 90^\circ+\sin 60^\circ)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

综合(1)、(2)可知, 当且仅当 $\triangle EFG$ 如图 1.10 时, 边长最小, 最小边长为 $1+\frac{2}{\sqrt{3}}$.

[例 8] 如果一个边长为 a 的正方形 $ABCD$ 能覆盖一个边长为 1 的正三角形 EFG, a 至少要多大?

解 我们首先分几步确定 $\triangle EFG$ 与正方形 $ABCD$ 的位置关系, 然后再求 a 的值.

(1) 经过平移可以假定正方形 $ABCD$ 有一个顶点与 $\triangle EFG$ 的顶点重合, 方法如下: 在 E、F、G 中设 E 为最左