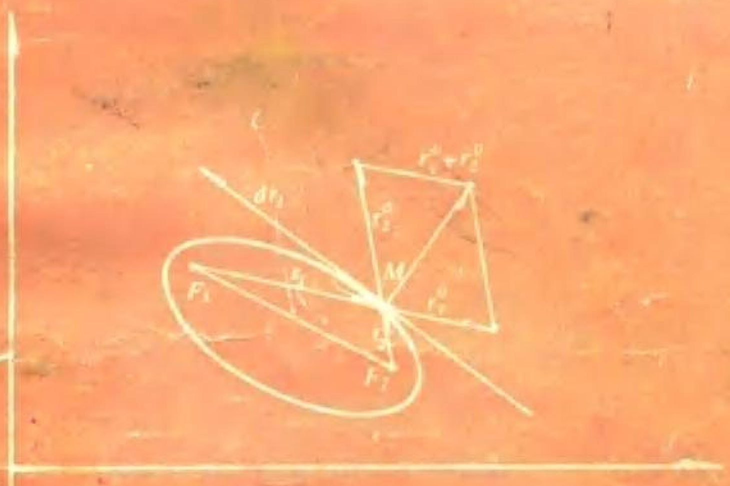
高等学校教学参考书



微分几何习题集

WEIFEN JIHE XI TI JI

北京师范大学出版社

微分几何习题集

〔苏〕И. В. БЕЛЬКО　В. И. ВЕДЕРНИКОВ
В. Т. ВОДНЕВ　А. А. ГУСАК
А. И. НАХИМОВСКАЯ　А. П. РЯБУШКО
Л. К. ТУТАЕВ　А. С. ФЕДЕНКО　著
张文贵 译　朱鼎勋 校

北京师范大学出版社

微分几何习题集

〔苏〕А.С.ФЕДЕНКО等著

张文贵 译　朱鼎勋 校

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

西安新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32　印张：9.25　字数：233千

1983年1月第一版　1983年1月第一次印刷

印数：1—24,000

统一书号：13243•13　定　价：1.15元

出 版 说 明

本书译自苏联A. C. ФЕДЕНКО等八人所编著的“微分几何习题集”的修订本。全书共分六章21节，内容比较丰富，包括习题1091道，并有解答。作者运用新观点定义和解释了微分几何中的基本概念，并配备了一般书中所少见的有关新概念、新内容的习题。

本书可作为高等院校几何专业的师生及有关科研工作者的参考书。

译 者 的 话

本书译自1979年苏联 A. C. ФЕДЕНКО 等八人编著的“微分几何习题集”。该书为修订本。该书的绪论以及各章开始部分的说明，向读者提供了深入学习微分几何基本理论的好材料。修订后的习题集变动较大，主要变动之处如下：

一、引用新观点来定义和解释微分几何中的基本概念。

修订版中对一些基本概念，如：映射、R^n 空间、曲线和曲面等都予以近代的定义。对曲面的第一基本形式和第二基本形式都是由线性齐式引入的，用线性观点来介绍的。

二、更新和补充了大量习题。

63年版仅有平面曲线、空间曲线和曲面等三部分内容、包括340道习题；而修订版包括矢函数等六章21节内容，共有习题1091道。有些习题可作为定理的补充，例如用843题的结论可以推出柱面及其它许多曲面的全部测地线，等等。

三、增加了较新内容的习题。

在修订版中除了包括一般微分几何课本与习题集中常见的典型习题外，还包括了一般书中少见的有关新概念新内容的习题。例如微分形式和活动标架法是较新的课题，现行的一般教材中虽然增加了这部分内容，但例题习题配备甚少，本书§18正好补充了这个空白。

在翻译中，译者尽量采用原书符号，仅在个别地方作了变动，如挠率记号改为 τ 等。书中所出现的非帝俄及苏联数学家均用俄文表示，译者则均改用这些数学家原名来表示。对原书中一些明显错误，译者作了修正，但由于译者水平所限，仍恐有遗漏之处，望读者给以指正。

在本书翻译过程中，承蒙北京师范大学朱鼎勋教授给予极大鼓励与指导，并亲自审阅了全部译稿，译者在此谨向朱鼎勋教授表示衷心的感谢。

译者

1981 年 11 月

目　　录

序　　言

本习题集收集了大学数理系有关微分几何课程主要章节的近千道习题。在出版这个习题集时，作者还注意到目前数学教学中所出现的一些新变化。

根据中学新的数学教学大纲使得本书在内容选取、名词术语与符号使用上都有所变化。在本书中，我们巩固和进一步运用了这些新内容，并且尽量使用中学常用名词与表示方法。特别注意到对微分几何课所讨论的基本对象，给以明确的定义。对于曲线给出了两个不同的定义，一方面定义曲线为等价参数化的路径类，另一方面曲线作为一维流形而给出它的概念。曲面则作为二维流形讨论，并用其参数化给出。多数问题是在局部范围内解决，也就是对几何图形在它的固定点邻域内来讨论。

在本书的叙述中，作者力图使微分几何的内容与其它数学的内容协调一致。本书用到了线性代数、数学分析与微分方程的某些内容。在叙述中特别注意到与中学几何以及解析几何等课程的联系。

本书包括绪论及六章内容共 21 节，书后附有内容索引。

本书可作为大学数理系的教学参考书。

作　者

符　　号

$\{a, b, c, \cdots\cdots\}$——由元素 $a, b, c, \cdots\cdots$ 组成的集合；

$\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$——所有具有已知性质 P 的元素的集合；

$x \in A$——x 是集合 A 的元素(x 属于 A)；

$A \subset B$——集合 A 是集合 B 的子集合；

$A \cup B$——集合 A 与 B 的并；

$A \cap B$——集合 A 与 B 的交；

$A \setminus B$——集合的差；

ϕ——空集；

R——所有实数的集合；

$\forall$——每一个；

$\exists$——存在；

$p \Longrightarrow q$——由 p 得到 q；

$p \Longleftrightarrow q$——p 与 q 等价；

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$——矢量的数性积；

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$——矢量的矢性积；

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$——矢量的混合积；

所有其它符号将在正文中给出。

绪　　论

映　　射

若 X 与 Y 是任意的非空集合。如果对集合 X 的每一个元素都有集合 Y 的某一个确定的元素与之对应，则说给出了集合 X 到集合 Y 的**映射**。映射用符号 f 表示，并记作

$$\begin{cases} f: X \longrightarrow Y, \\ \quad x \longmapsto f(x) \end{cases} \tag{1}$$

元素 $y=f(x)$ 称为**元素 x 的象**，并且如果 $A\subset X$，则集合

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$$

称为**集合 A 的象**。集合 $f(A)$ 称为**映射 f 的象**。

如果 $f(X)=Y$，则说 f 是**集合 X 到集合 Y 上的映射**或称 f 是**满射**。映射 f 称为**单射**，如果

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)。$$

同时为满射与单射的映射称为**满单射**。这样的映射建立了集合 X 与 Y 元素间的**一一对应**。对于满单射 f 存在**逆映射**：

$$\begin{cases} f^{-1}: Y \longrightarrow X, \\ \quad f(x) \longmapsto x \end{cases}$$

它同样是满单射。

如果 $A\subset X$，则可以给出映射(1)在 A 上的**限制**：

$$\begin{cases} f|_A: A \longrightarrow Y, \\ \quad a \longmapsto f(a) \end{cases} \quad 其中\ a\in A.$$

当 Y 取为实数集合 R 时，映射(1)称为**函数**。

如果 f：$X\longrightarrow Y$ 和 g：$Y\longrightarrow Z$ 是映射。则可以定义映射

$$\begin{cases} g\cdot f: X \longrightarrow Z, \\ \quad x \longmapsto g(f(x)), \end{cases}$$

称其为**映射** f **与** g **的复合**。

对于两个集合X和Y，它们的**直接积**（或**笛卡儿**(Descastes)**积**）是所有数对$(x,\ y)$的集合

$$X\times Y=\{(x,y)\,|\,x\in X,y\in Y\}$$

其中 $x\in X,y\in Y$。

R^n 空 间

由 n 个实数的有序列$(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$组成的集合

$$R^n=\{(x_1,x_2,\cdots\cdots,\ x_n)\,|\,x_1,x_2,\cdots\cdots,\ x_n\in R\},$$

能够赋予不同的**结构**。R^n 是一个 n **维实矢量空间**。R^n 的元素可以称为**矢量**，并记作 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x},\mathbf{y}\cdots\cdots$。$R^n$ 空间的基底由矢量

$$i_1=(1,0,\cdots\cdots,0),\quad i_2=(0,1,0,\cdots\cdots,\ 0),$$
$$\cdots\cdots,i_n=(0,0,\cdots\cdots,\ 1)$$

组成，称为**标准基底**。在 R^3 中标准基底用(i,j,k)表示。

我们可以把矢量空间 R^n 作为点的仿射空间来研究。此时 R^n 的元素可以看作为点，记作M，N，……，同时也可以看作为矢量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{x}$、……。[*]

矢量 $r=(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$在标准基底下的坐标为 $x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n$。点 $A(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$在标架$(O;\ i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,i_n)$下有同样的仿射坐标，其中 $O=(0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)$为坐标原点。

若对于 R^n 空间的任意两个矢量 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,x_n)$与 $\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_n)$有数

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n$$

与之对应，则称数 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ 为矢量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的**数性积**，而 R^n 成为 n**维欧几里得空间**。在这个空间中引进两个点$M=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$与 $N=(y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_n)$间的**距离**概念：

---

* 本书中点的记号有两种含意：一般情况下表示通常的点；有些情况下，如进行运算则表示该点所对应的径矢，即 $M=OM$，此时M代表矢量。（译者注）

$$|MN|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\text{。}$$

特殊地，如果在中学课本中给出的平面与空间中选择的是笛卡尔坐标系，就可以把它们分别看作为 R^2 空间和 R^3 空间。

称集合

$$B(A,\ \varepsilon)=\{M\in R^n \mid |AM|<\varepsilon\}$$

为**中心在点 A，半径为 $\varepsilon>0$ 的球**。这个球称为**点 A 的 ε 邻域**。

R^n 的子集 U 称为它的**开集**，如果对 U 的每一个点 A，U 皆含有以 A 为中心的某个球。集合中含有点 A 的每个开集，称为**点 A 的邻域**。

点 $A\in R^n$ 称为集合 $U\subset R^n$ 的**聚点**，如果该点的任一个邻域至少含 U 的一个点。集合 U 的所有聚点的全体称为集合 U 的**闭包**，记作 $\bar{U}$。集合 U 称为**闭集**，如果 $\bar{U}=U$。

集合 $V\subset R^n$ 称为**连通的**，如果不存在开的、不相交的集合 U_1 与 U_2，使集合 V 分为两个非空子集 V_1 与 V_2，其中 $V_1\subset U_1$，$V_2\subset U_2$。开的连通集称为**区域**。区域的闭集称为**闭区域**。

集合 U 的点称为**内点**，如果它的某个邻域属于 U。集合 U 的所有内点的全体称为这个集合的**内部**。

点 $M\in R^n$ 称为集合 $U\in R^n$ 的**边界点**，如果它的任意一个邻域既有属于 U 的点，又有不属于 U 的点。集合 U 边界点的全体称为 U 的**边界**，记作 ∂U。

R^n 空间点的任意一个子集称为**图 Φ**。含有 x_1，x_2，……，x_n 的方程，若有且仅有属于 Φ 的点才能满足，则称该方程为**图 Φ 的方程**。设 $l: R^m\longrightarrow R^n$ 是线性映射，$(i_1, i_2,\ \cdots\cdots,\ i_m)$ 是 R^m 的标准基底，$('i_1,\ 'i_2,\ \cdots\cdots,\ 'i_n)$ 是 R^n 的标准基底，并且设

$$l(i_k)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}{}'i_j \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)\text{。}$$

矩阵

$$(\alpha_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant m}}$$

称为**线性映射的矩阵**，其列为矢量 $l(i_k)$的坐标。如果 $x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m)\in R^m$，$l(x)=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)\in R^n$，则

$$y_j=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}x_k。$$

m 维矢量空间 V 的两个基底$(e_1, e_2, \cdots\cdots, e_m)=[e]$与$(a_1, a_1, \cdots\cdots, a_n)=[a]$称为**等价的**，如果变基底[e]为基底[a]的矩阵(即空间 V 中变基底[e]为基底[a]的线性变换矩阵)的行列式为正值。空间 V 的等价基底类称为该空间的**定向**。在任一个矢量空间中，仅有两个定向，其中一个称为**正向**，另一个称为**负向**。在空间中选择定向，相当于在该空间中选择基底。

若 V 为 R^3 的二维子空间，(e_1, e_2)是 V 的基底，而 m 是R^3中不属于 V 的非零矢量，则(e_1, e_2, m)是 R^3的基底。适当选择 m，若使基底(e_1, e_2, m)与 R^3 的标准基底等价，则称基底(e_1, e_2)为**正向的**。这样一来，V 中定向的给出与矢量 m 有关，经常选择 m 与 V 正交且为单位矢量。

在矢量空间 R^n 中，称线性变换

$$\alpha: R^n\longrightarrow R$$

为**线性形式** α。若令 $\alpha(i_k)=\alpha_k$，则对矢量 $h=(h_1, \cdots\cdots, h_n)$有

$$\alpha(h)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k。$$

坐标函数

$$\begin{cases} u_i: R^n\longrightarrow R \\ \quad (u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)\longmapsto u_i \end{cases} \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

就是线性形式的一个例子。

满足条件

$$\beta(h_1+h_2, p)=\beta(h_1, p)+\beta(h_2, p),$$
$$\beta(\lambda h, p)=\lambda\beta(h, p),$$
$$\beta(h, p_1+p_2)=\beta(h, p_1)+\beta(h, p_2),$$

$$\beta(h,\ \lambda p)=\lambda\beta(h,\ p)$$

的映射

$$\beta: R^n \times R^n \longrightarrow R$$

称为矢量空间 R^n 的**双线性形式**。

若 $\beta(i_k,\ i_l)=\beta_{kl}$，$h=(h_1,\ \cdots\cdots,\ h_n)$，$p=(p_1,\ \cdots\cdots, p_n)$，则

$$\beta(h,\ p)=\sum_{k,\ l=1}^{n}\beta_{kl}h_k p_l。$$

双线性形式 β 若满足 $\beta(h,\ p)=\beta(p,\ h)$，则称其为**对称双线性形式**；若有 $\beta(h,\ p)=-\beta(p,h)$，则称其为**反对称双线性形式**（或称 2-形式）。就对称双线性形式 $\beta_{kl}=\beta_{lk}$，而就反对称双线性形式 $\beta_{kl}=-\beta_{lk}$。映射 $q: R^n \longrightarrow R$ 称为矢量空间 R^n 的**二次形式**，若存在双线性对称形式 β，使 $q(h)=\beta(h,\ h)$。在坐标系下，$q(h)$ 可表成下式：

$$q(h)=\sum_{k,\ l=1}^{n}\beta_{kl}h_k h_l。$$

二次形式 q 称为双线性形式 β 的**对应形式**。若 α 与 β 是矢量空间 R^n 的两个线性形式，称 2-形式

$$\alpha\wedge\beta: R^n \times R^n \longrightarrow R$$

为 α、β 的**外积**，$\alpha\wedge\beta$ 由下式确定：

$$(\alpha\wedge\beta)(h,\ p)=\frac{1}{2}(\alpha(h)\beta(p)-\alpha(p)\beta(h))$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha(h) & \alpha(p)\\ \beta(h) & \beta(p)\end{vmatrix},$$

若 M 是 R^3 空间的一个任意点，称$(M,\ h)$为 R^3 在M点的切矢量，其中 h 是 R^3 的任意矢量。切矢量$(M,\ h)$能够表为有序点偶$(M,\ N)$，其对应矢量与 h 重合（即$M+h=N$），也可表为以M为始点的矢量 h 。集合

$$T_M R^3=\{(M, h)\mid h\in R^3\}$$

为 R^3 中在M点的所有切矢量的集合，称为**切空间**。按下列规则将

矢量运算变为在同一点的切矢量运算：

$$(M,\ h)+(M,\ p)=(M,\ h+p),$$
$$\alpha(M,\ h)=(M,\ \alpha h),$$
$$(M,\ h)\cdot(M,\ p)=h\cdot p。$$

由于这些运算，$T_M R^3$ 成为欧氏矢量空间，而矢量 $(M,\ i)$，$(M,\ j)$，(M,k) 是它的标准正交基。当切点M被指定时，切矢量很容易由 h 表出。

在 R^3(或 R^3 的某个子集)的每一点，取 R^3 的切矢量，则形成 R^3(或其子集)的矢量场。

矢 函 数

若 U 是 R^m 空间中的一个集合，映射

$$r:U\longrightarrow R^n \tag{2}$$

使每个点$(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)\in U$ 对应矢量 $r(u_1,u_2,\ \cdots u_m)\in R^n$，则称 r 为 m **个纯变量的矢函数**。一个矢函数的问题等价于 n个称为**分量**的纯量函数的问题，其关系为：

$$r(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$$
$$=(x_1(u_1,u_2,\cdots,u_m),\ \cdots,\ x_n(u_1,u_2,\cdots u_m))。$$

假设矢函数r定义在点$M_0\in R^m$的某个邻域(可以不包括 M_0)；a是一个常矢。如果对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使由

$$0<|MM_0|<\delta\Longrightarrow|r(M)-a|<\varepsilon,$$

则称矢量 a 为**矢函数 r 的极限**，记作

$$a=\lim r(M)。$$

矢函数(2)定义在M_0点的某个邻域，若

$$\lim_{M\to M_0} r(M)=r(M_0),$$

则称矢函数 r 在M_0点**连续**。

一般地，对任意点 $M_0\in U$，若对 R^n中点 $r(M_0)$ 的任意邻域 W；在 R^m 中存在点 M_0 的这样的邻域 V，使 $r(V\cap U)\subset W$，则

称矢函数(2)在M_0点连续。映射r：$U\to V$ 称为**同胚的**，若它是满单射，并且 r 与 r^{-1}同时连续。其中，U是 R^m 的子集，V是 R^n的子集。

我们讨论在开区间上给出的矢函数$r=r(t)$，也就是实变量 t 的矢函数。如果这个矢函数在 t_0点有定义，并且极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称该极限为已知矢函数在 t_0 点的**导矢**，记作 $r'(t_0)$ 或 $\frac{dr(t_0)}{dt}$。这样一来，出现了作为 r **的导矢**的矢函数 r'。r' 的导矢称为 r 的二阶导矢。函数 $r^{(k-1)}$的导矢称为 r 的**k阶导矢**$r^{(k)}$。称具有 k 阶连续导矢的矢函数为**属于 C^k 类矢函数**。称具有任意阶连续导矢的矢函数为**属于C^∞ 类矢函数**。通常称 C^k类函数为**光滑函数**。可以把矢函数 $r=r(t)$的导矢 $r'(t_0)$与线性映射 $r'(t_0)$：$R\to R^n$ 视为等同，这个映射使每一个 $\tau\in R$ 对应着矢量 $\tau r'(t_0)$，并且满足等式：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|r(t_0+\Delta t)-r(t_0)-\Delta t r'(t_0)|}{|\Delta t|}=0。$$

线性映射$r'(t_0)$：$R\to R^n$ 通常称为**微分**，并记作$dr_{t_0}=r'(t_0)dt$。

在闭区间 $J=[\alpha,\beta]$ 上给出的矢函数 $r=r(t)$称为**光滑的**，若存在开区间 $I=]a,b[$（I 包含 J）上的光滑函数 $\rho=\rho(t)$，使 $\rho|_J=r$。

对于属于 C^k 类，含有一个实变量的矢函数 r，有**泰乐公式**成立：

$$r(t+\Delta t)=r(t)+\Delta t r'(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}r''(t)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(\Delta t)^k}{k!}(r^{(k)}(t)+\varepsilon(t,\Delta t))$$

其中，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon(t,\Delta t)=0$。