山东科学技术出版社

中 册

Б·П·吉米多维奇

工科用数学分析问题解答

Б·П·吉米多维奇

工科用数学分析问题解答

中　　册

金恂　宋俐　段奇　编

山东科学技术出版社

一九八六年·济南

内 容 简 介

这套书汇集3193道习题的详细解答，分三册出版，内容广泛，题目类型多，适用面宽.

上册包括分析引论（函数与极限）、函数的微分法、函数的极值和导数的几何应用、不定积分、定积分；中册包括多元函数、重积分与曲线积分、级数；下册包括微分方程、近似计算.

这套书充分考虑了数学分析本身的系统性、逻辑性和严密性，注意到广大工科类大学生学习高等数学的特点和需要. 无论对于初学者，还是有关课程的教师，都是一本理想的学习用书和参考书.

Б·П·吉米多维奇

工科用数学分析问题解答

中　册

金惆　宋俐　段奇　编

山东科学技术出版社出版

（济南市南郊宾馆西路中段）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　19.125印张　405千字

1986年1月第1版　1986年1月第1次印刷

印数：1—16500

书号 13195·148　　定价 3.65元

出版说明

数学分析（又称微积分学）是整个高等数学的基础，它在自然科学的各个领域中，有着广泛的应用。数学分析作为一门课程，正在成为愈来愈多专业的必修课。

Б. П. 吉米多维奇是苏联有影响的教育家和数学家。他主编的《工科用数学分析中的问题和练习》一书，包括了从数学分析的各个方面精选出来的3193道习题，内容丰富，针对性强，适用面广。该书在苏联已连续印刷十次，在我国也有较大的影响。书中的许多习题，都广泛地被我国多种高等数学教材所采用。

我们邀请具有丰富教学经验的教师将该书的全部习题做了解答，其中一部分提供了多种解法；有些题目在解答时写得比较扼要，以期对广大学习数学分析的读者起到启发、引导作用，以利于培养独立思考能力和掌握解题技能技巧。有关专业的教师亦可作为教学参考书。

山东大学郭大钧教授以及孙经先同志对全书做了仔细的审校。

这本习题解答集对普通高等工科院校的大学生，以及电视大学、函授大学和其他业余大学的学生同样适用，对自学者也会有很大帮助。

本书编审过程中出现的某些误解、差错，恳请指正，不胜感谢。

1985年6月

目　录

第六章　多元函数

§1. 基本概念

1° 多元函数的概念　函数记号　设E是由xoy平面上的点（x，y）组成的集合，如果对E中的每一个点（x，y），都有唯一确定的实数z与之对应，则z称为是两个变量（x，y）的（单值）函数。x，y称为是自变量。E称为是函数z的定义域（存在域）。函数关系可以记为：

$$z=f(x, y) \quad 或 \quad z=F(x, y)等。$$

三个或多于三个自变量的函数可以类似地定义。

函数$z=f(x, y)$在点$P(a, b)$的值，就是当$x=a$，$y=b$时$f(x, y)$的值，记为$f(a, b)$或$f(P)$。就最常见的情况而言，在直角坐标系中，函数$z=f(x, y)$的几何表示是某个曲面（图6·1）。

在最简单情形下，函数的定义域是xoy坐标面上由一条或几条曲

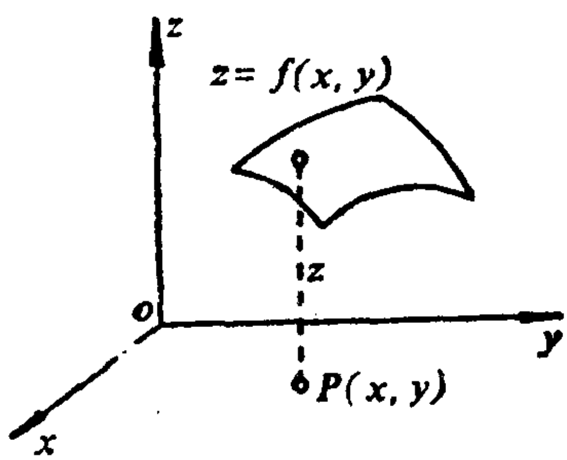

图　6·1

线（区域的边界）所围成的定义区域，它可能是有限的区域，也可 能是无限的区域。

类似地，在最简单的情况下，三元函数 $u=f(x, y, z)$ 的定义域是 $oxyz$ 空间中的某个三维区域。

2° 函数的等量线与等量面 xoy 平面上由满足 $f(x, y)=C$ 的点 (x, y) 构成的曲线称为是函数 $z=f(x, y)$ 的等量线。在这条曲线的每一点处，函数取同一个值 $z=C$（通常在图上用记号标出）。

同样地，曲面 $f(x, y, z)=C$ 称为是三元函数 $u=f(x, y, z)$ 的等量面。在这个曲面的每一点处函数取常数值 $u=C$。

1782．把正四棱锥的体积 V 表示为它的高 x 与侧棱 y 的函数。

解 正四棱锥的底面边长为 $a=\sqrt{2}\cdot\sqrt{y^2-x^2}$，所以

$$V=\frac{1}{3}a^2x=\frac{1}{3}\cdot 2(y^2-x^2)x=\frac{2}{3}(y^2-x^2)x.$$

1783．把正六棱台的侧面积 S 表示为其上下底边长 x，y 与高 z 的函数。

解 正六棱台的侧面为六个全等的等腰梯形，其高为

$$h=\sqrt{z^2+\frac{3}{4}(y-x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+3(y-x)^2}$$

故 $$S=6\cdot\frac{1}{2}(x+y)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+3(y-x)^2}$$

$$=\frac{3}{2}(x+y)\sqrt{4z^2+3(y-x)^2}.$$

1784．如果 $f(x, y)=xy+\frac{x}{y}$，求 $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)$，

$f(1, -1)$。

解 $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$$f(1, -1)=1\cdot(-1)+\frac{1}{-1}=-2$$

1785．如果$f(x, y)=\frac{x^2-y^2}{2xy}$，求$f(y, x)$，$f(-x, -y)$，$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$，$\frac{1}{f(x, y)}$。

解 $f(y, x)=\frac{y^2-x^2}{2xy}$；

$$f(-x, -y)=\frac{(-x)^2-(-y)^2}{2(-x)\cdot(-y)}=\frac{x^2-y^2}{2xy}；$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{y}\right)^2}{2\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{y^2-x^2}{2xy}；$$

$$\frac{1}{f(x, y)}=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

1786．求函数$f(x, y)=1+x-y$在抛物线$y=x^2$上的点所取的值，并作出函数$F(x)=f(x, x^2)$的图形。

解 $f(x, x^2)=1+x-x^2$

$$F(x)=f(x, x^2)=1+x-x^2$$

$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4},$$

所以$F(x)$的图形是以$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$为顶点，开口向下的抛物线（图6·2）。

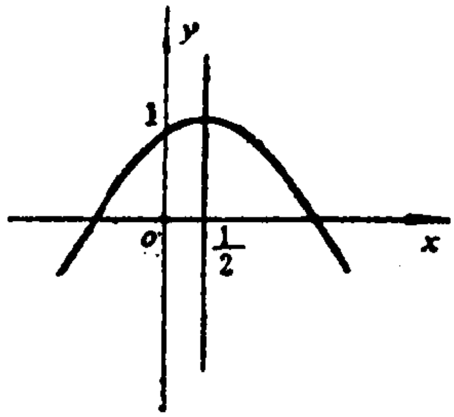

图 6·2

1787．求函数

$$z=\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}$$

在圆周$x^2+y^2=R^2$上的点的值。

解 $$z=\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}=\frac{(x^2+y^2)^2}{1-(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{R^4}{1-R^2}.$$

1788．如果$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$（$x>0$，$y>0$），试确定$f(x)$。

解 $$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1},$$

即 $$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\quad(x>0).$$

1789．如果$f(x+y,\ x-y)=xy+y^2$，求$f(x,\ y)$。

解 令$u=x+y$，$v=x-y$，则

$$x=\frac{1}{2}(u+v),\quad y=\frac{1}{2}(u-v),$$

$$f(u,v)=\frac{1}{2}(u+v)\cdot\frac{1}{2}(u-v)+\frac{1}{4}(u-v)^2$$

$$=\frac{1}{2}(u^2-uv),$$

即 $$f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-xy).$$

1790. 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$. 如果当 $y=1$ 时 $z=x$，试确定函数 f 和 z.

解 因为当 $y=1$ 时 $z=x$，所以

$$x=1+f(\sqrt{x}-1),$$

$$f(\sqrt{x}-1)=(\sqrt{x})^2-1$$
$$=(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}-1+2),$$

即 $$f(x)=x(x+2)=x^2+2x.$$

又因为 $$f(\sqrt{x}-1)=x-1,$$

所以 $$z=x-1+\sqrt{y}.$$

1791. 设 $z=x\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$. 如果当 $x=1$ 时 $z=\sqrt{1+y^2}$，试确定函数 f 和 z.

解 因为当 $x=1$ 时 $z=\sqrt{1+y^2}$，所以

$$\sqrt{1+y^2}=f(y),$$

即 $$f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

故 $$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)=x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=x\cdot\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$$

$$=\frac{x}{|x|}\cdot\sqrt{x^2+y^2}.$$

1792. 求出并描述下列函数的存在域：

1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$； 2) $z=1+\sqrt{-(x-y)^2}$；

3) $z=\ln(x+y)$； 4) $z=x+\arccos y$；

5) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$；

6) $z=\arcsin\frac{y}{x}$；

7) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$；

8) $z=\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}$ $(a>0)$；

9) $z=\sqrt{y\cdot\sin x}$； 10) $z=\ln(x^2+y)$；

11) $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+x^2y^2}$； 12) $z=\frac{1}{x^2+y^2}$；

13) $z=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$； 14) $z=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y}$；

15) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

解 1) 函数的存在域为满足不等式

$$x^2+y^2\leqslant 1$$

的点集.

2) 函数的存在域为满足等式

$$x-y=0$$

的点集.

3) 函数的存在域为满足不等式

$$x+y>0$$

的点集.

4）函数的存在域为满足不等式

$$-1\leqslant y\leqslant 1$$

的点集。

5）函数的存在域为满足不等式

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ -1\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

的点集。

6）函数的存在域为满足不等式

$$-1\leqslant\frac{y}{x}\leqslant 1$$

的点集。

7）函数的存在域为满足不等式

$$\begin{cases}|x|\geqslant 2,\\ |y|\leqslant 2\end{cases}$$

的点集。

8）函数的存在域为满足不等式

$$(x^2+y^2-a^2)\cdot(2a^2-x^2-y^2)\geqslant 0;$$

即满足不等式组

$$\begin{cases}x^2+y^2\geqslant a^2,\\ x^2+y^2\leqslant 2a^2\end{cases}$$

的点集。

9）函数的存在域为满足不等式 $y\cdot\sin x\geqslant 0$，即满足

$$\begin{cases}y\geqslant 0,\\ 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots);\end{cases}$$

与 $\begin{cases} y\leqslant 0, \\ (2k+1)\pi\leqslant x\leqslant(2k+2)\pi \ (k=0,\ \pm 1, \pm 2, \cdots). \end{cases}$

的点集。

10）函数的存在域为满足不等式

$$x^2+y>0$$

的点集。

11）函数的存在域为整个xoy平面。

12）函数的存在域为除去原点的整个xoy平面。

13）函数的存在域为满足不等式

$$\begin{cases} y-\sqrt{x}>0, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$$

的点集。

14）函数的存在域为满足条件

$$\begin{cases} x\neq y, \\ y\neq 0 \end{cases}$$

的点集。

15）函数的存在域为满足不等式

$\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$,

即 $2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$

的点集。

1793．求下列三元函数的存在域：

1）$u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$；

2）$u=\ln(xyz)$；

3）$u=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$；

4）$u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

解　1）函数 u 的存在域为满足不等式

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$$

的点集。

2）函数 u 的存在域为满足不等式

$$xyz>0$$

的点集。

3）函数 u 的存在域为满足不等式

$$|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1,\ |z|\leqslant 1$$

的点集。

4）函数 u 的存在域为满足不等式

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$$

的点集。

1794. 作出已知函数的等量线，并说明表示这些函数的曲面特征：

1）$z=x+y$；　　2）$z=x^2+y^2$；

3）$z=x^2-y^2$；　　4）$z=\sqrt{xy}$；

5）$z=(1+x+y)^2$；　　6）$z=1-|x|-|y|$；

7）$z=\dfrac{y}{x^2}$；　　8）$z=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$；

9）$z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

解　1）等量线是平行于直线 $x+y=0$ 的直线族。函数 z 所表示的曲面是通过坐标原点的平面。

2）等量线是圆心在坐标原点的一族同心圆

$$x^2+y^2=c.$$

函数 z 所表示的曲面是以 z 轴为旋转轴的旋转抛物面。

3）等量线是一族等轴双曲线族

$$x^2-y^2=c.$$

函数 z 所表示的曲面是双曲抛物面.

4）等量线是以直线 $x-y=0$ 与 $x+y=0$ 为对称轴的等轴双曲线族

$$\sqrt{xy}=c_1,\ 即\ xy=c\ (c\geqslant 0).$$

作坐标旋转变换

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \\ z=z' \end{cases}$$

得曲面的标准方程

$$z'^2=\frac{1}{2}(x'^2-y'^2)$$

所以函数 z 所表示的曲面为二次锥面.

5）等量线是直线族

$$x+y=c.$$

函数 z 所表示的曲面是母线平行于直线 $x+y+1=0$ 的抛物柱面.

6）等量线为正方形的周界

$$|x|+|y|=c.$$

函数 z 所表示的曲面是四棱锥的侧面.

7）等量线是抛物线族

$$y=cx^2.$$

8）等量线是抛物线族

$$y=c\sqrt{x}.$$

9）等量线是一族圆心在 x 轴上且通过原点的圆

$$c(x^2+y^2)=2x.$$

1795．求下列函数的等量线：

1）$z=\ln(x^2+y)$；　　2）$z=\arcsin xy$；

3）$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$；　4）$z=f(y-ax)$；

5）$z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解　1）等量线为抛物线族

$$y=c-x^2\ (c>0).$$

2）等量线为双曲线族

$$xy=c\ (c\leqslant 1).$$

3）等量线为圆心在原点的一族同心圆

$$x^2+y^2=c^2.$$

4）等量线为一族平行直线

$$y=ax+c.$$

5）等量线为通过坐标原点的直线束

$$y=cx\ (x\neq 0).$$

1796．求三元函数的等量面：

1）$u=x+y+z$；　　2）$u=x^2+y^2+z^2$；

3）$u=x^2+y^2-z^2$.

解　1）等量面是平行于平面 $x+y+z=0$ 的平面族

$$x+y+z=c.$$

2）等量面是球心在坐标原点的一族同心球面

$$x^2+y^2+z^2=c.$$

3）等量面是