几何讲义

第二学期

线性代数和微分几何

[苏]M. M. ПОСТНИКОВ
陈维桓　石生明　译

高等教育出版社

几 何 讲 义

第二学期

线性代数和微分几何

作者：[苏]М. М. ПОСТНИКОВ
译者：陈维桓　石生明

高等教育出版社

(京)112号

几 何 讲 义

第二学期

线性代数和微分几何

作者：[苏]М. М. ПОСТНИКОВ

译者：陈维桓　石生明

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 9.25　字数 220 000

1992 年 5 月第 1 版　1992 年 5 月第 1 次印刷

印数0001—2 160

ISBN7-04-002754-2/O·873

定价 5.70 元

中译本说明

苏联国立莫斯科大学数学力学系(M. M. ПОСТНИКОВ)教授的这一套几何学讲义反映了近年来苏联综合大学数学系在几何学的教学改革中所作的努力和进步. 从讲义的内容来看，作者试图使教材能反映当代数学的成就和趋势，比如，在讲义的第二学期部分作者强调了线性代数的几何侧面，也就是把线性代数作为处理高维空间的几何的得力工具；比较早地引进外代数概念，讲授张量代数；在第一学年末尾介绍曲线、曲面的微分几何的初步理论等等都反映了这一点. 根据作者的计划，第二学年的几何教学应是流形上的几何学，这就比较早地把一些近代的数学概念和数学语言介绍给学生. 因此我们相信，这套讲义的中译本的出版对国内综合大学数学系的几何教学会起到借鉴和促进的作用.

本书是几何学讲义的第二学期部分，根据英译本：

"M. Postnikov, Lectures in Geometry, Semester II, Linear Algebra and Differential Geometry, Mir Publishers, Moscow, 1982"译出的. 第一讲至第十五讲由陈维桓同志翻译，第十六讲至第二十七讲由石生明同志翻译. 原书中有不少印刷错误和其它错误，在译成中文时一一作了改正(见书中的注解). 即使如此，在中译本中还可能有错误，希望读者能不吝指正.

译者　谨志

1988.1.

序　言

本书是作者的前一本书*的续篇，同样是作者在以罗蒙诺索夫命名的国立莫斯科大学数学力学系为数学专业学生上一年级(《线性代数和解析几何》)第二学期课程的讲稿几乎忠实的记录．在取材及讲授的先后次序方面，作者所循的原则自然是和第一学期的考虑是一样的(参看［1］的序言)．本书中所包括的讲义篇数取决于下述原因：尽管教学大纲为这个课程安排了三十二讲，但是事实上讲授超过二十七讲是不可能的．

线性代数和解析几何课程仅仅是统一的两年几何课程的一个组成部分；本书的取材及所强调的重点表明，第二年的几何课程将是流形的微分几何学．特别是，把第三学期的预备知识(三维空间中曲线和曲面的微分几何学)移到第二学期来讲授被证明是可行的(虽然在教学大纲中并未作这种安排)；这样做的结果对于第三学期的课程的教学实在是非常有益的(不仅对教员是如此，更重要的是对学生更是如此)．同时，经验表明这部分内容已经引起念第二学期的学生的兴趣；而且，总的说来，他们学得也很好．

М. М. Постников

1977.10.27

---

* 该书是 М. М. Постников, Лекции по Геометрии: Семестр 1. Аналитическая геометрия, Москва, «Наука», 1979(中译本：М. М. Постников 著，周友成译，几何学讲义 I，解析几何学．北京，高等教育出版社出版．在下文引用时，该书称为［1］)．

目　　录

第一讲

向量空间．子空间．子空间的交．线性生成的子空间．子空间的和．子空间的维数．子空间之和的维数．线性生成子空间的维数．

这一学期我们要把上学期得到的结果移到任意 n 维的情形．我们将大体上遵循以前所陈述的计划．

我们知道(参看[1]的第一讲，定义 1)，所谓域$\mathbf{K}$上的向量空间(或线性空间)是指其元素称为向量的一个集合$\mathscr{V}$，在其中规定了加法运算 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\longmapsto\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$，以及与任意的数 $k\in\mathbf{K}$的乘法 $\boldsymbol{x}\longmapsto k\boldsymbol{x}$．并且要求$\mathscr{V}$在加法运算下成为 *Abel* 群，而关于与$\mathbf{K}$中的数的乘法满足四条自然的公理．

在这样的空间中，向量的线性组合、线性相关向量组及线性无关向量组等概念都是有意义的．空间$\mathscr{V}$称为是有限维的，如果在其中存在一个有限的基底，也就是存在一组有限多个向量，使得$\mathscr{V}$中任意一个向量都能用它们唯一地线性表示．各个基底中的向量的个数都是相同的．这个数称为向量空间$\mathscr{V}$的维数，记作 $\dim\mathscr{V}$．

假定$\mathscr{V}$是任意的有限维向量空间．

定义 1 设$\mathscr{P}$是空间$\mathscr{V}$的一个子集．如果对于任意一组向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m\in\mathscr{P}$，它们的每一个线性组合 $k_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m$都属于$\mathscr{P}$，则称$\mathscr{P}$为$\mathscr{V}$的子空间．

显然，当且仅当对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{P}$及任意的 $k\in\mathbf{K}$都有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathscr{P}$和 $k\boldsymbol{x}\in\mathscr{P}$时，$\mathscr{P}$是子空间．

换句话说，$\mathscr{P}$是子空间意味着对于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{P}$，$k\in\mathbf{K}$，对应 $\boldsymbol{x}$，

$y \longmapsto x+y$，$x \longmapsto kx$ 分别在$\mathscr{D}$中定义了加法和数乘法运算. 很明显，在这两种运算下，子空间$\mathscr{D}$是一个向量空间. □

子空间的例

1. 在任意的向量空间$\mathscr{V}$中，由单个元素 $\mathbf{0}$ 构成的子集$\{\mathbf{0}\}$和$\mathscr{V}$本身都是子空间. 子空间$\{\mathbf{0}\}$(通常简记为 $\mathbf{0}$)称为零空间，子空间$\mathscr{V}$称为平凡子空间.

2. 设$m \leqslant n$. 在向量空间$\mathbf{K}^n$中让后 $n-m$ 个坐标等于 0 的向量$(x^1, \cdots, x^m, 0, \cdots, 0)$的全体构成一个子空间. 这个子空间自然地同构于$\mathbf{K}^m$.

3. 在多项式构成的向量空间中(或更一般地，在满足一定条件的任何函数所构成的向量空间中)，在一个或几个固定点取零值的多项式(或函数)的集合是一个子空间.

4. 在某几个指定次数的项的系数为零的全体多项式的集合，以及所有偶次多项式的集合，所有奇次多项式的集合，都是子空间.

命题 1 任意一族子空间 $\mathscr{D}_\alpha \subset \mathscr{V}$ 的交

$$\mathscr{D} = \bigcap_\alpha \mathscr{D}_\alpha$$

是一个子空间.

证明 若 $x, y \in \mathscr{D}$，则对任意的 α 都有 x，$y \in \mathscr{D}_\alpha$，因此 $x+y \in \mathscr{D}_\alpha$，$kx \in \mathscr{D}_\alpha$. 由于 α 的任意性，故有 $x+y \in \mathscr{D}$，$kx \in \mathscr{D}$. □

因为每一个子空间都包含向量 $\mathbf{0}$，故子空间的交不会是空集.

若$\mathscr{D} \cap \mathscr{Q} = \mathbf{0}$，则称子空间$\mathscr{D}$和$\mathscr{Q}$是不相交的.

虽然命题 1 是十分简单的，但是它蕴含着重要的结论.

设 S 是向量空间$\mathscr{V}$的任意一个子集.

定义 2 子空间 $\mathscr{D} \subset \mathscr{V}$ 称为由集合 S (线性)生成的子空间，如果 $S \subset \mathscr{D}$，并且$\mathscr{D}$是包含 S 的最小子空间. 后一个条件的意思

是：如果$\mathscr{Q}$是包含集合 S 的子空间，则$\mathscr{Q}$必包含$\mathscr{P}$. 由集合 S 生成的子空间记作$[S]$，也称为由集合 S 张成的子空间.

命题 2 任意一个集合 $S\subset\mathscr{V}$ 必有由它所生成的子空间$[S]$，它恰是包含 S 的所有子空间的交.

证明 根据命题 1，包含 S 的所有子空间的交是一个子空间，而且包含 S. 另外，如果 $\mathscr{Q}$是包含 S 的子空间，则根据定义$\mathscr{Q}$必包含前面所说的交集. □

在此有一个与证明有关的疑问：我们是否有资格笼统地讲包含 S 的子空间的交集？严格地说，这样的子空间为什么确实是存在的？正式的答案是：根据集合论的一般原理，任意一个集合$\mathscr{V}$的一族子集的交有完全确定的意义，即使该族本身是空的情形也是如此. 对于后一种情形，交集是整个的$\mathscr{V}$（当然，看起来这似乎是不可思议的）. 但是我们所面临的情形是简单的，因为所论的子空间族不会是空的. 事实上，全空间$\mathscr{V}$显然是包含 S 的一个子空间.

下面的命题给出了由 S 所生成的子空间$[S]$的更为直观的描述.

命题 3 集合 S 所生成的子空间$[S]$是由 S 中的向量的所有可能的线性组合

$$k_1x_1+\cdots+k_mx_m,\qquad x_1,\cdots,x_m\in S,\ k_1,\cdots,k_m\in\mathbf{K} \tag{1}$$

组成的.

证明 若$\mathscr{P}$是包含 S 的子空间，则它必包含所有形如(1)的向量. 另一方面，全体形如(1)的向量的集合显然是一个包含 S 的子空间. □

从上述命题得到：空间$\mathscr{V}$的一组向量是完备的，当且仅当它们张成了整个空间$\mathscr{V}$. □

前面讲过（[1]中的第 12 讲），两组向量称作是线性等价的，如

果其中任意一个向量组的每一个成员都能用另一组的向量线性表示. 显然，这等价于说：一个向量是其中一组向量的线性组合当且仅当它是另一组向量的线性组合. 根据命题 3，该条件也等价于这两组向量所生成的子空间是相同的（即这两组向量分别张成同一个子空间）.

与子空间交集的情形不同，子空间的并集一般地不是子空间. 为得到子空间只需要把并集转变成它所生成的子空间.

定义 3 任意一族子空间$\mathscr{P}_\alpha\subset\mathscr{V}$之和$\sum\limits_\alpha\mathscr{P}_\alpha$是指它们的并集所生成的子空间

$$\sum_\alpha\mathscr{P}_\alpha=\left[\bigcup_\alpha\mathscr{P}_\alpha\right].$$

对于两个子空间$\mathscr{P}$和$\mathscr{Q}$，

$$\mathscr{P}+\mathscr{Q}=[\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}].$$

很明显，集合$\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$中向量的任意一个线性组合都可以表示成$x+y$，其中$x\in\mathscr{P}$，$y\in\mathscr{Q}$. 这就证明了下面的命题：

命题 4 子空间$\mathscr{P}$和$\mathscr{Q}$之和$\mathscr{P}+\mathscr{Q}$是由所有形如$x+y$($x\in\mathscr{P}$，$y\in\mathscr{Q}$)的向量组成的. □

对于任意一族子空间之和，类似的命题自然也成立.

至今尚未用到向量空间$\mathscr{V}$的维数有限的假定. 在我们下面所考虑的问题中，维数有限的假定将起到实质性作用. 设$n=\dim\mathscr{V}$.

这里，需要下面简单的引理：(*)

引理 1 如果对线性空间$\mathscr{V}$，存在数N，使空间中任何N个向量是线性相关的，那么空间$\mathscr{V}$是有限维的，并且

$$\dim\mathscr{V}<N.$$

（*）命题 5 的证明，本书的 1985 年版与1979年版略有不同. 这里是按照1985年版译出的. ——译者注.

证明 当$\mathscr{V}=0$时，显然成立．如果$\mathscr{V}\neq 0$，那么在$\mathscr{V}$中存在线性无关的向量组，并且按照条件，每一个这样的线性无关向量组包含不多于N个向量．所以存在由最大个数的向量组成的线性无关向量组．因为这样的向量组中增加任何向量都使它成为线性相关组，因此这样的向量组是完备的(是基底)．于是，在线性空间$\mathscr{V}$中存在有限的完备向量组，即这个空间是有限维的，从而不等式$\dim\mathscr{V}<N$是显然的．□

命题5 对于有限维空间$\mathscr{V}$的任意子空间$\mathscr{P}\subset\mathscr{V}$，其维数$\dim\mathscr{P}$适合不等式

$$\dim\mathscr{P}\leqslant n.$$

证明 设$\dim\mathscr{V}=n$．这时空间$\mathscr{V}$的任何$n+1$个向量是线性相关的．特别，子空间$\mathscr{P}$的任何$n+1$个向量也是线性相关的．于是线性空间$\mathscr{P}$满足引理1的条件($N=n+1$)，即它是有限维的，并且它的维数满足不等式$\dim\mathscr{P}<n+1$．为完成证明，只需指出：在$N=n+1$(和$n=\dim\mathscr{V}$)时，不等式$\dim\mathscr{P}<n+1$即为$\dim\mathscr{P}\leqslant n$．□

如果$\dim\mathscr{P}=n$，那么$\mathscr{P}$中的任何基底是由n个向量组成的线性独立组，它也是$\mathscr{V}$中的基底．所以$\mathscr{P}=\mathscr{V}$．如果$\dim\mathscr{P}<n$，那么$\mathscr{P}$中的基底少于n个向量，不可能是$\mathscr{V}$中的完备组，即不能张成$\mathscr{V}$．所以$\mathscr{P}\neq\mathscr{V}$．于是，子空间$\mathscr{P}\subset\mathscr{V}$与$\mathscr{V}$本身重合的充分必要条件是

$$\dim\mathscr{P}=\dim\mathscr{V}.$$

定理1(子空间之和的维数) 对于任意两个子空间$\mathscr{P}$和$\mathscr{Q}$，下列公式成立：

$$\dim(\mathscr{P}+\mathscr{Q})=\dim\mathscr{P}+\dim\mathscr{Q}-\dim(\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}).$$

证明 设

$$\dim\mathscr{P}=p,\dim\mathscr{Q}=q,\dim(\mathscr{P}\cap\mathscr{Q})=r.$$

考虑$\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}$中的任意一个基底 $e_1,\cdots,e_r$. 逐个添加$\mathscr{P}$的向量到这个基底中去，最后得到子空间 $\mathscr{P}\supset\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}$的基底

(2) $$e_1,\cdots,e_r,f_1,\cdots,f_{p-r}.$$

同理，在子空间$\mathscr{Q}$中可以构作如下的基底：

(3) $$e_1,\cdots,e_r,g_1,\cdots,g_{q-r}.$$

如果我们能够证明这 $p+q-r$ 个向量

(4) $$e_1,\cdots,e_r,f_1,\cdots,f_{p-r},g_1,\cdots,g_{q-r}$$

构成子空间$\mathscr{P}+\mathscr{Q}$的基底，则定理 1 得证.

先证**线性无关性**. 设

$$k_1e_1+\cdots+k_re_r+l_1f_1+\cdots+l_{p-r}f_{p-r}+m_1g_1+\cdots+m_{q-r}g_{q-r}=0.$$

命

$$e=k_1e_1+\cdots+k_re_r,$$
$$f=l_1f_1+\cdots+l_{p-r}f_{p-r},$$
$$g=m_1g_1+\cdots+m_{q-r}g_{q-r},$$

则 $e\in\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}, f\in\mathscr{P}, g\in\mathscr{Q}$，并且 $e+f+g=0$. 因为 $e+f\in\mathscr{P}$，故 $g=-(e+f)\in\mathscr{P}$，即 $g\in\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}$. 于是向量 g 能用向量 $e_1,\cdots,e_r$ 线性表示. 然而由定义可知，g 是 $g_1,\cdots,g_{q-r}$(*)的线性组合，并且同一个向量关于基底(3)不能有两个不同的表示式，因此这两个表示式的系数必须为零. 这样，$m_1=0,\cdots,m_{q-r}=0$，即 $g=0$.

由此可见 $e+f=0$. 又因为(2)是基底，故 $k_1=0,\cdots,k_r=0$, $l_1=0,\cdots,l_{p-r}=0$. 这就证明了向量组(4)是线性无关的.

再证**完备性**. 我们知道$\mathscr{P}+\mathscr{Q}$中的向量具有 $x+y$ 的形式，其中 $x\in\mathscr{P}, y\in\mathscr{Q}$. 把向量 x 关于基底(2)的展开式与向量 y 关于基底(3)的展开式相加，得到向量 $x+y$ 作为向量组(4)的线性组

(*) 原文误为 g_{p-r}.

合的表示式．因此子空间$\mathscr{P}+\mathscr{Q}$的向量组(4)是完备的．

由于向量组(4)是$\mathscr{P}+\mathscr{Q}$中的线性无关完备组，故它是子空间$\mathscr{P}+\mathscr{Q}$的基底．□

推论 1 若$\mathscr{P}+\mathscr{Q}=\mathscr{V}$，则 $\dim(\mathscr{P}\cap\mathscr{Q})=p+q-n$.

推论 2 若 $p+q>n$，则$\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}\neq 0$.

如何计算子空间的维数？这个问题的答案自然与给出子空间的方式有关．因此每当我们讲到给定子空间的新方式时，我们都要回头来考虑这个问题．现在我们实际上所知的有效地表达子空间的一种方式是把它们表成某个有限向量组生成的子空间．因此，前面的一般性问题可以具体地化为：计算任意一个(有限的)向量组 S 生成的子空间$[S]$的维数 $\dim[S]$．现在我们就这个问题进行讨论．

设 S 是任意一个有限的向量组．不失一般性，可以假定它含有非零向量，因此它具有线性无关子组．由于在 S 中只有有限多个向量，在它的所有线性无关子组之中必有一个*极大线性无关子组*．所谓极大性是指：在该子组中添加进属于 S 的任意一个向量便会使这组向量成为线性相关组．这只有在添加进去的向量可以用这个线性无关子组的向量线性表示时才是可能的，于是得到：*向量组 S 的极大线性无关子组 S_0 与 S 本身线性等价*，即它们张成同一个子空间$[S]$．这就是说，集合 S_0在$[S]$中是完备的，此外 S_0 是线性无关的，因此将它任意编号之后便成为$[S]$的一个基底．所以*集合 S 的每一个极大线性无关子组是由 S 生成的子空间$[S]$的一个基底*．

因为向量空间的各个基底所含向量的个数是相同的，故*集合 S 的各个极大线性无关子组是由相同个数的向量组成的*．

定义 4 向量组 S 的极大线性无关子组中的向量的个数称为 S 的*秩*．

根据刚刚谈到的讨论，上述定义是合理的．此外，下列命题成立：

命题 6 向量组 S 所生成的子空间的维数 $\dim[S]$ 等于 S 的秩．

表面上看来，上面的命题似乎是无聊的同义反覆．实际上，它有十分深刻的内涵，因为它把我们所感兴趣的数 $\dim[S]$ 与某个确定的数(秩)等同起来了，而后者至少在原则上可以通过事先能估计的有限多步骤计算出来，这称为是*有效地可计算的*，事实上，为了计算秩，我们逐个考虑 S 的所有的子组（总共只有有限多个子组），然后对每一个子组是否是线性无关的作出判断(这也只需要有限多次运算)．因此，命题 6 的意义在于，它在事实上已指示了计算子空间维数的有限过程(我们再强调一次，这时子空间是作为有限向量组生成的子空间而给定的，其中“有限”的条件对于有效可计算性是必需的)．

自然，合理地安排计算的步骤可以大大地减少所需要的计算量．在下一讲我们将要给出一个适当的计算过程．