耗散守恒格式理论

李松波 著

高等教育出版社

耗散守恒格式理论

李 松 波 著

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

耗散守恒格式理论／李松波著．－北京:高等教育出版社,1997

ISBN 7-04-005871-5

Ⅰ.耗…　Ⅱ.李…　Ⅲ.耗散函数　Ⅳ.0414.2

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第19647号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街55号

邮政编码:100009　传真:64014048　电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092　1／16　印张 14.5　字数 350 000

1997年4月第1版　1997年4月第1次印刷

印数 0001—858

定价 20.00元

序

拟线性双曲型方程组的差分数字求解，由于有非光滑非连续解的存在、弱解的非唯一性等特点，成为计算数学理论上的一大难题. 在 50 年代，Oleinik O. A. 对于标量方程物理解提出了熵条件，Lax P. D. 提出了双曲型守恒律方程组的广义解理论. 在差分格式方面 Godunov S. K. 提出了单调格式概念和 Godunov 一阶格式. 在 60 年代 Lax 和 Wendroff 提出了 L—W 二阶格式，此后还有 MaCCormack 的二步格式等. 一阶格式由于格式粘性大，一方面是激波分辨率不高，另一方面它不宜用于求解完整的粘性 Navier-Stokes 方程，因而我们需要二阶以上的格式，但是实际计算表明用二阶格式会出现激波振荡、非线性不稳定和非物理解现象.

李松波教授从 70 年代开始就注意到这些问题，特别是近 15 年内他孜孜不倦地从事双曲型方程组守恒格式和 Euler 方程间断解捕捉技术的研究. 这本专著就是他十几年工作的结晶，它系统地论述了作者独创的拟线性双曲型守恒律方程组间断解计算的"耗散守恒格式理论"，作者和他的助手们不仅精心发展了理论体系，并且理论和实际相结合，积累了丰富的计算经验.

在理论上，本书克服了线化稳定性分析的局限性，提出了守恒格式的等价格式概念，推广了古典的一维特征理论和 Lax 定义的 Riemann 不变量，建立了广义特征理论，更重要的是说明计算发生各种异常现象最重要的原因是守恒格式发生负耗散或退化为零耗散的恒等算子，从耗散理论出发导出两类耗散守恒格式及其一致二阶格式，最后提出了几个供考核计算格式用的严格的标准算例.

本专著是作者长期研究的成果，它深入浅出，可读性高，是计算空气动力学和计算数学工作者很好的参考书.

本书讨论了初值问题，未涉及初边值问题. 尽管初边值问题更有实用价值，但从计算数学的理论来看初值问题本身已是一个很难的问题. 作为一个实际的应用工作者来讲，在边界问题处理上可以参照作者提出的思想独立进行思考，在这个意义上来说本书是一个总结，但不是到此为止. 计算流体力学的发展需要一个很好的计算数学理论基础. 对于现在广泛使用的用于可压缩性湍流的高分辨率激波和旋涡的各种高阶格式，更需要认真地加以研究，使数值计算能精确模拟物理流动. 这是一个更具有挑战性的课题. 我相信李松波同志这本书的出版，将会进一步促进当代计算理论的发展.

庄逢甘

1994 年 9 月

目　录

引　言

自从 Lax P. D. 在 50 年代提出守恒律方程组弱解定义与 Lax 一阶守恒格式以来，以双曲型方程组间断解的捕捉计算为主要研究对象的守恒格式理论研究，已有 40 多年的历史. 守恒格式理论研究的重要性不仅在于它是 50 年代产生的一个崭新的数学分支，更重要的是由于它的发展对于国防和航空、航天事业有其特殊重要性，并且在国民经济建设中也有十分广泛的应用前景，一直是计算数学中最活跃的分支之一，吸引着众多的数学和力学工作者致力于它的研究工作.

许多杰出的数学家为了创立一维守恒律弱解理论和守恒格式理论，作出了卓有成效的开创性工作. 有些工作对当前的守恒格式研究仍有着重要的指导意义和参考价值. 最具有代表性的工作有 Oleinik O. A. 对于标量方程广义解（又叫物理解）提出的熵条件和 Lax P. D. 提出的双曲型守恒律方程组的广义解理论. Lax 在其理论中，把一维 Euler 方程的 Riemann 不变量推广到一般的守恒方程组，用它给出了第 k 类单波（Simple wave）的科学定义. 同时，还将 Rankine－Hugoniot 关系式推广，利用它给出了第 k 类接触间断（Contact diescontinuity）和激波（Shock wave）的科学定义和激波的特征熵条件. Lax 还证明了第 k 类接触间断、激波和单波的右侧（或右边界）的 U_+ 均可表示为左侧（或左边界）U_- 的单参数集. 利用这一重要结论，他证明了 Riemann 间断初值问题的解的局部存在和唯一性. 在差分格式研究方面，Godunov S. K. 提出了单调格式概念，并提出了著名的 Godunov 一阶格式，对于常系数双曲型方程，证明了：单调格式一定是一阶格式. 但是，在 50 年代，守恒格式在流体力学中的应用仅限于一维流动（包括球对称问题），它通常是从方程组 Lagrange 方程组出发的.

60 年代初期，守恒格式研究取得了实质性的突破，它实现了从 Lagrange 方程到 Euler 方程的转变，另一方面，在应用上实现了从一维到多维问题的转变. 首先，Lax 和 Wendroff B.（1960）提出了著名的 L－W 二阶格式，开创了守恒格式的新阶段. 随后，L－W（Richtmyer）二步格式，MacCormack 二步格式和其它的一些高阶格式也相继出现. 这些格式不仅适用于一维 Euler 方程和 Lagrange 方程，并且对于 Euler 方程，它们可以很方便地推广到多维问题. 另一方面的重大突破，是前苏联学派提出的用时间相关的守恒格式求解 Euler 方程的定常解的方法（又叫做稳定法），其早期的代表性工作之一是 Godunov 等人（1961）用稳定法计算球的绕流问题获得成功，它意味着 50 年代发展起来的求解脱体绕流流场的各种不适定的方法（积分关系法、直线法和美国学者提出的各种反解法）将被差分法取代. 每秒百万次计算机的出现，为 Euler 方程的数值求解提供了更有效的工具，Bohachevsky I. O.（1966）和 Moretti G.（1967）等人分别发表了用捕捉法与装配法求解有攻角的钝头体绕流流场的计算结果. 特别是 Moretti 等人采用激波装配法，用 L－W 二阶格式，在 CDC6600 上仅用 6 分钟的计算时间，即可获得一组绕球锥物体的有攻角的头部绕流的计算结果，引起美国空气动力学家们的极大兴趣，有力地推动了当时的计算空气动力学的发展.

60 年代以来的航空、航天飞行器的气动力计算的大量数值实验表明，采用五六十年代提出的守恒格式求解 Euler 方程间断解时，尚缺乏普遍适用性，其原因是在计算过程中，可能发生各种异常现象，其中有的是人们事先无法预料的. 从目前的观点看，这些异常现象概括起来有如下几个方面：

1. 激波振荡. 采用 Lax 一阶格式或 Godunov 一阶格式计算时，由于截断误差大，空间步长必须取的很小（它将引起舍入误差的积累增大），另一方面，由于它的人工粘性大，间断面的分辨度低（尤其是 Lax 格式），加上 Godunov 格式在每一个时间步要逐点求解 Riemann 问题，很费计算时间，这就迫使人们采用高阶格式计算. 但是，由于高阶格式不保持解的单调性，在激波附近解会发生剧烈振荡，出现负的压力，其结果导致音速 c 是负数开方，使计算过程中断.（注意，当压力 $p<0$ 时，系数矩阵 A 则有 2 个复特征值，Euler 方程已经不是双曲型了！）

2. 非线性不稳定. 早在 60 年代中期，Lax P. D. 在私人通信中就透露，常系数的耗散格式，在某些非线性问题计算中，由于系数矩阵 A 的某个特征值退化为零，可能发生非线性不稳定. Lax P. D. 的预见后来被我们的计算所证实，Taylor T. D. (1977) 也证实了这一点. 我们还发现(1979)，在定常激波附近，如果差分格式是负耗散的，则会发生强不稳定，L－W 二步格式就是一例.

3. 非物理解现象. MacCormack R. W. (1974) 首次给出用 MacCormack 格式得到的非物理解. Harten A.，Hyman J. M. 和 Lax P. D. (1976) 给出用 L－W 二阶格式得到的非物理解. 周毓麟、李德元、龚静芳(1979)对某些高阶格式进行了大量的数值实验，得到如下重要结论：某些高阶格式不仅会得到非物理解，并且随 Courant 数 C_N 的变化，其非物理解在某种程度上是随机的. 李松波、张广文(1979)得到另一个重要结论：任何一个可以表示为

$$U_j^{n+1}=U_j^n+\sum \alpha_{k,j+k+1/2}\,\Delta F_{j+k}^n$$

的差分格式，若 α 有界，无论它是一阶或是高阶格式，对于满足定常 Rankine－Hugoniot 关系式但不满足熵条件的稀疏波，一定会得到定常稀疏激波的非物理解.

为了克服上述异常现象，大约在 70 年代中期，守恒格式研究进入了一个新阶段，即高分辨度守恒格式研究阶段. 在这个阶段中，最有影响的工作之一，是 Harten A.，Hyman J. M. 和 Lax P. D. (1976) 的著名论文，他们认为产生非物理解现象的主要原因是高阶格式的不保单调性. 随后，Harten A. (1978) 又进一步认为，由于高阶格式的不保单调性引起激波振荡，可能导致发生非线性不稳定，引起非物理解现象，因此他提出了高阶保单调格式的概念. 在 70 年，具有代表性的守恒格式研究工作有 Van Leer 的二阶 Godunov 格式、Harten A. 的自动调节的混合格式与人工压缩算法、Boris J. P. 和 Book D. L. 的 FCT(Flux－Corrected Transport)技术. 在 80 年代，Harten A. (1983) 又提出了 TVD(Total Variation Diminition)格式，后来(Harten 等人)又进一步提出了 ENO(Essentially Nonoscillatory)格式(1986)，在近十年中，各种 TVD 格式纷纷问世，并且已被许多应用工作者用于各种实际问题的计算.

从 70 年代末(1978)开始，我们系统地研究了上述异常现象产生的原因和克服办法，以便从中找到普遍适用的、保证在各种条件下都能稳定地得到比较精确的物理解的守恒格式. 通过对守恒格式得到的理论的和大量的计算实例考察，我们得到一个重要结论：对于凸的 f 的标量守恒律和 Euler 方程，用守恒格式得到的非物理解，一定包含有一个定常稀疏激波，在这个定常稀疏激波附近，解是完全单调的（指理论解）或只有极其微小的数据波动，并且它一定是发生在包含有剧烈膨胀的单波的计算上. 我们得出结论：导致发生非物理解现象的原因是格式失

去耗散性，不是不保单调性．通过对在一维常系数方程的情况下，三个等价的二阶格式所作的分析工作表明，发生非线性不稳定的原因是差分格式对于某些特殊初值，它是负耗散的．因此，我们指出(1981)，导致发生上述异常现象的根本原因是由于用线化稳定性分析得到的某些耗散格式计算守恒律问题的解，在某些特殊情况下，会发生负耗散或零耗散，而不是守恒格式不保单调性．可惜的是，在当时我们还无法从数学上给出这个结论的严格证明．

近十年来，为了从数学上严格论述导致守恒格式发生上述异常现象的原因，得到一类具有普遍适用价值的守恒格式，我们在如下几个方面作了系统的研究：

1. 我们深入研究了线化稳定性分析的缺陷，提出了守恒格式的等价格式概念．从等价格式出发，建立了精确分析守恒格式稳定性和耗散性的 Fourier 方法和启发性分析方法，并把 Kreiss 的耗散格式定义推广到守恒格式，并给出了耗散守恒格式的若干简单判别法．

2. 利用 Roe 平均公式，将古典的一维特征理论和 Lax 的 Riemann 不变量推广到 Euler 方程间断解，定义了广义特征值、广义特征向量和广义 Riemann 不变量．从广义的特征理论出发，我们导出了激波、接触间断的等价定义和激波的速度熵条件．另一方面，从广义特征理论出发，导出 Euler 方程的守恒格式的等价格式，从而把上述的稳定性分析方法推广到方程组．最近我们又将这一理论推广到任意坐标系下的三维 Euler 方程，由它建立了任意坐标系下三维 Euler 方程守恒格式的等价格式．

3. 从耗散守恒格式理论出发，我们导出了两类耗散守恒格式．其中之一是最小耗散的混合格式，记为 LDH 格式．另一类是最小耗散的耗散－校正格式，记为 LDC 格式．最近，我们又重新研究了 Lax－Wendroff 人工耗散项，吸收它的合理部分，从而导出了一致二阶的 LDH 和 LDC 格式．

4. 我们研究了应用一维标量 TVD 格式求解一维 Euler 方程间断解存在的几个理论问题．指出标量守恒方程与 Euler 方程的主要区别是：对于前者，它的解和 Riemann 不变量都具有 TVD 性质，但是在 Riemann 间断情况下，Euler 方程不仅解本身没有 TVD 性质，并且它的 Riemann 不变量也没有 TVD 性质．因此将标量 TVD 格式应用于 Euler 方程求解时，实质上是将它的耗散项作形式推广，并指出不是任何一个 TVD 格式都能保证得到物理解，只有满足我们耗散守恒格式定义的 TVD 格式，才能保证得到物理解．

5. 从理论上分析了非物理解产生的原因和条件．从理论上证明了如下结论：(1)对于定常稀疏激波初值，若守恒格式是零耗散并退化为恒等算子，则一定会得到非物理解；(2)非物理解现象只发生在剧烈膨胀的第一类单波计算上(若 $u>0$)，TVD 格式如果会得到非物理解，则一定发生在广义特征值变号的单波计算上．

6. 从理论上研究了激波振荡与非线性不稳定问题．指出(1)产生激波振荡的原因，是某些差分格式在运动激波情况下，激波两侧至少有一个点在某些时刻中是负耗散的，而这个点的位置随 n 的改变而改变，结果引起激波振荡．(2) 设 D 表示激波速度，$C_{ND}=|D|\frac{\Delta t}{\Delta x}$，$q(C_{ND})=\frac{1}{2}C_{ND}(1-C_{ND})$，则激波振荡引起的上超或下跳值与激波强度成正比，其比值与 C_{ND} 的函数 $q(C_{ND})$ 有关，q 愈大，振荡愈剧烈．(3)若 $u>0$，则只有 $D_1>0$ 的第一类激波会发生压力 p 下跳．

另外，假若 $u\geqslant 0$，守恒格式是负耗散的，那么在广义特征值 $\lambda=0$ 的点上，会发生非线性不稳定；假若解是光滑的，非线性不稳定主要发生在驻点和音速点上；如果解是间断的，则发生在

定常激波的计算上.

7. 从理论上研究了守恒格式可靠性考核问题. 指出用数值解与微分方程精确解比较的办法是严格检验守恒格式可靠性的有效方法,而这种定量考核的核心问题,是如何科学地确定标准算例,使得这些标准算例能够全面覆盖在各种初值条件下可能发生的各种情况. 我们以耗散守恒格式理论为依据,制定了五个新的一维 Euler 方程的标准算例,利用这五个算例,我们不仅可以全面考核各种差分格式是否会发生上述异常现象,并且能给出激波过渡区点数的定量估计. 通过对 LDC 格式、一阶迎风格式和 TVD2,UNO2 等格式所作全面考核结果表明,只有从耗散守恒格式理论出发,得到的 LDC 格式能够普遍适用. 而其它从保单调性出发得到的参加考核的格式,对于上述五个算例,或者会得到非物理解,或者会出现 $p<0$ 导致计算过程中断,或者由于人工耗散太大,激波分辨度非常差. 考核结果不仅表明上述算例的制定是科学的和严格的,同时也从实践上检验了我们提出的理论. 为了进一步考核在多维问题中各种高分辨度格式的可靠性和适用范围,为进一步确定各种守恒格式计算误差的误差带,最近我们又制定了两个二维 Euler 方程的标准算例.

本书是作者 15 年来关于耗散守恒格式研究工作的全面总结,第一章是预备知识. 第二章主要论述 Lax 的双曲型守恒律方程组的广义解理论和我们提出的 Euler 方程的广义特征理论. 第三章主要介绍了一些经典格式及其存在的主要问题. 第四章是本书理论的核心部分. 在 §4.1 中主要讨论线化稳定性分析的主要缺陷,提出了守恒格式的等价格式概念. §4.2 主要讨论了标量守恒格式稳定性和耗散性的启发性分析方法. §4.3 讨论了如何应用启发性分析方法来分析标量多步格式的稳定性和耗散性. §4.4 主要讨论了从等价格式出发,应用启发性分析方法来分析 Euler 方程的守恒格式的稳定性与耗散性. §4.5 着重讨论了从等价格式出发,将 Fourier 分析方法推广,并用它将 Kreiss 的常系数耗散格式定义推广,导出耗散守恒格式的数学定义和简单的判别定理. 从第四章的讨论中读者可以看出,导致发生各种异常现象的原因是差分格式在给定条件下,或者是负耗散的,或者是零耗散和恒等算子. 在第五章中,我们具体讨论了如何从耗散守恒格式理论出发,来具体构造标量耗散守恒格式问题. 尽管严格地说,保单调格式不一定是耗散守恒格式,但是,鉴于它是目前常见的一种构造高分辨度格式的方法,并且许多保单调格式可以改造为耗散守恒格式,因此在 §5.1 中,我们专门讨论了各种保单调格式. 在 §5.2 和 §5.3 中,我们主要论述了从耗散守恒格式要求出发,导出 LDH 格式和 LDC 格式. 在第六章中,专门讨论了如何将 LDH 和 LDC 格式推广到 Euler 方程守恒格式的等价格式. 在 §6.1 中主要讨论了一维 Euler 方程守恒格式的等价格式,在 §6.2 中主要讨论了计算一维 Euler 方程的对称型和非对称型的 LDH 和 LDC 格式的构造. §6.3 主要论述了三维笛卡尔坐标系下的耗散守恒格式. §6.4 主要论述了任意坐标系下的 LDH 和 LDC 格式. 在这一节中我们提出了广义 Roe 平均公式,借助于广义 Roe 平均,同样可把任意坐标系下的守恒格式化为等价格式,从等价格式出发,可将 LDH 和 LDC 格式推广. 在 §6.5 中,主要讨论了守恒格式可靠性考核方法,给出了一维、二维 Euler 方程的标准算例. 通过对一维结果的分析,得到了一些新的结论,并对若干有争议的问题,提出了新的见解.

应当指出,在长达 15 年的研究中,气动中心的各级领导和同事们始终都给予极大的支持和帮助. 我的合作者、助手和学生们为了验证理论结论的正确性和各种耗散守恒格式的可靠性,不仅承担了大量的一维和多维典型算例计算,还承担了繁杂的公式和文字校核工作. 其中,特别需要提到的是,张广文高级工程师参与了耗散守恒格式早期的部分理论研究,并承担了一

维典型算例计算和二维、三维的两波干扰计算，对早期的耗散守恒格式理论的建立，起到重要作用．高树椿研究员多年以来承担了指导学生们进行各种二维典型多波系干扰问题计算，对验证 LDH 和 LDC 格式的可靠性起到了重要作用．李超副研究员近五年来，承担了大部分新格式和理论验证计算，对 LDH 格式最后定型起到重要作用．王运涛助理研究员不仅承担了 LDC 格式的全部试算，并协助作者完成了定量考核研究和任意坐标系下的耗散守恒格式的推广工作．王运涛、李超还承担了书稿的校对工作，柳捷同志完成了书稿的全部打印工作，特此致谢！

在近 15 年的研究工作中，我们还得到了以冯康、周毓麟、庄逢甘教授为首的计算数学界和计算空气动力学界的广泛支持，尤其是周毓麟、黄敦、李德元、邬华谟、徐国荣、水鸿寿等教授，作者曾与他们进行了多达数十次的讨论，他们从不同的侧面提出了许多非常有益的意见，对作者学术观点的形成和耗散守恒格式的建立起到了重要作用．庄逢甘教授领导的，傅德薰教授具体组织的北京地区计算流体讨论班为作者提供了许多方便．近五年来，作者的一些主要论文初稿都是首先在这个讨论班上报告，并广泛地听取意见后才定稿的，借此机会，向他们表示衷心的致谢！特别应当由衷感谢的是，庄逢甘教授为本书写了序言，这对于作者，对于本书都是非常荣幸的．

正当本书交付出版社进行编辑之际，著者突然身患绝症，本书在编辑过程中与出版社的诸多联系和需要进行的修改工作，只好全部委托给我的好友邬华谟教授，没有他的无私帮助，本书的顺利出版是绝对不可能的！借此机会，特表示最真挚的感谢！

谨将此书献给我的夫人杨凤兰女士！为了全力支持作者进行这项研究及写此专著，她几十年来含辛茹苦，作出了一般妇女无法承受的牺牲和无私奉献！

作　者

1994 年 10 月．

第一章　预备知识

§1.1　线性波的传播特性及其分类

从某种意义上说，偏微分方程或者逼近它的差分方程组的初值问题的解，实质上是描述在初始时刻产生的扰动的传播规律. 一般地说，不同的偏微分方程，或者不同的差分格式，扰动的传播特性是不同的. 在这一节中，我们将简要地讨论线性偏微分方程所描述的线性波的传播特性及其分类. 由于线性偏微分方程的解存在叠加原理，它的通解可由各个 Fourier 分量来得到. 另一方面，高阶偏微分方程与低阶偏微分方程组之间，常常可互相转化，因此在这一节中，我们只讨论一维常系数和齐次的高阶偏微分方程，并且假定它的解是单一的 Fourier 分量.

考虑(x,t)坐标系下的常系数、齐次方程

$$L(u)=0, \tag{1.1.1}$$

这里 L 是线性偏微分算子，它关于 t 的最高阶导数的阶为 n，它的初值问题要求给定 n 个初始条件

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}=u_k(0), \qquad k=0,1,\cdots,n-1. \tag{1.1.2}$$

现假定它的解是单一的 Fourier 分量

$$u(x,t)=a\exp(-bt+\mathrm{i}kx). \tag{1.1.3}$$

微分(1.1.3)可得

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=(-b)^m u, \qquad \frac{\partial^m u}{\partial x^m}=(\mathrm{i}k)^m u. \tag{1.1.4}$$

代入(1.1.1)并消去 u，可以得到 b 与 k 之间的关系式

$$D(b,k)=0. \tag{1.1.5}$$

(1.1.5)叫做方程(1.1.1)的弥散关系式，由它可以解出 b 的 n 个根，每个根都是 k 的函数，它们可以表示为如下形式

$$b(k)=\mu(k)+\mathrm{i}\omega(k). \tag{1.1.6}$$

因此，(1.1.3)可改写为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= a\exp(-\mu t)\cdot\exp\{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)\} \\ &= a\exp(-\mu t)\cdot\exp\left\{\mathrm{i}k\left(x-\frac{\omega(k)}{k}t\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

每一个表达式(1.1.7)表示一个波，叫做波的模型. 对于 n 阶方程，它有 n 个不同的波. (1.1.7)中的 k 叫做波数，$\omega(k)$叫做波的频率，记

$$
\left.\begin{aligned}
a(t) &= a\exp(-\mu t),\\
V_p &= \frac{\omega(k)}{k},\\
\varphi &= x - V_p t,\\
\lambda &= \frac{2\pi}{k}, \quad p = \frac{2\pi}{\omega(k)}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.8}
$$

$a(t)$叫做在 t 时刻波的振幅，φ 叫做波的相位，V_p 叫做波速或波的相位速度，λ 叫做波长，p 叫做波的周期.

(1.1.7)中的 $\mu(k)$叫做耗散系数，它只影响波的振幅. $\mu(k)>0$ 叫做正耗散，它表示在波的传播过程中，这个波的振幅将随 t 的增加而呈指数衰减，$\mu(k)$愈大，衰减愈快. $\mu(k)=0$ 叫做零耗散，它表示在波的传播过程中，这个波的振幅是不变的. $\mu(k)<0$ 叫做负耗散，它表示在传播过程中，这个波的振幅随 t 的增加将呈指数放大. 因此，如果(1.1.1)是适定的，则它的 n 个波中的每一个波的耗散系数 $\mu(k)$必须是非负的.

现假定 $u_1(x,t)$，$u_2(x,t)$分别表示两个不同波型的波，这两个波具有相同的振幅 $a(t)$，但是，它们的波数和频率有微小差别：

$$
\left.\begin{aligned}
k_1 &= k + \mathrm{d}k, \qquad \omega_1 = \omega + \mathrm{d}\omega,\\
k_2 &= k - \mathrm{d}k, \qquad \omega_2 = \omega - \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.9}
$$

那么，这两个波的叠加得到一个合成波

$$
u(x,t) = A(x,t)\exp(\mathrm{i}(kx - \omega t)), \tag{1.1.10}
$$

$$
A(x,t) = 2a(t)\cos(x\mathrm{d}k - t\mathrm{d}\omega). \tag{1.1.11}
$$

它表明合成波的频率与波长和原来两个波稍微不同，而它的等效振幅同样是一个周期波，

$$
V_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{1.1.12}
$$

是这个周期波的波速，它叫做群速度，这个波的周期为$\frac{2\pi}{\mathrm{d}k}$. 因此等效振幅是在这两个波的振幅的和(即 $2a(t)$)与零之间缓慢地振动的波，$A(x,t)$的周期和波长都很长.

一般地说，相位速度与群速度是不相等的. 当 V_p 恒等于 V_g 时叫做非弥散波，V_p 不恒等于 V_g 时，叫做弥散波. 显然，非弥散波的频率 $\omega(k)$与波数 k 是成比例的，因此它关于 k 的二阶导数 $\omega''(k)$将恒等于零. 所以，$\omega''(k)$不恒等于零的波，一定是弥散波.

对于非弥散波，由于 V_p 恒等于 V_g，合成波的相位与等效振幅的周期波的相位是相同的，它存在一族特征线

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_p = V_g. \tag{1.1.13}
$$

沿特征线，它们的相位是常数. 假若某个人以速度 V_p 随这个波运动，则永远是站在这个波的同一相位上. 假若在 $t=0$ 时，在 x 点上存在由两个波组成的扰动，则这个扰动将沿特征线传播，而不会影响到其它的点.

对于弥散波，假若在 $t=0$，$x=0$ 点上存在由两个波组成的扰动波，由于合成波是以 V_p 为速度进行传播的，而等效振幅的周期波是以 V_g 为传播速度的，由于两者的传播速度不同，在 $x=0$ 点的初始扰动不像非弥散波那样只是沿特征线传播，而是将向外弥散.

(1.1.7)中的 $\mu(k)$，$\omega(k)$都不恒等于零，则叫做扩散波，否则叫做非扩散波．如果 $\omega(k)$恒等于零，则叫做驻波，它表示在波的整个传播过程中，x 点上的相位是不变的．假若 $\mu(k)$恒等于零，则叫做谐波．谐波中的非弥散波，我们称之为双曲型波．常系数偏微分方程的双曲型波，沿特征线不仅相位不变，并且振幅不变．

例 1　热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \sigma > 0, \tag{1.1.14}$$

它的弥散关系式为

$$b(k) = \sigma k^2. \tag{1.1.15}$$

因此，它的解的 Fourier 分量为

$$u(x,t) = a\exp(-\sigma k^2 t)\cdot\exp(\mathrm{i}kx), \tag{1.1.16}$$

它描述的波是振幅指数衰减的驻波．

例 2　波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c > 0, \tag{1.1.17}$$

它的弥散关系式为

$$b^2 = -c^2k^2. \tag{1.1.18}$$

由此得

$$b_{\pm} = \pm ck\mathrm{i}. \tag{1.1.19}$$

(1.1.17)的解有两个波型，其 Fourier 分量为

$$u_1(x,t) = a_1\exp(\mathrm{i}k(x-ct)), \tag{1.1.20}$$

$$u_2(x,t) = a_2\exp(\mathrm{i}k(x+ct)). \tag{1.1.21}$$

它们都是非弥散的谐波，第一个是以波速 c 向右传播的波，第二个是以波速 c 向左传播的波．

波动方程(1.1.17)具有如下特点．作变换

$$\bar{x} = \pm x, \qquad \bar{t} = -t \tag{1.1.22}$$

时，得到的方程仍是(1.1.17)，因此它对时间是可逆的．我们不仅可以在 $t=0$ 上给初值，来研究解在 $t>0$ 时的性质，并且可以研究 $t<0$ 时的性质．而一般的偏微分方程，则是单一方向的进化方程．

§1.2　双曲型方程组的特征理论

1.2.1　双曲型方程组的特征关系式

设 U 是 m 维列向量，如果一维偏微分方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{1.2.1}$$

的系数矩阵 A 存在 m 个实特征值

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m, \tag{1.2.2}$$

并且存在 m 个独立的左特征向量$\{l_k\}$和 m 个独立的右特征向量$\{r_k\}$，满足

$$l_i r_k = \delta_{i,k}, \tag{1.2.3}$$

则叫做双曲型方程组，m 个特征值是相异的实根，则叫做狭义的双曲型方程组. 当 A 是常系数矩阵时，则叫做常系数的双曲型方程组，当 A 的元素是 U 的函数时，则叫做拟线性双曲型方程组.

设 L 是由 A 的左特征向量组成的左特征向量矩阵，R 是由右特征向量组成的右特征向量矩阵. Λ 是由 A 的特征值组成的对角矩阵，则 A,Λ,L,R 之间存在如下的关系式

$$LR = I,\quad \Lambda = LAR,\quad A = R\Lambda L, \tag{1.2.4}$$

这里 I 是单位矩阵.

用 L 左乘(1.2.1)，得

$$L\frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda L\frac{\partial U}{\partial x} = 0. \tag{1.2.5}$$

(1.2.5)叫做双曲型方程组(1.2.1)的特征方程组.

定义 1　设 $\beta_i(U)$是某个正(负)定函数，如果 $J_i(U)$满足

$$\mathrm{d}J_i(U) = \beta_i(U)l_i(U)\mathrm{d}U, \tag{1.2.6}$$

则 $J_i(U)$叫做第 i　Riemann 不变量.

令

$$J(U) = (J_1(U),J_2(U),\cdots,J_m(U))^T \tag{1.2.7}$$

表示由 m 个 Riemann 不变量组成的列向量，用 $\beta_i(U)$乘(1.2.5)的第 i 个方程，则可把方程(1.2.1)化为双曲型方程组的标准形式

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial J}{\partial x} = 0. \tag{1.2.8}$$

我们称它为特征标准型方程，它由 m 个标量方程组成：

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial J_i}{\partial x} = 0. \tag{1.2.9}$$

如果曲线$(x_i(t),t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda_i, \tag{1.2.10}$$

则叫做第 i 族特征线. 由(1.2.9)得出，沿第 i 特征线

$$\mathrm{d}J_i = 0. \tag{1.2.11}$$

因此有

性质 1　沿第 i 特征线，第 i　Riemann 不变量是常数.

现讨论双曲型方程组(1.2.1)满足光滑初值

$$U(x,0) = U_0(x) \tag{1.2.12}$$

的解. 对于初值(1.2.12)，它的 Riemann 不变量的初值为

$$J_i(x,0) = J_i(U_0(x)) = J_{0,i}(x),\qquad i = 1,2,\cdots,m. \tag{1.2.13}$$

因此，初值问题(1.2.1)、(1.2.12)的解，等价于初值问题(1.2.9)、(1.2.13)的解.

假定在带状区域

$$D = \{-\infty < x < \infty;0 < t \leqslant T\} \tag{1.2.14}$$

内满足： 1. 同一族的特征线不发生相交. 2. 在$(x,t)\in D$ 的每一点上，恰好有 m 条从初始时刻引出的不同族的特征线通过. 现假定在 (x,t)点的第 i 特征线在 $t=0$ 时刻，对应的 x 为 $x_i(0)$，由性质 1 得

$$J_i(x,t) = J_{0,i}(x_i(0)), \qquad i = 1,2,\cdots,m. \tag{1.2.15}$$

因此，在 D 上解是存在和唯一的.

在双曲型方程组古典解范围内，一个很重要的概念是影响区域. 性质 1 表明，在初始线上的点 $(x_0,0)$ 处存在 m 条特征线，它的扰动实际上只是沿特征线传播. 因此，在 x_0 点上扰动的变化，实际上只影响到以由 $(x_0,0)$ 点向 t 大于零方向引伸出的第一特征线与第 m 特征线作为左、右边界的区域，这个区域叫做影响区域. 与这个概念相对应的另一概念叫做依赖区域. 点 (x,t) 的依赖区域是由它向 t 减小的方向引出第 m 特征线和第一特征线与 x 轴相交，所围成的区域.

设 $f(x,t)\in C^1$，即 $f(x,t)$ 连续可微，

$$\mathrm{TV}(f(\cdot,t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \mathrm{d}x \tag{1.2.16}$$

叫做 $f(x,t)$ 在 t 时刻的总变差. 双曲型方程组古典解的一个重要性质是

性质 2 设在区域 D 上存在 C^1 解，则有

$$\mathrm{TV}(J_i(\cdot,t)) = \mathrm{TV}(J_i(\cdot,0)). \tag{1.2.17}$$

性质 1、2 表明，在古典解范围内，双曲型方程组的 Riemann 不变量 $J_i(x,t)$ 不仅沿特征线具有不变性，并且 $J_i(x,t)$ 的总变差 $\mathrm{TV}(J_i(\cdot,t))$ 同样具有不变性，这一不变性是双曲型方程组的一个非常重要的特性.

1.2.2 常系数双曲型方程组的解

当(1.2.1)中的系数矩阵 A 是常数矩阵时，λ_i, l_i, r_i 和 L, R, Λ 分别是常数、常数向量或常数矩阵，这时 Riemann 不变量 $J_i(x,t)$ 与解 $U(x,t)$ 之间是线性关系

$$J = LU, \qquad U = RJ. \tag{1.2.18}$$

由(1.2.10)和(1.2.11)直接得出初值问题的解

$$J_i(x,t) = J_{0,i}(x - \lambda_i t). \tag{1.2.19}$$

因此，常系数双曲型方程组的解可以表示为

$$\begin{aligned} u_j(x,t) = & r_{j,1}J_{0,1}(x-\lambda_1 t) + r_{j,2}J_{0,2}(x-\lambda_2 t) \\ & + \cdots + r_{j,m}J_{0,m}(x-\lambda_m t), \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

这里 $r_{j,k}$ 是 r_k 的第 j 个分量.

在上一段的讨论中，我们已经指出，双曲型方程组的 Riemann 不变量 $J_i(x,t)$ 具有总变差不变性. 现指出常系数双曲型方程组的解本身不具有总变差不变性，并且它的总变差甚至可能是增加的.

定理 1 一维常系数双曲型方程组，如果不是特征标准型方程，则只有 Riemann 不变量具有总变差不变性，而解本身不具有总变差不增加的性质.

证 由(1.2.19)直接得出，它的 Riemann 不变量的总变差具有不变性. 当它是特征标准型方程时，$J=U$，解同样具有总变差不变性.

现讨论不是特征标准型的情况，令

$$x^* > \lambda_m, \quad R_i = x^* - \lambda_i > 0, \qquad i = 1,2,\cdots,m. \tag{1.2.21}$$

以 $x=R_i$ 为中心，作以下二次曲线 $\varphi_i(x)$：

$$y = \varphi_i(x) = R_i^2 - (R_i - x)^2. \tag{1.2.22}$$

给定某个 $j\leqslant m$，取 $J_k(x,0)$ 为

$$\operatorname{sign} J_k(x,0) = \operatorname{sign} r_{j,k}, \tag{1.2.23}$$

$$|J_k(x,0)| = \begin{cases} \varphi_k(x), & 0 < x \leqslant 2R_k; \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > 2R_k. \end{cases} \tag{1.2.24}$$

将上面定义的 $J_k(x,0)$ 代入公式(1.2.20)，可以得出 $u_j(x,t)$ 为

$$u_j(x,t) = \sum |r_{j,k}|\,|J_k(x - \lambda_k t)|. \tag{1.2.25}$$

由于第 k 个 Riemann 不变量是以波速 λ_k 传播的，因此，当 $t=1$ 时，φ_k 的中心都移到 x^* 点，因而有

$$\mathrm{TV} u_j(1) = 2\sum_1^n |r_{j,k}| R_j^2. \tag{1.2.26}$$

现证明当 λ_k 是相异实根时，有

$$\mathrm{TV} u_j(0) < \mathrm{TV} u_j(1). \tag{1.2.27}$$

首先，将区间 $[0,2R_1]$ 划分为 m 个子区间

$$I_1 = [0,2R_m], \quad I_{m+1-k} = [2R_{k+1},2R_k], \qquad k = 1,\cdots,m-1. \tag{1.2.28}$$

在 I_k 上定义函数

$$\begin{aligned} f_{j,k} &= \sum_{l=1}^{m+1-k} |r_{j,l}|\,|J_l(x)| \\ &= \sum_{l=1}^{m+1-k} |r_{j,l}| \varphi_l(x), \qquad x \in I_k. \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

由于 φ_l 是二次函数，因此 $f_{j,k}$ 是二次函数，它或者是单调的，或者只有一个极值点.

首先，讨论 $m=2$ 的情况：

(1) 假若在 I_1 上 $f_{j,1}$ 是单调增函数，则在 $x=2R_1$ 上 $f_{j,1}$ 达到极大值，因此

$$\mathrm{TV} u_j(0) = 2|r_{j,1}| R_1^2 < \mathrm{TV} u_j(1).$$

(2) 设 x_1^* 是 $f_{j,1}(x)$ 在 I_1 上的极值点，由于在 $x \leqslant R_2$ 时 $f_{j,1}(x)$ 是单调增函数，因此

$$R_2 < x_1^* < R_1,$$

而 $|J_2(x)|$ 在 R_2 点达到极大值，因此 $|J_2(x)|$ 对 $\mathrm{TV} u_j(0)$ 的贡献小于 $2|r_{j,1}|R_2^2$，由它同样可得(1.2.27)成立.

其次，假定 $m-1$ 时(1.2.27)成立，现令

$$\begin{aligned} &I_1^* = I_1 + I_2, && I_k^* = I_{k+1}, \\ &u_j(x) = |r_{j,m}|\,|J_m(x)| + f_{j,2}(x), && x \in I_1^*, \\ &u_j(x) = f_{j,k+1}(x), && x \in I_k^*, \quad k > 1, \end{aligned}$$

在 I_1^* 上它可化为 $m=2$ 的情况，利用 $m=2$ 和 $m-1$ 的结论，可直接得出对于 m，(1.2.27)同样成立.

总结上述讨论可以得出，双曲型方程组的总变差不增性质，实质上只是指它的 Riemann

不变量，而不是解本身.

1.2.3 单波

假若双曲型方程组是拟线性的，则它的系数矩阵 A 和它的 λ_i, l_i, r_i 都是 U 的函数，因此，它的第 i 族特征线一般地说是曲线. 前面已经指出，在带状区域 D 上如果不发生同族特征线相交，并且在每一个 $(x,t)\in D$ 的点上，恒有 m 条从 $t=0$ 时刻引出的特征线通过它，则存在古典解. 在拟线性双曲型方程组中，单波是一个很重要的概念.

定义 2 设 R_i 是 (x,t) 平面上的某个区域，如果解 U 在 R_i 上不是常态且满足

$$\mathrm{d}J_k(x,t) = 0, \qquad \forall\ (x,t) \in R_i, \quad k \neq i, \tag{1.2.30}$$

则 U 叫做第 i 类单波.

由于在第 i 类单波区上，任何一个 $k\neq i$ 的 $J_k(x,t)$ 都是常数，另一方面由性质 1 得出，沿第 i 特征线 J_i 是常数，因此有如下性质.

性质 3 在单波区 R_i 上，它的第 i 特征线是直线，沿第 i 特征线解是常值.

设 $G(x,t)$ 是 (x,t) 平面上的某个区域，在 $G(x,t)$ 上解是常态 U_0，现假定这个解可以连续地延拓到 G 的相邻区域. 由于在常态区域上，每一族特征线都是直线，并且所有的 Riemann 不变量 J_i 在 G 上分别是常值，可以证明 G 的边界线一定是特征线，并且是直线，而与它相邻的区域一定是单波，因此有

性质 4 与常态区相邻的区域是单波区.

§1.3 常系数差分格式及其修正方程式

1.3.1 差分格式的建立

现以一阶常系数双曲型方程组初值问题

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{1.3.1}$$

$$U(x,0) = U_0(x) \tag{1.3.2}$$

和一维热传导方程的初值问题

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sigma\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{1.3.3}$$

$$U(x,0) = U_0(x) \tag{1.3.4}$$

为例，介绍差分格式的构造方法. 设 Δx 为空间步长，Δt 为时间步长，可把 $t\geqslant 0$ 的上半平面划分为网格，点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ 叫做网格节点. 用有限差分法求解偏微分方程组的初值问题，实质上是把 (x,t) 上的连续问题离散化，用定义在网格点上的节点函数来逼近微分方程的解.

构造差分格式的方法有许多种，这里介绍几种常用的方法：

1. 基本方法. 在某一网格节点上，选取适当的差商代替时间方向的偏导数，选取适当的差商代替关于空间方向的偏导数，直接代入微分方程式，则可得到一种差分格式，这种方法是构造差分格式的最原始的办法.

例如，对于热传导方程(1.3.3)，用向前差商代替 (j,n) 点的 $\frac{\partial U}{\partial t}$，用 (j,n) 点的二阶中心差