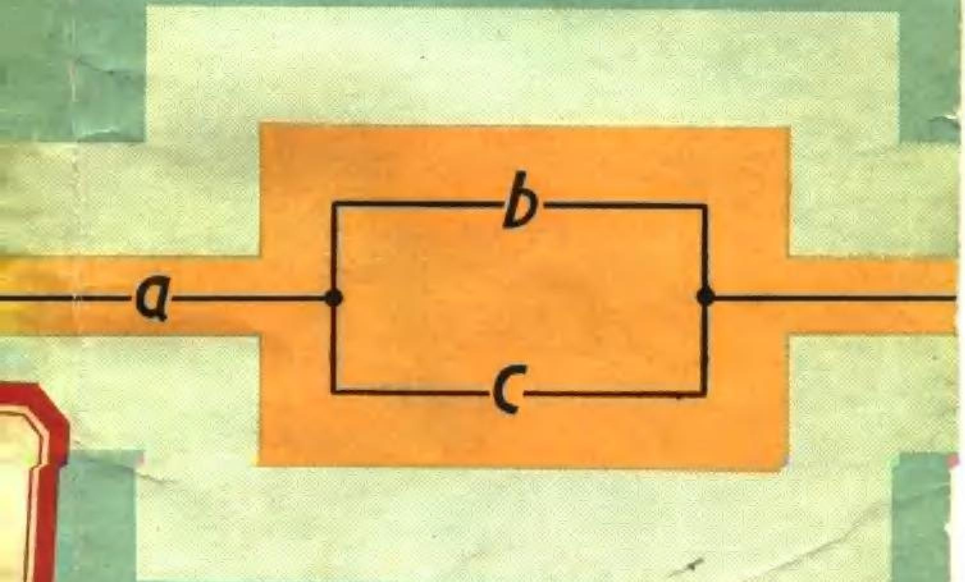
逻辑代数及其应用

G.F.索斯 著　李树贻 译



文化教育出版社

逻辑代数及其应用

G.F.索斯 著

李树贻 译

文化教育出版社

内容提要

本书是按G.F.索斯著“*Boolean Algebra and its Uses*”译出的. 书中介绍了逻辑代数的一些基本知识及其在控制工程、计算机等方面的一些初步应用. 本书叙述比较浅显通俗,准备知识要求不高. 可供中学数学教师及科技工作者参考,也可供高中生及大学生课外阅读.

逻辑代数及其应用

G.F.索斯 著

李树贻　译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 4.25　字数 88,000

1981年12月第1版　1982年8月第1次印刷

印数　1— 20,000

书号 7057·052　　定价 0.46 元

原　序

这本书是为中学、专科学校、大学及工业部门的初学者所写．书中既包括理论也包括应用，因为这二者是相互依赖的．所举的各种实例和练习对于精读此书的读者会有益处．

数学中的许多分支都由于符号的多样性而带来了麻烦，逻辑代数（译者注：原书这里是“布尔代数”，原书书名也是“布尔代数”，译本改为“逻辑代数”，是考虑这个名词读者比较熟悉．以后两个名词有时并用．）更是如此．其符号的二重性特别容易导致混乱．本书是以便于记忆和使用为标准选用符号的，对于普通代数运算和逻辑代数运算之间的逻辑区分则不予考虑(这一点实际上是不重要的)．下表中列举了本书中和其它一些地方使用的符号．

本书使用的符号	其它书中使用的符号
0	$1\ \varnothing\ \wedge\ \mathrm{F}\ \mathrm{Z}$
1	$0\ \mathscr{E}\ \vee\ \mathbf{T}\ \mathbf{U}\ \mathbf{E}$
$+$	$\oplus\ \cup\ \vee$
$\cdot$	$\odot\ \cap\ \wedge\ \&\ \times$
$\boldsymbol{a}'$	$\bar{a}\ \underline{a}\ \rceil a\ \rceil a\ \mathscr{C}a\ 1-\boldsymbol{a}\ \sim\boldsymbol{a}\ c\boldsymbol{a}\ -\boldsymbol{a}$
$\rightarrow$	$\supset\ \subset\ \subseteq\ \Longrightarrow$
$=$	$\leftrightarrow$

作者将十分感谢读者们指出那些由于作者的疏忽而造成的错误和不足．

目　录

第一章　二元系统

引　言

世界上的许多现象初看起来都恰好具有两种状态．例如白天和黑夜，热和冷，黑和白等等．但仔细观察却不完全如此．比如黎明和黄昏，热和温，以及各种不同程度的灰暗等等．这些又使我们怀疑是否真的存在严格地具有两种状态的现象．古希腊的哲学家把他们的学院式的讨论归结为两种形式的命题："(什么)是(什么)"和"(什么)不是(什么)"．比如"苏格拉底(古希腊哲学家)是凡人""角 ABC 不是直角"等等．两千多年来，数学和哲学中的许多问题都采用了这种方法并且获得成功．

十八世纪欧拉(Euler)给出了一种用图形表示命题之间关系的方法．这种方法后来被文(Venn)和卡诺(Karnaugh)发展了．到了十九世纪，布尔(Boole)创立了一种处理命题的代数，在"逻辑的数学分析"(1847)及"思维规律"(1854)上发表．他的工作又被路易士·卡勒尔(Lewis Carroll, 1896)，怀特黑得 (Whitehead, 1898)，汉廷顿 (Huntington, 1904 及 1933)，谢费尔(Sheffer, 1913)以及其它一些人发展．这以后，谢农(Shannon, 1939)指出，布尔代数理想地适用于讨论开关电路．

开　关

一个开关是指一种器件，在任何一个给定的时刻，这个器件或者是断开，或者是接通．当开关断开时，其传送特性用 0 表示，当开关接通时，其传送特性用 1 表示．任何一个有两个端点的网络可以认为是一个开关．

任何一个开关都可以用表示其开关传送特性的符号表示．

比如: 

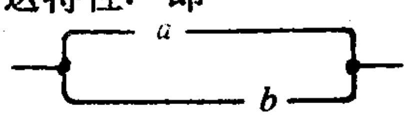
或是: ——— a ———

都表示一个开关．

任何另外一个开关，若 a 断开时断开，a 接通时接通，则这一开关也可以用 a 表示．

如果有一个开关，当 a 接通时断开，当 a 断开时接通，则这一开关叫做 a 的补(或叫 a 的反，或 a 的非)，并用 a' 表示．

我们可以用符号 $a+b$ 表示两个并联的开关 a 和 b 的传送特性．即



可以用 ——— $a+b$ ——— 表示．

可以用符号 $a\cdot b$ 表示两个串联的开关 a 和 b 的传送特性．即

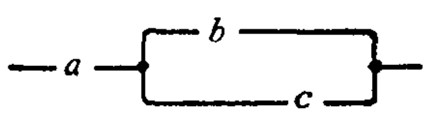
——— a —— b ——— 可以用 ——— ab ——— 表示．

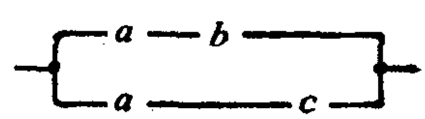
用以上表示法，若以 0 表示开关断开，1 表示开关接通，则可以得到以下等式：

$$
\begin{array}{ll}
0+0=0 & 0\cdot 0=0 \\
0+1=1 & 0\cdot 1=0 \\
1+0=1 & 1\cdot 0=0 \\
1+1=1 & 1\cdot 1=1 \\
a+b=b+a & a\cdot b=b\cdot a \\
a+a'=1 & a\cdot a'=0 \\
a+0=a & a\cdot 0=0 \\
a+1=1 & a\cdot 1=a
\end{array}
$$

这些等式的正确性，可以通过画出适当的图形来证明. 这里要特别注意，上面的哪一些等式是对称的.

设有两个开关网络



及


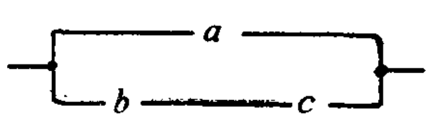
它们的传送特性分别为 $a\cdot(b+c)$ 及 $(a\cdot b)+(a\cdot c)$.

若 $a=0$ 或 $b=c=0$，则两个网络都断开. 若 $a=1$ 且 $b=1$ 或 $c=1$，则两个网络都接通. 因此，这两个网络的传送特性是相同的，即

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c).$$

对于上述特性来说，开关代数和普通代数是一致的.

我们再来观察另外两个开关网络



及


其传送特性分别为 $a+(b\cdot c)$ 及 $(a+b)\cdot(a+c)$.

若 $a=0$ 且 $b=0$ 或 $c=0$，则两个网络都断开. 若 $a=1$ 或 $b=c=1$，则两个网络都接通，因此，它们的传送特性是一致的，即

$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c).$$

这个等式与普通代数的等式不同，但它与前面讲过的等式是对称的.

继 电 器

电磁继电器是一种常用于开关电路的器件. 图 1.1是继电器的示意图.

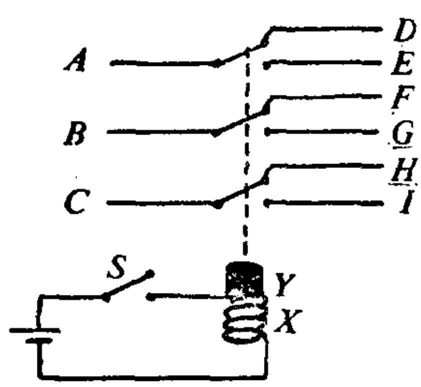
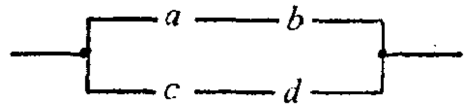


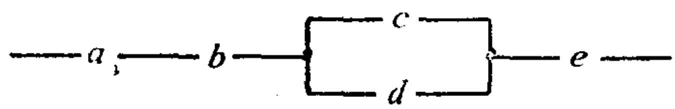
图 1.1 继电器

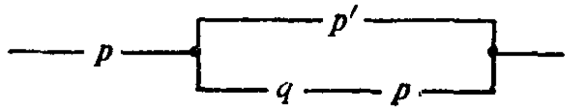
这种继电器由线圈 x，部分插入线圈中的活动软铁芯 Y，与 Y 相连的绝缘材料（图中用虚线表示），以及和绝缘材料连接在一起的一组铁片构成. 当开关 S 接通时，电流流过线圈，使其磁化. 这就使得铁芯更深地被吸入线圈，从而使铁片由一组接触点 (D、F、H) 移到另一组接触点 (E、G、I). 当开关 S 断开后，铁芯和铁片恢复原状. 通路 AE, BG 和 CI 的传送特性为 S；通路 AD, BF 和 CH 的传送特性为 S'.

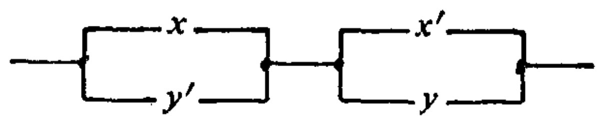
练 习

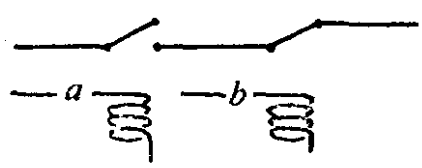
1. 求出以下网络的传送特性

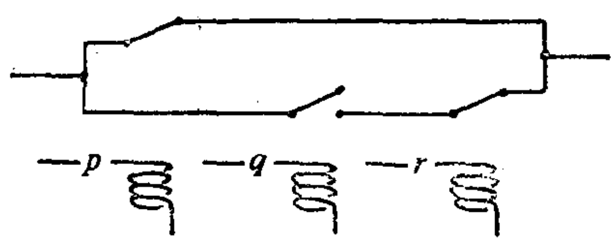












2. 画出具有以下传送特性的开关网络:

$x\cdot(y+z), a+(b'\cdot c'\cdot d'), k+m+p+q,$

$(u\cdot v)+(v'\cdot w)$, $(a'\cdot b)+(a\cdot b')$, $(f+g)\cdot(f'+g')$.

3. 用网络图证明

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

4. 开关 a 在星期二、星期五和星期日接通；开关 b 在星期一、星期三和星期五接通；开关 c 在星期三、星期四、星期五和星期六接通；在其它时间开关断开．求证：$a\cdot b=a\cdot c$，但

$b \neq c$.

5. 试与第 4 题相仿举一例，说明 $b \neq c$ 时可能有 $a+b=a+c$.

点的集合

设 a，b，c…分别表示某个已知的确定空间中的点的集合．在图 1.2中，在矩形边界内的所有点构成了这个确定的空间，并用阴影表示了几个集合.

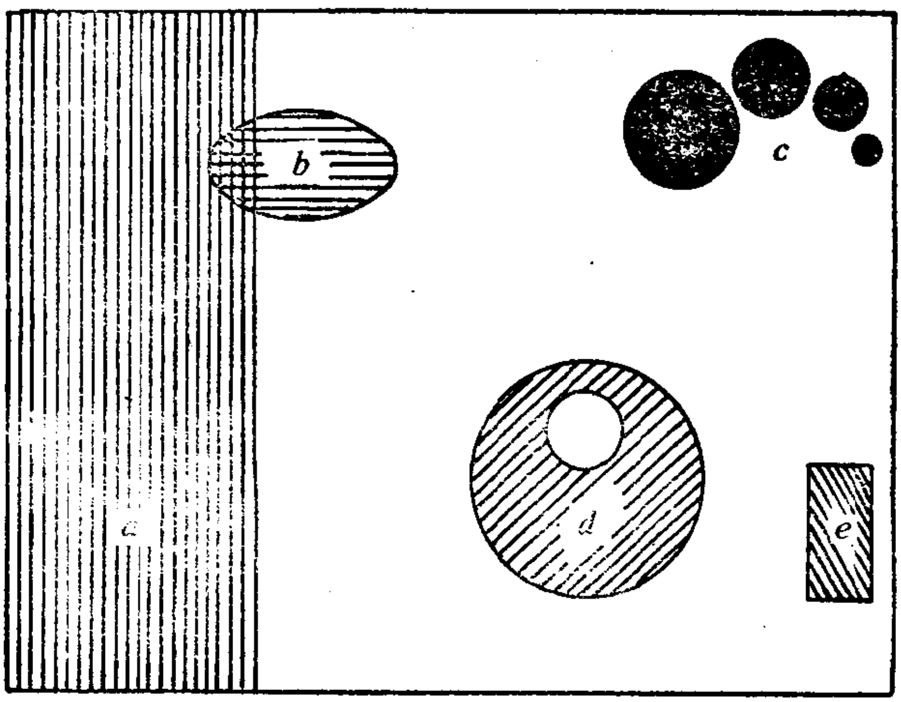


图 1.2　点的集合

设 $a+b$ 表示所有属于 a 或属于 b 或既属于 a 也属于 b 的点的集合．这叫做 a 和 b 的**并集**．设 $a \cdot b$ 表示所有既属于 a 又属于 b 的点的集合．这叫做 a 和 b 的**交集**.

设 a' 表示这个确定的空间中所有不属于 a 的点的集合.

这叫做 a 的**补集**．设 0 表示不包含任何点的集合．这叫做**空集**．设 1 表示包含所有点的集合．这叫做**全集**．

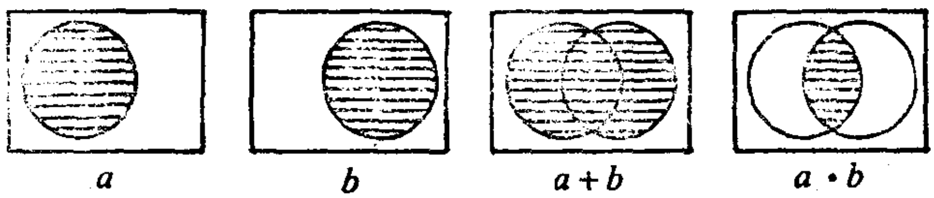


图 1.3　并集与交集

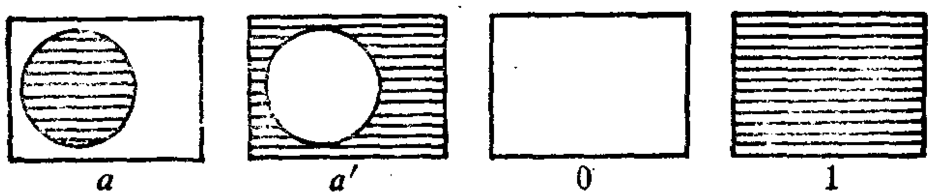


图 1.4　补集及特殊集

根据以上集的表示法，可以得到下述等式:

$$
\begin{array}{ll}
0+0=0 & 0\cdot 0=0 \\
0+1=1 & 0\cdot 1=0 \\
1+0=1 & 1\cdot 0=0 \\
1+1=1 & 1\cdot 1=1 \\
a+a'=1 & a\cdot a'=0 \\
a+b=b+a & a\cdot b=b\cdot a \\
a+0=a & a\cdot 0=0 \\
a+1=1 & a\cdot 1=a
\end{array}
$$

所有上述等式均可通过画出相应的图来证明．我们还可以推导出进一步的有关三个集合 a、b、c 的一些重要公式．比如，图 1.5 说明

$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c).$$

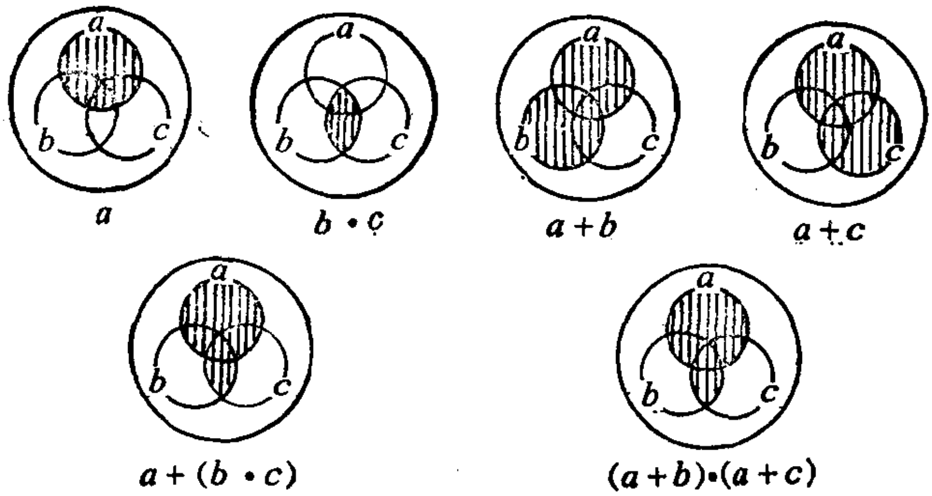
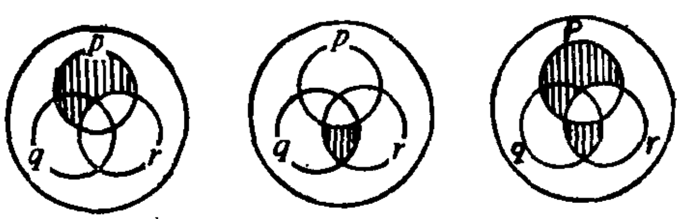


图 1.5　三个集合的组合

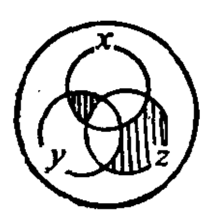
上面画的图叫做欧拉(Euler)圆或文氏(Venn)图. 用圆表示集合并没有什么特殊优点, 只是因为画起来比较方便.

例: 用欧拉圆表示 $pr'+p'qr$.

pr' 可用下图中最左边的图表示, pr' 即在 p 圆之内而在 r 圆之外的阴影区域. $p'qr$ 可用下图中间的图表示, $p'qr$ 即在 p 圆之外, 而在 q 圆及 r 圆之内的阴影区域. $pr'+p'qr$ 由上述两个区域的并集构成, 如下图中最右边的图所示.



例: 写出下图中阴影部分的表达式:



在 x 和 y 圆中，而在 z 圆之外的较小的阴影部分表示 xyz'. 在 x 和 y 圆之外，而在 z 圆之中的较大的阴影部分表示 $x'y'z$. 图中全部阴影区域表示上述两部分的和，因此表示 $xyz'+x'y'z$.

练　　习

1. 用图形表示下列式子:

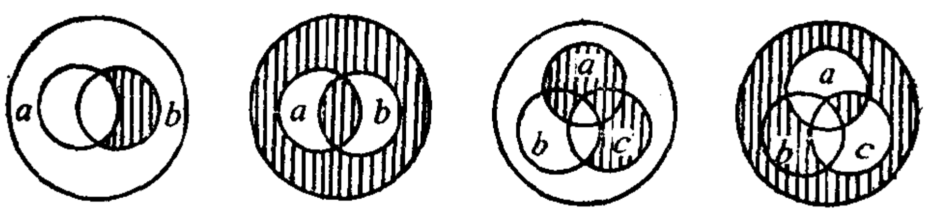
   $a+b'$, $a\cdot b'$, $a\cdot b'+a'\cdot b$, $(a+b)\cdot c$,

   $(a'+b')\cdot c$, $(a+b)\cdot c'$.

2. 用欧拉圆证明:

   $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$.

3. 写出下图中各阴影部分的表达式:



4. 用欧拉圆证明:

   $(a+b)'=a'\cdot b'$,

   $f+(f'\cdot g)=f+g$,

   $(m')'=m$,

   $(p+q)+r=p+(q+r)$.

5. 求集合 a, b 及 c，使得 $a+b=a+c$ 但 $b\neq c$.

命　　题

任何一个语句，如果它或者成立，或者不成立，而不能同

时兼有也不能同时没有这两种特性的，就把它叫做命题．例如：机器正在运转；一只鸽子咬人；门开着；门没有开着；硝酸与铜起反应等等，都是命题．

"或"这个词是有二义性的．试比较以下的句子：

您想喝茶或是想喝咖啡？（但不是两者都喝）．

您要牛奶或是要糖？（也可以两者都要）．

为了避免混乱，我们用"异或"(orelse) 表示前一种含意；用"与或"(*andor*) 或简称"或"表示后一种含意．当一个句子中出现"或"这个词时，它的含意要由上下文决定．当具有二义性时，通常选用后一种含意的"或"．

设 $a, b, c\cdots$ 分别表示命题．

设 $\equiv$ 这个符号的意思是"表示"．

设两个命题中的任何一个成立或是两者同时成立时第三个命题成立，否则第三个命题不成立，那么第三个命题叫做这两个命题的或，并有 $a+b\equiv$ 命题 a 及命题 b 的或．

设两个命题同时成立时第三个命题成立，否则第三个命题不成立，那么第三个命题叫做这两个命题的与，并有 $a\cdot b\equiv$ 命题 a 及命题 b 的与．

设命题 a 的否命题是命题 a'（也称非 a），当 a 不成立时 a' 成立；当 a 成立时 a' 不成立．

如果在任何可能的情况下，两个命题或是都成立或是（异或）都不成立，则这两个命题相等或是等价．

设 0 表示一个任何时刻都不成立的命题；1 表示一个任何时刻都成立的命题．

则：

$0+0=0$　　$0\cdot 0=0$

$0+1=1$　　$0\cdot 1=0$

$1+0=1$　　$1\cdot 0=0$

$1+1=1$　　$1\cdot 1=1$

$a+b=b+a$　　$a\cdot b=b\cdot a$

$a+a'=1$　　$a\cdot a'=0$

$a+0=a$　　$a\cdot 0=0$

$a+1=1$　　$a\cdot 1=a$

例:

设

$a\equiv$电灯亮了,

$b\equiv$门打开了,

则

$a+b\equiv$电灯亮了或是(与或)门打开了.

$a\cdot b\equiv$电灯亮了而且门也打开了.

$a'\equiv$电灯灭了.

$a\cdot b'\equiv$电灯亮了而且门关上了.

$a\cdot b'+a'\cdot b\equiv$灯亮且门关,或是灯关且门开.

例:

设

$p\equiv$大卫比约翰年纪大

$q\equiv$约翰比大卫年纪小

$x\equiv$一只鸽子咬人

$y\equiv$唐喀斯特在约克夏

则　$p=q$　　$p'=q'$

$x=0 \qquad x'=1$

$y=1 \qquad y'=0$

$p+q'=1 \qquad x\cdot y=0$

真值表

若一个命题取决于另外一些命题，则这一命题叫做复合命题．例如 $a+a'$, $a+b$, $a+(b'\cdot c')$ 等就是复合命题．组成复合命题的各个命题可以成立，也可以不成立．当这些组成部分的成立与否为已知时，就可以确定复合命题是否成立了．

表示一个复合命题的值与其组成部分的所有可能值的关系的一个表叫真值表．当命题有 n 个组成部分时，它们的值就有 2^n 种可能的搭配．这些搭配列于表的左半部．

例：a' 的真值表为：

a	a'
1	0
0	1

当 a 成立时(用 1 表示)，a' 不成立(用 0 表示)．当 a 不成立时，a' 成立．

$a+b$, $a\cdot b$, $a+b'$, $a\cdot b'$, $(a\cdot b)+(a'\cdot b')$ 的真值表分别为：

a	b	$a+b$	$a\cdot b$	$a+b'$	$a\cdot b'$	$(a\cdot b)+(a'\cdot b')$
0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1