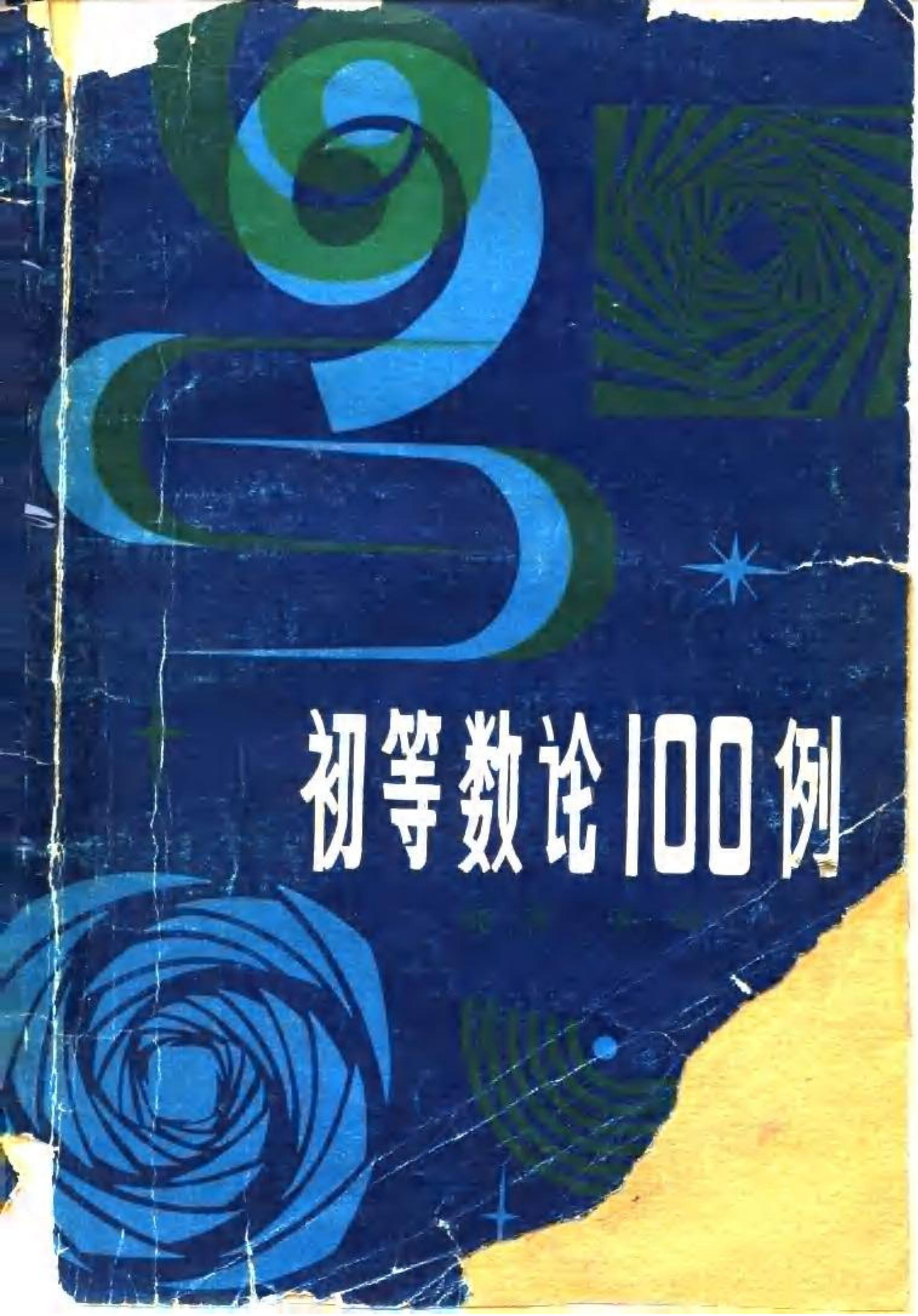
初等数论100例

初　等　数　论 100 例

柯　召　　孙　琦

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷六厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 2.625　字数 56,000

1980 年 5 月第 1 版　1980 年 5 月第 1 次印刷

印数 1—50,000 本

统一书号：7150·2242　　定价：0.22 元

前　言

这里选编了100个初等数论题目和它们的解答．这些题目的解法虽然用到的知识不多，但比较灵活，有一定的难度．通过这些题目和解答，能够增强我们解决数学问题的能力，并使读者了解一些初等数论的内容和方法．初等数论的知识和技巧是我们学习近代数学时所需要的，特别是学习某些应用数学学科时所需要的，因此，这本小册子除了可以作为中学教师、中学数学小组的读物外，也可供广大数学爱好者阅读．

这些题目是我们从事数论教学中逐步积累的一部分，主要选自《美国数学月刊》杂志，以及安道什(P. Erdös)著《数论的若干问题》，夕尔宾斯基(W. Sierpiński)著《数论》等书籍．其中也有我们自己的一些结果．为了避免重复，国内容易找到的一些数论教科书和数学竞赛中的题目，我们基本上没有选入．同时对其中某些还可进一步深入探讨的题目，我们在解答后面加了一些注释．

这100个题目中的绝大部分仅仅用到初等数论中的整除、同余等简单的内容，只有一小部分题目要用到二次剩余、元根等知识．为方便读者，我们在书后列出了所需要的定义和定理．至于这些定理的证明，读者可以在任何一本初等数论的书中找到．

限于作者水平，错误与不当之处，尚祈读者指正．

作　者

1979年3月于成都

目　　录

初等数论100例

1. 设$m>0$, $n>0$, 且m是奇数, 则

$$(2^m-1,\ 2^n+1)=1.$$

证. 设$(2^m-1,\ 2^n+1)=d$, 于是可设

$$2^m=dk+1,\ \ k>0, \tag{1}$$

和

$$2^n=dl-1,\ \ l>0, \tag{2}$$

(1)式和(2)式分别自乘n次和m次得

$$2^{nm}=(dk+1)^n=td+1,\ t>0, \tag{3}$$

和

$$2^{nm}=(dl-1)^m=ud-1,\ u>0, \tag{4}$$

由(3)和(4)得 $$(u-t)d=2,$$

故 $$d\,|\,2,$$

$d=1$或2, 而2^m-1和2^n+1都是奇数, 因此$d=1$.

2. 设$(a,\ b)=1$, $m>0$, 则数列

$$\{a+bk\},\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

中存在无限多个数与m互素.

证. 存在m的因数与a互素, 例如1就是, 用c表示m的因数中与a互素的所有数中的最大数, 设$(a+bc,\ m)=d$.

我们先证明$d=1$. 由$(a,\ b)=1$, $(a,\ c)=1$得

$$(a,\ bc)=1, \tag{1}$$

从而可证得

$$(d,\ a)=1,\ (d,\ bc)=1. \tag{2}$$

因为如果(2)不成立，便有$(d,a)>1$或$(d, bc)>1$，于是(d, a)或(d, bc)有素因数，即存在一个素数p使$p|(d, a)$或$p|(d, bc)$. 而$d|a+bc$，当$p|(d, a)$时，由$p|a$, $p|a+bc$，可得$p|bc$，与(1)矛盾；同样，当$p|(d, bc)$时，也将得出与(1)矛盾的结果. 因此，$(d, c)=1$.

另一方面，由$d|m$, $c|m$(c是m的因数)及$(d, c)=1$，可得$dc|m$，又从(2)的$(d, a)=1$和$(a, c)=1$，得出$(a, cd)=1$，由于c是m的因数中与a互素的数中最大的数，所以$d=1$(否则$cd>c$)，即$(a+bc, m)=1$.

对于$k=c+lm$, $l=0, 1, \cdots$，有

$$(a+bk, m)=(a+bc+blm, m)=(a+bc, m)=1,$$

这就证明了有无穷多个k使$(a+bk, m)=1$.

3. 设$m>0, n>0$，则和

$$S=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}$$

不是整数.

证. 可设$m+i=2^{\lambda_i}l_i$, $\lambda_i\geqslant 0$, $2\nmid l_i$, $i=0, 1, \cdots, n$，由于n是正整数，所以$m, m+1, \cdots, m+n$中至少有一个偶数. 即至少有一个i使$\lambda_i>0$. 设λ是$\lambda_0, \cdots, \lambda_n$中最大的数. 我们断言，不可能有$k\neq j$而$\lambda_k=\lambda_j=\lambda$. 如果不是这样，可设$0\leqslant k<j\leqslant n$, $\lambda_k=\lambda_j=\lambda$, $m+k=2^{\lambda_k}l_k$, $m+j=2^{\lambda}l_j$，因为$m+k<m+j$，所以$l_k<l_j$. 这就导致有偶数h使$l_k<h<l_j$. 故在$m+k<m+j$之间有数$2^{\lambda}h$, $2|h$. 即可设$2^{\lambda}h=m+e=2^{\lambda_e}l_e>m+k=2^{\lambda}l_k$. 这时$\lambda_e>\lambda$，与$\lambda$是最大有矛盾，这就证明了有唯一的一个$k$, $0\leqslant k\leqslant n$，使$m+k=2^{\lambda}l_k$, $2\nmid l_k$. 设$l=l_0\cdot\cdots\cdot l_n$，在$S$的两端乘以$2^{\lambda-1}l$得

$$2^{\lambda-1}lS=\frac{N}{2}+M, \tag{1}$$

其中 $\frac{N}{2}=2^{\lambda-1}l\frac{1}{m+k}=\frac{2^{\lambda-1}l}{2^{\lambda}l_k}$, 故 N 是一个奇数. 其余诸项都是整数，它们的和设为整数 M. 从(1)立刻知道 S 不是整数. 因为，如果 S 是整数，由(1)可得

$$2^{\lambda}lS-2M=N, \tag{2}$$

(2)的左端是偶数，右端是奇数，这是不可能的.

4. 设 $m>n\geqslant 1$, $a_1<a_2<\cdots<a_s$ 是不超过 m 且与 n 互素的全部正整数，记

$$S_m^n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_s},$$

则 S_m^n 不是整数.

证. 由于 $(1,\ n)=1$, 所以 $a_1=1$. 又因已知 $m>n\geqslant 1$, 且 $(n+1,\ n)=1$, 故 $s\geqslant 2$. a_2 必是素数，因如果 a_2 是复合数，则有素数 p, $p\mid a_2$ 且 $1<p<a_2$, $(p,\ n)=1$, 这不可能. 设 a_2^k 是不超过 m 的 a_2 的最高幂，即 $a_2^k\leqslant m<a_2^{k+1}$, $k\geqslant 1$. 由 $(a_2^k,\ n)=1$ 知，存在某个 t, $2\leqslant t\leqslant s$, 使 $a_t=a_2^k$, 如果 $a_1,\ \cdots,\ a_s$ 中另一个 a_j 被 a_2^k 整除，可设 $a_j=a_2^kc$, $t<j\leqslant s$, $m>c>1$, 而 $(c,\ n)=1$, 故 $c\geqslant a_2$, 这就得到 $a_j=a_2^kc\geqslant a_2^{k+1}>m$, 与 $a_j\leqslant m$ 矛盾. 现设 $a_i=a_2^{\lambda_i}l_i$, $a_2\nmid l_i$, $\lambda_i\geqslant 0$, $i=1,\ \cdots,\ s$, $l=l_1\cdots l_s$, 乘 S_m^n 两端以 $a_2^{k-1}l$ 得

$$a_2^{k-1}lS_m^n=\frac{l}{a_2}+M, \tag{1}$$

其中 $\frac{l}{a_2}$ 一项是由 $\frac{a_2^{k-1}l}{a_t}=\frac{a_2^{k-1}l}{a_2^k}$ 一项得来，其余各项都是整数，其和设为 M, 由(1)可知 S_m^n 不是整数，如果 S_m^n 是整数，由(1)得

$$a_2^klS_m^n-a_2M=l, \tag{2}$$

(2)的左端是 a_2 的倍数，与 $a_2\nmid l$ 矛盾.

注. 由此题可立即推得 $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2u-1}$ $(u>1)$ 不是整数，以及 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{3u+1}+\frac{1}{3u+2}$ $(u\geqslant 0)$ 不是整数.

5. 设 $1\leqslant a\leqslant n$，则存在 $k(1\leqslant k\leqslant a)$ 个正整数 $x_1<x_2<\cdots<x_k$，使得

$$\frac{a}{n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}. \tag{1}$$

证. 设 x_1 是最小的正整数使得

$$\frac{1}{x_1}\leqslant\frac{a}{n},$$

如果 $\frac{a}{n}=\frac{1}{x_1}$，则(1)已求得；如果 $\frac{a}{n}\neq\frac{1}{x_1}$，则 $x_1>1$，令

$$\frac{a}{n}-\frac{1}{x_1}=\frac{ax_1-n}{nx_1}=\frac{a_1}{nx_1},$$

其中 $ax_1-n=a_1>0$，由于 x_1 的最小性，有 $\frac{1}{x_1-1}>\frac{a}{n}$，故 $ax_1-n<a$ 即 $a_1<a$；再设 x_2 是最小的正整数使得

$$\frac{1}{x_2}\leqslant\frac{a_1}{nx_1},$$

如果 $\frac{1}{x_2}=\frac{a_1}{nx_1}$，则(1)已求得；如果 $\frac{a_1}{nx_1}\neq\frac{1}{x_2}$，则 $x_2>1$，

$$\frac{a_1}{nx_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{ax_2-nx_1}{nx_1x_2}=\frac{a_2}{nx_1x_2},$$

其中 $ax_2-nx_1=a_2>0$，由于 $\frac{1}{x_2-1}>\frac{a_1}{nx_1}$，故 $a_2<a_1<a$. 如此继续下去，可得 $a>a_1>a_2>\cdots a_k=0$，而 $1\leqslant k\leqslant a$，且存在 k 个正整数 $x_1<x_2<\cdots<x_k$，使得(1)成立.

注. 当 $0<a<n$，$(a, n)=1$，n 为奇数时，要求 $x_1, \cdots, x_k$

全为奇数，(1)是否存在?

6. 设$(a, b)=1$，$a+b\neq 0$，且p是一个奇素数，则

$$\left(a+b, \frac{a^p+b^p}{a+b}\right)=1 \text{ 或 } p.$$

证．设$\left(a+b, \dfrac{a^p+b^p}{a+b}\right)=d$，则$a+b=dt$，$\dfrac{a^p+b^p}{a+b}=ds$，于是

$$\begin{aligned} d^2st&=a^p+b^p=a^p+(dt-a)^p \\ &=d^pt^p-pad^{p-1}t^{p-1}+\cdots+pdta^{p-1}, \end{aligned}$$

上式两端约去dt，可得

$$ds=d^{p-1}t^{p-1}-pad^{p-2}t^{p-2}+\cdots+pa^{p-1}, \tag{1}$$

由(1)可得

$$d\,|\,pa^{p-1}, \tag{2}$$

我们可以证明d、a互素．因为若设$(d, a)=d_1$，如果$d_1>1$，则d_1有素因数q，$q|d_1$，$q|d$，$q|a$，而$d|a+b$，故$q|a+b$，推出$q|b$，与$(a, b)=1$矛盾，因此$(d, a)=1$，从(2)推出$d|p$，于是$d=1$或p，这就证明了我们的论断．

7. 证明

1) 设α是有理数，b是最小的正整数使得$b\alpha$是一个整数，如c和$c\alpha$是整数，则$b|c$．

2) 设p是素数，$p\nmid a$，b是最小的正整数使$\dfrac{ba}{p}$是一个整数，则$b=p$．

证．由带余除法

$$c=bq+r, \quad 0\leqslant r<b,$$

故

$$r\alpha=(c-bq)\alpha=c\alpha-bq\alpha$$

是一个整数，如果$r\neq 0$，与b的选择矛盾，故$r=0$，即$b|c$，这就证明了1)．

由于 $p\cdot\dfrac{a}{p}$ 也是一个整数，由结果1) 知 $b|p$，故 $b=p$ 或 1，由于 $p\nmid a$，故 $\dfrac{a}{p}$ 不是整数，所以 $b\neq1$，于是推得 $b=p$，这就证明了 2)。

注．利用此题的结果可证整数的唯一分解定理．

8．设 $a>0$, $b>0$，且 $a>b$，设用辗转相除法求 (a,b) 时所进行的除法次数为 k，b 在十进制中的位数是 l，则

$$k\leqslant 5l.$$

证．考察斐波那契数列 $\{u_n\}$：

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\qquad (1)$$

首先证明数列(1)的一个性质：

$$u_{n+5}>10u_n,\ n\geqslant2,\qquad (2)$$

$n=2$ 时，$u_2=1$，$u_7=13$ 故(2)成立．设 $n\geqslant3$，

$$\begin{aligned}u_{n+5}&=u_{n+4}+u_{n+3}=2u_{n+3}+u_{n+2}=3u_{n+2}+2u_{n+1}\\&=5u_{n+1}+3u_n=8u_n+5u_{n-1},\end{aligned}$$

因为 $$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\leqslant2u_{n-1},$$

故 $$2u_n\leqslant4u_{n-1},$$

这样 $$u_{n+5}=8u_n+5u_{n-1}>8u_n+4u_{n-1}\geqslant10u_n.$$

由(2)可得

$$u_{n+5t}>10^t u_n,\ n=2,\ 3,\ \cdots;\ t=1,\ 2,\ \cdots,\qquad (3)$$

现设 $a=n_0$，$b=n_1$，用辗转相除法得

$$\left.\begin{array}{ll}n_0=q_1n_1+n_2, & 0<n_2<n_1,\\ n_1=q_2n_2+n_3, & 0<n_3<n_2,\\ \quad\cdots\cdots & \quad\cdots\cdots\\ n_{k-2}=q_{k-1}n_{k-1}+n_k, & 0<n_k<n_{k-1},\\ n_{k-1}=q_kn_k, & \end{array}\right\}\qquad (4)$$

因为 $q_k\geqslant2$，故由(4)得

$$n_{k-1}=q_k n_k\geqslant 2n_k\geqslant 2=u_3,$$
$$n_{k-2}\geqslant n_{k-1}+n_k\geqslant u_3+u_2=u_4,$$
$$n_{k-3}\geqslant n_{k-2}+n_{k-1}\geqslant u_3+u_4=u_5,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$n_1\geqslant n_2+n_3\geqslant u_k+u_{k-1}=u_{k+1},$$
如果 $k>5l$ 即 $k\geqslant 5l+1$, 则 $n_1\geqslant u_{k+1}\geqslant u_{5l+2}$, 由(3)得
$$n_1\geqslant u_{5l+2}>10^l u_2=10^l, \tag{5}$$
因为 n_1 的位数是 l, 故(5)不能成立,这就证明了 $k\leqslant 5l$.

注. 存在正整数 a 和 b 使 $k=5l$. 例如 $a=144$, $b=89$, 有

$$144=89+55,$$
$$89=55+34,$$
$$55=34+21,$$
$$34=21+13,$$
$$21=13+8,$$
$$13=8+5,$$
$$8=5+3,$$
$$5=3+2,$$
$$3=2+1,$$
$$2=2,$$
以上作了 10 次除法,而 b 是二位数,故 $k=5l$.

9. 设 p_s 表示全部由 1 组成的 s 位(十进制)数, 如果 p_s 是一个素数,则 s 也是一个素数.

证. 用反证法. 如果 $s=ab$, $1<a<s$, 则
$$p_s=1+10+\cdots+10^{s-1}=\frac{10^s-1}{9}=\frac{10^{ab}-1}{9},$$
因为 $10^a-1\mid 10^{ab}-1$, 故 $\dfrac{10^a-1}{9}\Bigg|\dfrac{10^{ab}-1}{9}=p_s$, 而

$$1<\frac{10^a-1}{9}<p_s,$$

这与 p_s 是素数矛盾.

注. 这个结论反过来不真. 如 $p_3=111=3\cdot 37, p_5=11111=41\cdot 271$, 等等. 但是, 也存在 p_s 是素数, 如 p_2, p_{19}, p_{23}, p_{317} 都是素数, 这是迄今所知道的这种素数的全部, 而且 p_{317} 是在发现 p_{23} 几乎 50 年后, 在 1978 年才用电子计算机算出来的. 猜测下一个这样的素数很可能是 p_{1031}, 但该猜测尚未得到证明. 至于回答是否有无穷多个 p_s 为素数的问题, 是非常困难的. 在这里, 我们还可以提出下面这样的问题. 我们看到 83 的数位上的数字之和 $8+3=11$ 是一个素数, 那么是否有无限多个素数, 这些素数数位上的数字之和还是素数? 看来这也是一个非常困难的问题.

10. 设 $n>1$, $m=2^{n-1}(2^n-1)$, 证明: 任何一个 $k(1\leqslant k\leqslant m)$ 都可以表示成 m 的(部分或全部)不同因数的和.

证. 当 $1\leqslant k\leqslant 2^n-1$ 时, 由于

$a_0+a_1\cdot 2+\cdots+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}$, $a_i=0$ 或 1, $i=0, 1, \cdots, n-1$,

正好给出了 $0, 1, 2, \cdots, 2^n-1$, 所以此时 k 是 2^{n-1} 的不同因数 $1, 2, \cdots, 2^{n-1}$ 的部分或全部的和.

再设 $2^n-1<k\leqslant m$, 有

$$k=(2^n-1)t+r,\ 0\leqslant r<2^n-1,\ t\leqslant 2^{n-1}, \tag{1}$$

由于 r 和 t 都是 $1, 2, \cdots, 2^{n-1}$ 中一些数的和, 可设

$$t=t_1+\cdots+t_u,\ 1\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_u\leqslant 2^{n-1},$$

$$r=r_1+\cdots+r_v,\ 1\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_v\leqslant 2^{n-1},$$

代入(1)得

$$k=(2^n-1)t_1+\cdots+(2^n-1)t_u+r_1+\cdots+r_v, \tag{2}$$

$(2^n-1)t_j|m$, $j=1, \cdots, u$, 因 $n>1$, 所以 $(2^n-1)t_j\geqslant 2^n-1>$

2^{n-1}, (2) 表明 k 表成了 m 的部分或全部不同因数的和.

11. 设 $k\geqslant 2$, 且当 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ [\sqrt[k]{n}]$时, 都有 $j|n$, 则

$$n<p_{2k}^{k}, \tag{1}$$

这里 p_{2k} 表示第 $2k$ 个素数.

证. 设 1, 2, $\cdots$, $[\sqrt[k]{n}]$的最小公倍数为 m, 则可设

$$m=p_1^{m_1}\cdots p_l^{m_l},$$

其中 $p_1,\ \cdots,\ p_l$ 是 1, 2, $\cdots$, $[\sqrt[k]{n}]$中出现过的素数, 则显然有

$$p_l\leqslant\sqrt[k]{n}<p_{l+1},\ p_\lambda^{m_\lambda}\leqslant\sqrt[k]{n}<p_\lambda^{m_\lambda+1},\ m_\lambda\geqslant 1,\ \lambda=1,\ \cdots,\ l,$$

由于 n 是 $1,2,\cdots,[\sqrt[k]{n}]$ 这些数的一个公倍数, 所以 $m\leqslant n$. 而 $\sqrt[k]{n}<p_\lambda^{m_\lambda+1}\leqslant p_\lambda^{2m_\lambda}$, $\lambda=1,\ \cdots,\ l$. 把这 l 个式子相乘, 得

$$(\sqrt[k]{n})^l<m^2\leqslant n^2, \tag{2}$$

观察(2)式中的指数得出 $\dfrac{l}{k}<2$, 即得 $p_l<p_{2k}$, $p_{2k}\geqslant p_{l+1}$, 故

$$\sqrt[k]{n}<p_{l+1}\leqslant p_{2k},$$

这就证明了(1)式.

12. 设 $n>0$, $a\geqslant 2$, 则 n^a 能够表示成 n 个连续的奇数的和.

证. 如果 n 是偶数则

$$\begin{aligned}n^a&=nn^{a-1}\\&=(n^{a-1}-n+1)+(n^{a-1}-n+3)+\cdots+(n^{a-1}-3)+(n^{a-1}-1)\\&\quad+(n^{a-1}+n-1)+(n^{a-1}+n-3)+\cdots+(n^{a-1}+3)+(n^{a-1}+1),\end{aligned}$$

右端是 n 个连续的奇数的和.

如果 n 是奇数, 则

$$\begin{aligned}n^a=n^{a-1}&+(n^{a-1}+2)+(n^{a-1}+4)+\cdots+(n^{a-1}+n-1)\\&+(n^{a-1}-2)+(n^{a-1}-4)+\cdots+(n^{a-1}-n+1),\end{aligned}$$

右端仍是 n 个连续的奇数的和.

13. 证明不定方程

$$x^{2n+1}=2^r\pm 1 \tag{1}$$

在 $x>1$ 时，x, n, r 无正整数解.

证. 如(1)有正整数解 x, n, r, 由(1)可得

$$x^{2n+1}\pm 1=(x\pm 1)(x^{2n}\mp x^{2n-1}+\cdots\mp x+1)=2^r, \tag{2}$$

在 $x>1$ 时，易证 $x^{2n}\mp x^{2n-1}+\cdots\mp x+1$ 大于 1 且为奇数，故存在奇因数 p, 满足

$$p\mid x^{2n}\mp x^{2n-1}+\cdots\mp x+1,$$

而(2)的右端为 2^r, 于是(2)不能成立.

14. 证明不定方程

$$x^3+y^3+z^3=x+y+z=3 \tag{1}$$

仅有四组整数解$(x, y, z)=(1, 1, 1)$, $(-5, 4, 4)$, $(4, -5, 4)$, $(4, 4, -5)$.

证. (1)可写为

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3, & (2)\\ z=3-(x+y), & (3)\end{cases}$$

把(3)代入(2)可得

$$8-9x-9y+3x^2+6xy+3y^2-x^2y-xy^2=0,$$

上式可因式分解为

$$8-3x(3-x)-3y(3-x)+xy(3-x)+y^2(3-x)=0.$$

故对该方程的解 x 必有

$$3-x\mid 8,$$

故 $3-x$ 只可能为 ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, 即 x 可能为 -5、-1、1、2、4、5、7、11, 设 $x=-5$, 代入(2)和(3)可得

$$y^3+z^3=128,\ y+z=8, \tag{4}$$

由 (4) 可解出 (1) 的一组解 $(-5, 4, 4)$, 用同样的方法，设 $x=-1$, 1, 2, 4, 5, 7, 11, 可得 (1) 的另三组解 $(1, 1, 1)$,

$(4,\ -5,\ 4),\ (4,\ 4,\ -5)$.

15. 证明：对于 $\leqslant 2n$ 的任意 $n+1$ 个正整数中，至少有一个被另一个所整除.

证. 设

$$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}\leqslant 2n,$$

写

$$a_i=2^{\lambda_i}b_i,\ \lambda_i\geqslant 0,\ 2\nmid b_i,\ i=1,\ \cdots,\ n+1,$$

其中 $b_i<2n$，因为在 $1,\ 2,\ \cdots,\ 2n$ 中只有 n 个不同的奇数 $1,\ 3,\ \cdots,\ 2n-1$，故在 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n+1}$ 中至少有两个相同，设

$$b_i=b_j,\ 1\leqslant i<j\leqslant n+1,$$

于是在 $a_i=2^{\lambda_i}b_i$ 和 $a_j=2^{\lambda_j}b_j$ 中，由 $a_i<a_j$ 知 $\lambda_i<\lambda_j$，故

$$a_i\mid a_j.$$

16. 设 n 个整数

$$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant 2n$$

中任意两个整数 $a_i,\ a_j$ 的最小公倍数 $[a_i,\ a_j]>2n$，则 $a_1>\left[\dfrac{2n}{3}\right]$.

证. 用反证法. 如果 $a_1\leqslant\left[\dfrac{2n}{3}\right]\leqslant\dfrac{2n}{3}$，则 $3a_1\leqslant 2n$. 由上题，在 $\leqslant 2n$ 的 $n+1$ 个数

$$2a_1,\ 3a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

中，如果 $2a_1,\ 3a_1$ 不与 $a_2,\ \cdots,\ a_n$ 中的任一个相等，则至少有一个数除尽另一个，由于 $2a_1\nmid 3a_1,\ 3a_1\nmid 2a_1$，故可设

$$2a_1\mid a_j,\ 2\leqslant j\leqslant n,\tag{1}$$

或

$$3a_1\mid a_j,\ 2\leqslant j\leqslant n,\tag{2}$$

或

$$a_j\mid 2a_1,\ 2\leqslant j\leqslant n,\tag{3}$$

或

$$a_j | 3a_1,\ 2 \leqslant j \leqslant n, \tag{4}$$

或

$$a_i | a_j,\ 2 \leqslant i < j \leqslant n, \tag{5}$$

若 $2a_1$ 或 $3a_1$ 和某一 a_j 相等,则可归为(1)或(2).

由(1)得$[a_1, a_j] \leqslant [2a_1, a_j] = a_j \leqslant 2n$, 由(2)得$[a_1, a_j] \leqslant [3a_1, a_j] = a_j \leqslant 2n$, 由(3)得$[a_1, a_j] \leqslant [2a_1, a_j] = 2a_1 \leqslant 2n$, 由(4)得$[a_1, a_j] \leqslant [3a_1, a_j] = 3a_1 \leqslant 2n$, 由(5)得$[a_i, a_j] = a_j \leqslant 2n$, 都与$[a_i, a_j] > 2n$矛盾, 故 $a_1 > \left[\frac{2n}{3}\right]$.

17. 设 k 个整数

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$$

中,任意两个数 a_i, a_j 的最小公倍数$[a_i, a_j] > n$, 则

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < \frac{3}{2}.$$

证. 首先证明

$$k \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right], \tag{1}$$

如果(1)不成立, 则 $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$, 在 $n=2t$ 时, $k > \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{2t+1}{2}\right] = t$, 用15题的结果知, 存在某一对 i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$, 有 $a_i | a_j$, 而$[a_i, a_j] = a_j \leqslant n$, 与题设$[a_i, a_j] > n$不合. 如果 $n = 2t+1$ 时, $k > \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{2t+2}{2}\right] = t+1$, 因为 1, 2, $\cdots$, $n = 2t+1$ 中只有 $t+1$ 个奇数, 因而其中的 k 个数 a_1, a_2, $\cdots$, a_k 中仍有某一对 i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$, 使得 $a_i | a_j$, 这就证明了(1)式成立.

另一方面,在下列全部数中:

$$\left.\begin{array}{l}ba_1,\ \left(b=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\dfrac{n}{a_1}\right]\right),\\ ba_2,\ \left(b=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\dfrac{n}{a_2}\right]\right),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ ba_k,\ \left(b=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\dfrac{n}{a_k}\right]\right),\end{array}\right\}\tag{2}$$

没有两个相等. 因为如果(2)中的数有两个是相等的, 可设

$$b'a_i=b''a_i,\ 1\leqslant b'<b''\leqslant\left[\frac{n}{a_i}\right],\ 1\leqslant i\leqslant k,\tag{3}$$

或

$$b'a_i=b''a_j,\ 1\leqslant b'\leqslant\left[\frac{n}{a_i}\right],\ 1\leqslant b''\leqslant\left[\frac{n}{a_j}\right],\ 1\leqslant i<j\leqslant k,\tag{4}$$

显然(3)式不可能成立. 由(4)得

$$[a_i,\ a_j]\leqslant[a_i,\ b''a_j]=[a_i,\ b'a_i]=b'a_i\leqslant n,$$

与题设不合, 故(4)式也不能成立.

易知 $a_1\neq1$, 否则 $[a_1,\ a_2]=[1,\ a_2]=a_2\leqslant n$, 与题设不合, 因此(2)中的数都不是1, 而(2)中每个数$\leqslant n$, 且无两个相等, 所以(2)中总共有 $\leqslant n-1$ 个数, 即得

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right]\leqslant n-1,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i}-k<\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right]\leqslant n-1,\ 即\ \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i}<n-1+k,$$

再由(1)得

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i}<n-1+k\leqslant n-1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\leqslant n-1+\frac{n+1}{2}$$
$$=\frac{3n-1}{2}<\frac{3n}{2},$$