Gailülun Jichu

概率论基础

金　戈编

吉林人民出版社

概率论基础

金戈编

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行
长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　7.5印张　163,000字
1983年10月第1版　1983年10月第1次印刷
印数：1—7,160册
统一书号：13091·151　定价：0.67元

前　　言

随着我国社会主义建设事业的飞速发展，概率论在科技事业、工农业生产中的应用日益广泛．因此，除了在大学作为一门课程外，中学数学中也适当加入了概率论初步知识．但是，初学概率论者往往因其抽象而感到有一定困难．诸如概率统计、解题方法不易掌握等

本书就是以初等数学为工具，力求通俗简明地介绍概率论的基础知识和它的一些简单应用．

在本书的各章节中，除有概率论的基础知识、定理、定义、公式外，还配有一些例题作解法示范，每节后均安排一些练习题，书后附有答案，较难的则给以必要的提示．

本书适于中学高年级及大学低年级学生阅读，也可供中学数学教师及自学概率论的同志作为参考资料

在本书的编写过程中，吉林工业大学数学教研室沈恒范副教授曾提出许多宝贵意见，在此谨表示衷心的感谢

由于编者水平所限，书中存在的缺点和错误，恳请读者批评指正。

编　者

一九八二年于长春

目　　录

引　言

概率论是研究随机现象的规律性的科学。换言之，它是从量的侧面研究随机现象的统计规律性的数学学科。概率论的目的不仅是要把某些概率计算出来，更主要的目的在于发现客观世界中一般的规律并作出正确判断和正确结论，从而解决客观世界中所存在的一系列问题，推动工农生产和科学技术事业不断向前发展。

(一) 随机现象

在客观实际之中，我们经常会遇到下面一类现象，例如：

i) 一位工人师傅，用同种原料、按照同样的操作规程、生产同一型号自行车后轴 经过对产品的检查，发现后轴的某一质量指标，比如后轴的长度，并不完全一样。若后轴标准长度是175mm，但实际生产的后轴有的大于175mm，有的小于175mm。

ii) 某一公社，用6％的六六六粉对大豆食心虫进行防治试验。秋后，取若干株大豆进行观测，发现每株大豆的虫食情况并不完全一样。有的虫食率不到5％，有的虫食率达10％以上。

iii) 一名高射炮手，使用同一门高射炮、按同样射击条

件（初速度为V_0，发射角为θ，风速、能见度相同，……）多次进行射击，结果炮弹并没有完全打在靶子上，而是散布在某一范围内。这种现象我们把它叫做炮弹散布。

iv）在一箱中有黑、白两种球，每次从箱中取出一个球、经过多次取出，结果每次取出的球可能是白球，也可能是黑球。

这些例子的共同特点是，在同一组基本条件（例 i ）中的原料、机器及操作规程相同；例ii）中土壤、种植条件、用药量相同；例iii）中射击条件相同；例 iv）中黑白两种球同在一个箱子里）下，经过多次观测或试验，结果并不完全一样，存在着一种偶然的变动。我们定义，在同样条件下多次进行同一试验、或多次观测同一现象，所得的结果并不完全一样，而往往有些差异，而且在每次试验或观测之前不能确切预料将出现什么结果，但是通过大量的测试和观察后，就其整体来看却呈现出一种严格的非偶然的规律性，这种现象叫做随机现象。

随着科学技术的不断发展，对试验或观测结果的精确程度要求愈来愈高。为此必须设法控制那些影响试验和观测结果的各种因素，但又不可能全部加以控制。所以产生随机偏差是不可避免的。因而如何掌握这种偶然变化规律，并运用这种规律指导实践，也是非常重要的。就象高射炮打飞机时，炮弹的散布区域往往比目标大，这时某些炮弹就不能命中目标，因此就需要研究射击的命中率是多少，为了打中飞机需要多少发炮弹等问题。类似的问题在实际中是很多的。因此必须开展对随机现象的研究，以便适应社会发展的需要。

(二) 随机现象的统计规律

随机现象有没有规律性呢？从表面上看，随机现象似乎是一种没有规律性的现象. 其实不然，虽然对随机现象作个别观测，一般看不出明显的规律性，但是观测大量的、同类的随机现象，就会发现有完全确定的规律.

例如，我们随便测两个自行车后轴的长度，从中看不出明显的规律性. 但是，我们观测几百个或几千个后轴的长度，从得到的大量数据中会发现，后轴的长度是服从某种明显的规律性的. 一般来说，后轴的平均长度是在175mm左右；长度越接近175mm的后轴越多，长度越远离175mm的后轴越少；在距175mm相等的范围内，如174.5—175mm和175mm—175.5mm，后轴长度落在这两个区间的可能性大致相同；等等. 对后轴长度观测得越多，这些规律性看得越明显.

又如我们随便掷一硬币，如果只掷两次，从中看不出出现"正面"或出现"反面"的规律性. 但是，我们如果掷几千次，从记载出现"正面"或"反面"的数据中发现，出现"正面"的次数大致上和出现"反面"的次数相等. 掷的次数越多它们出现的次数就越接近于相等.

这种在大量观测或试验中反应出来的规律性叫做随机现象的统计规律性.

由上述可知，虽然在同样条件下进行试验或观测，其结果有偶然性，但是当试验或观测次数较多时，就会发现在其偶然性后面隐藏着某种完全确定的规律. 恩格斯早就明确指出："被断定为必然的东西，是由纯粹的偶然所构成的，而所

谓偶然的东西，是一种有必然性隐藏在里面的形式。”① 概率论正是研究隐藏在偶然的东西里的某种完全确定的统计规律性的数学学科。

① 恩格斯：《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》，人民出版社1972年版，第35页。

第一章　随机事件及其概率

随机事件及其概率是概率论中两个基本概念．研究概率的性质及概率的计算是概率论中的基本问题．这些基本概念和基本问题就是我们将在第一、二、三章中研究的主要内容。

第一节　事件的定义及其分类

在生产实践和科学实验中，我们可以在一定的条件(S)下，通过试验和观测得到某些结果，我们把每一种试验和观测的结果叫做在条件(S)下的一个**事件**。

例如："在标准大气压下，水冷却到0℃时会结冰"，"掷一个五分硬币出正面"，"同性电互相吸引"，"从装有两个白球和3个黑球的箱子中取出两个球都是白球"等等，它们都是在一定条件下的事件．

当我们去仔细研究各种事件的时候，就会发现有些事件在一定的条件下是必然发生的．

例如："在标准大气压下，当水冷却到0℃时会结冰"；"在标准大气压下，水加热到100℃会沸腾"；"同性电互相排斥"；"锌和稀硫酸发生化学反应有氢气生成"，……．它们都是在一定的条件(S)下必然发生的事件。我们把这些在一定条件(S)下，必然发生的事件叫做**必然事件**。

另外，在我们研究各种事件的时候，还会发现有些事件在一定的条件下是不可能发生的。

例如："同性电互相吸引"；"掷一个五分硬币同时出现正、反面"；"从装有白球的箱子中取出一球是黑球"等等，都是必然不可能发生的事件。我们把这些在一定条件下，必然不可能发生的事件叫做**不可能事件**。

然而在自然界中，还有许许多多的事件，它们在一定的条件下可能发生也可能不发生。

例如：

i）做种子发芽试验，在同样的气温、土壤等条件下，同一品种有的发芽，有的就不发芽。对某一粒种子来说，在上述的气温、土壤等条件下，"种子发芽"这个事件就可能发生，也可能不发生。

ii）用同样的工艺过程和原料制造灯泡，有的可以使用1800小时以上，有的则不到1800小时就烧坏了。如果从一批灯泡中任意抽取一个，"它能使用1800小时以上"这种事件则既可能发生，也可能不发生。

iii）在同样的条件下，掷一个五分硬币"出现正面"这个事件可能发生，也可能不发生。

iv）用同样的原料、同样的生产工艺生产雷管。为了检查雷管的质量，我们取100支来进行检验。"没有次品"，"有一个次品"，"有两个次品"，……，"全部都是次品"这些事件都可能发生，也可能不发生。另外，还可以发现诸如"次品不多于5个"，"次品在1到5个之间"，"次品在5个以上"等等，这些事件也都是可能发生，也可能不发生的。

v）当我们在同样的条件下，从一个装有3个白球和3个黑球的箱子中，取出三个球，"出现一个以上白球"的事件

是可能发生的，也可能不发生（此时三个球全是黑球）。

我们把这些在一定条件（S）下可能发生，又可能不发生的事件叫做随机事件。

由上述可知，当条件（S）实现时，试验和观测的每一可能结果叫做事件，这种事件包括着必然事件、不可能事件及随机事件。由于概率论主要研究随机事件的统计规律，所以为了研究方便我们就把随机事件简称为事件，并用A、B、C、……来表示，而专用U表示必然事件，用V表示不可能事件。

另外我们还应该注意到在各种事件中，有的事件比较复杂，有的事件比较简单这一事实。例如在例iv）的随机试验中，事件“次品不多于5个”就是一个比较复杂的事件，它包括了“没有次品”、“有一个次品”、“有两个次品”、“有三个次品”、“有四个次品”、“有五个次品”这6个事件。而这6个事件却是比较简单的事件。因此在研究某一随机试验的事件时要注意分析事件的复杂程度。我们往往把做某一个随机试验时，在一定的研究范围中不能再“分解”的事件叫做基本事件；可以由若干个基本事件“复合”而成的事件叫做“复合事件”。

例如，“次品不多于五个”是一复合事件，它是由“没有次品”，“有一个次品”，…，“有五个次品”共六个基本事件复合而成的。

练习题　1—1

指出下列各事件中哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？

1．掷一个每面都有一记号，且记号依次取1，2，

3，4，5，6个点的正六面体①，上面不是出奇数点就是出偶数点的事件。

2. 掷一个五分硬币，既不出正面也不出反面的事件。

3. 在篮球比赛中，罚球得分的事件。

4. 养鸡厂在同样的条件下孵化鸡蛋，孵化出小鸡的事件。

5. 在同样条件下生产一定型钢材，拿一件来检验它是合格产品的事件；它是不合格产品的事件；它既不是合格产品又不是不合格产品的事件。

6. 某班派一名团员代表参加校团代会，这名团员不是男生就是女生的事件。

第二节　事件间的关系和运算

在很多实际问题里，往往同时涉及到几个事件，而这些事件又是互相联系的。例如，我们在考查某一个班级的学生出勤情况时，只有当这个班级的男生和女生都出勤，才能说这个班级的学生全部出勤。因此在考查出勤情况时就要涉及到下面一些事件："全班学生全部出勤"，"全班学生没有全部出勤"，"男生全部出勤"，"男生没有全部出勤"，"女生全部出勤"，"女生没有全部出勤"，"男女生都没有全部出勤"等等。这些事件之间显然是有联系的。下面我们就来研究一下常遇到的事件之间的关系及运算。

（一）包　　含

如果一个班级的男生没有全部出勤，那末该班学生就一

① 把这种正六面体称为骰子（tóu zi）或色子（shǎi zi）。

定不会全部出勤．对此，我们规定说“全班学生没有全部出勤”‘包含’该班“男生没有全部出勤”.记为:“男生没有全部出勤”$\subset$“全班学生没有全部出勤”.

定义1．如果事件A的发生，必然导致事件B的发生，则说B包含A（或者说A是B的特款）.记为:

$$A\subset B.$$

如果$A\subset B$，$B\subset A$同时成立，即在每次试验中，A与B或者都发生，或者都不发生，则说A与B等价，用$A=B$表示。

应该注意到，在概率论中，对于事件主要着眼于它在每次试验和观测中是否发生，以及它发生的可能性问题．而等价的两个事件，由于它们发生的可能性一样，所以，在概率论中就把两个等价的事件看成是没有区别的，而且在它们中间画等号表示之．

练习题 1—2

1．想一想:

（1）如果A表示:“取第2号球”的事件，它是否是事件B“取偶数号球的特款”?

（2）如果A表示:“平均温度不高于15℃”的事件，B表示“平均温度低于20℃”的事件，是否$A\subset B$?

（3）如果A表示“罚球得分”的事件，B表示“比赛中得分”的事件，是否A包含B?

（4）如果A表示掷一个骰子“出3的倍数点”的事件，B表示掷一个骰子“出3点”或“出6点”，是否$A=B$?

（二）和（或并）

事实上，如果一个班级的男生和女生中至少有一方面没有出全勤，则该班学生就没有出全勤。反之，如果全班学生没有出全勤，则在男生和女生中至少有一方面没有出全勤。这就是说："全班学生没有出全勤"等价于"男、女生中至少有一方面没有出全勤"。对此，我们说事件"全班学生没有出全勤"是"男生没有出全勤"与"女生没有出全勤"这两个事件的和（或并）。记为："全班学生没有出全勤" = "男生没有出全勤" + "女生没有出全勤"。

定义 2：事件A与B的和（或并）表示的是事件"A、B至少发生其一"。记作：

$$A + B \text{ 或 } A \cup B.$$

很显然A + B也就是事件："或A发生，或B发生，或A、B同时发生"。

类似地，事件"A_1，A_2，…，A_n至少有一个发生"称为事件A_1，A_2，…，A_n的和（或并），记为

$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 或 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$。

事件"A_1，A_2，……中至少有一个发生"称为可数个事件A_1，A_2，……的和（或并）。记为

$A_1 + A_2 + \cdots\cdots$ 或 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$。

练习题 1—2

2. 想一想：

（1）如果做掷骰子的试验，试问"出现偶数点"的事件是哪些基本事件的和？

（2）如果观测某电话交换台在上午九点至十点之间所

得呼唤次数．试问"出现呼唤次数为偶数"的事件是哪些基本事件的和？

（三）积（或交）

如果一个班级的男生和女生都全部出勤，那末该班学生就全部出勤；反之，如果一个班级学生全部出勤，则该班的男、女生必须出全勤．即"全班学生出全勤"等价于"男、女生都出全勤"．对此，我们说："全班学生出全勤"是"男生出全勤"与"女生出全勤"的积，并记为："全班学生出全勤"＝"男生出全勤"$\cap$"女生出全勤"．

定义 3：事件A与B的积（或交）表示的是事件"A、B同时发生"，记作：

$$AB \text{或} A\cap B.$$

类似地，"n个事件A_1，A_2，…，A_n都发生"也是一事件，称为A_1，A_2，…A_n的积（或交），记作：

$A_1A_2\cdots A_n$或$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$或$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$．

若A_1，A_2，……都发生，称为可数个事件A_1，A_2，……的积（或交），记作：

$A_1A_2\cdots\cdots$或$A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots$或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$．

练习题 1--2

3．想一想：

（1）如果观测某电话交换台在上午九点至十点之间的呼唤次数．试问事件"呼唤次数为偶数"与事件"呼唤次数为3的倍数"的积是哪些基本事件？

（2）事件"全体党、团员到楼前集合"是否是事件"党员到楼前集合"与"团员到楼前集合"的积（或交）？