

大学数学教程

第一册

罗亚平等



南京大学出版社

大学数学教程

第一册

韩继昌 罗亚平 王巧玲
范克新 王芳贵 曹祥炎

南京大学出版社

1996·南京

大学数学教程

(第一册)

罗亚平等

*

南京大学出版社出版

(南京大学校内 邮政编码: 210093)

江苏省新华书店发行 丹阳兴华印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 16.875 字数 437 千

1996年9月第1版 1996年9月第1次印刷

印数 1—1500

ISBN 7-305-02991-2/O·209

定价 21.50 元

(南大版图书若有印、装错误可向承印厂退换)

序

高等数学教材琳琅满目，其中优秀教材也数量众多。但随着现代科学技术的飞速发展，大量现代数学的思想、方法、内容已渗透到各学科的理论与应用的研究之中，而且也渗透到许多基础理论(非数学)专业的本科与研究生课程中。南京大学基础型人才培养基地“强化部”，为使学生有良好的科学素质和深厚的业务基础，以适应各学科之间日益渗透的发展趋势，要求在不增加太多学时的前提下，在传统高等数学中适当引进现代数学知识，为本科生后续物理课程提供深厚的数学基础。为提高学生的数学修养并使之受到现代数学思维的熏陶，我们编写了这套教材。内容有微积分、空间解析几何、线性代数、常微分方程、距离空间、算子与泛函、变分法、积分方程、群论、张量与外代数、微分流形等共 20 章，分三册出版。教材大纲在 1990 年由编者与强化部孙景李、卢德馨(二位物理学教授)共同制订，并经数学系黄正中教授等十位专家评审修改后确定。全套教材已在强化部、天文系使用 5 次，第 1~14 章为全体强化部学生的必修内容，分三学期讲授，总学时 270；第 15~20 章为物理类专业的必选课，用 90 学时讲授。

在编写时注意如下几点：

1. 选材。内容取材贯彻少而精原则。传统高等数学的内容按教委(89)教高司字101号“综合大学本科物理专业高等数学课程教学基本要求”；第14章“距离空间”则作为传统高等数学的延续和拓宽，它为学生从高等数学过渡到现代数学的学习架了一座桥。

2. 加强数学修养训练，概念叙述准确而严谨。注意加强逻辑非，“无穷小量”阶的估计，极限理论等训练。还将数直线上极限理论拓宽到距离空间的完备性、紧性。加强集合论基础知识，例如可

列集、基数,并引进流形上的微积分。大胆删去了传统高等数学中一些烦琐而用处不大的证明,在第14~20章中略去了一些很长或技巧性很高的证明。

3. 结构编排。全书统一处理分析、几何、代数等多学科中的概念、方法、理论。各部分之间有很强的连续性,前后呼应,使之成为比较有机的整体,同时各学科内容又相对集中。

4. 例题与习题。加强传统性计算训练。全书配备了大量启发性、典型性例题,并注意一题多解。每节后面都配有习题,在每册之后附有答案或提示。

5. 力求深入浅出,少而精,在推理证明中尽力做到层次清楚,基本思路突出。

6. 书中有部分内容用小字排印或打*号,在教学中可酌情选讲。

参加编写工作的有韩继昌、王巧玲、罗亚平、范克新、曹祥炎、王芳贵等六位同志。作者都是长期从事教学工作的中老年教师,不仅有丰富的教学经验,而且注意了解国内外高等数学的教学动态及有关专业的教学要求。在编写过程中每章都由二人以上讨论定稿,由韩继昌教授统稿。因此,本书是集体智慧的结晶。

本书的出版,得到了强化部领导卢德馨、桑志芹同志的大力支持,在编写过程中得到了黄正中、孙景李、唐述钊、许绍溥、姜东平、朱乃谦、金宁等同志的帮助,在此向他们表示衷心的感谢。

限于水平,不妥之处在所难免,敬请读者和使用本教材的教师批评指教。

编者

1996年6月

大学数学教程

第一册目录

1. 分析基础	(1)
§ 1.1 实数集 函数	(1)
1. 集合(1), 2. 实数集(2), 3. 数集的界与确界(3), 4. 逻辑符号(4), 5. 常用的等式与不等式(6), 6. 映射 函数 数列(8), §1.1习题(13)	
§ 1.2 极限的概念	(15)
1. 数列的极限(15), 2. 函数的极限(20), 3. 左极限 右极限(25), 4. 数列极限与函数极限的关系(27), §1.2习题(29)	
§ 1.3 极限的性质和运算法则	(30)
1. 存在有限极限的函数之局部性质(31), 2. 极限的四则运算(34), 3. 无穷小量及其性质(36), 4. 复合函数的极限(37), §1.3习题(41)	
§ 1.4 极限的存在准则	(44)
1. 实数系的连续性(44), 2. 确界定理 单调有界定理(45), 3. 两个重要极限(48), §1.4习题(53)	
§ 1.5 连续	(54)
1. 连续与间断(54), 2. 连续函数的局部性质与运算法则(57), 3. 严格单调连续函数的反函数的连续性(58), 4. 初等函数的连续性(60), 5. 闭区间上连续函数的性质(63), §1.5习题(68).	
§ 1.6 无穷小量的阶 不定型的极限	(70)
1. 无穷小(大)量的比较(70), 2. 无穷小量的阶(73), 3. 不定型的极限(76), §1.6习题(80).	
2. 一元函数的微分学	(82)
§ 2.1 导数与微分的概念	(82)

1. 引出导数的例子(82), 2. 导数的概念(83), 3. 微分的概念(88), §2.1 习题(90).	
§ 2.2 导数与微分的计算	(91)
1. 导数与微分的四则运算(91), 2. 复合函数的导数(93), 3. 反函数的导数(96), 4. 导数基本公式(98), §2.2 习题(102).	
§ 2.3 高阶导数与高阶微分	(103)
1. 高阶导数(103), 2. 高阶微分(106), §2.3 习题(107).	
§ 2.4 微分中值定理	(108)
1. 两个引理(108) 2. 中值定理(110), §2.4 习题(113).	
§ 2.5 罗必达法则	(114)
1. 求“ $\frac{0}{0}$ ”型不定型极限的法则(114), 2. 求“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型不定型极限的法则(117), 3. 求其他五种不定型极限(118), §2.5 习题(119).	
§ 2.6 泰勒公式	(120)
1. 泰勒公式(120), 2. 基本初等函数的麦克劳林公式(122), 3. 利用有限展开式求不定型极限(125), §2.6 习题(127).	
§ 2.7 利用导数研究函数的性质	(127)
1. 函数的增减性(127), 2. 函数的极值(129), 3. 最大值与最小值(131), 4. 函数的凸性(133), §2.7 习题(136).	
§ 2.8 利用导数作函数的图形	(137)
1. 曲线的渐近线(137), 2. 作函数的图形(139), §2.8 习题(143).	
§ 2.9 参数方程所确定的函数的导数	(144)
1. 平面曲线的参数方程(144), 2. 参数方程所确定的函数的导数及作图例(150), §2.9 习题(153).	
§ 2.10 方程的近似解	(154)
§2.10 习题(156).	
3. 一元函数的积分学	(157)
§ 3.1 定积分的概念 可积函数	(157)
1. 引出定积分的两个例子(157), 2. 定积分的定义(159), 3. 函数的R可积性(161), §3.1 习题(166).	
§ 3.2 定积分的性质	(166)

§3.2 习题(171).	
§ 3.3 原函数与不定积分	(172)
1. 原函数(172), 2. 变上限的积分(172), 3. 不定积分(174), 4. 牛 顿-莱布尼兹公式(175), 5. 基本积分公式(175), §3.3 习题(179).	
§ 3.4 换元积分法	(181)
1. 不定积分的凑微分法(182), 2. 不定积分的变量变换法(185), 3. 定积分的情况(187), §3.4 习题(189).	
§ 3.5 分部积分法 杂例	(191)
1. 分部积分法(191), 2. 杂例(195), §3.5 习题(199).	
§ 3.6 有理函数与三角函数有理式的积分	(199)
1. 有理函数的积分(199), 2. 三角函数有理式的积分(203), §3.6习题(207).	
§ 3.7 简单无理函数的积分及其他	(208)
1. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 型积分 ($ad-bc \neq 0$)(208),	
2. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b})dx$ 型积分(209),	
*3. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型积分 ($b^2-4ac \neq 0$)(209),	
4. 其他(211), §3.7 习题(212).	
§ 3.8 定积分的近似计算	(213)
1. 梯形公式(213), 2. 辛普生公式(抛物线公式)(214), §3.8 习题(216).	
§ 3.9 定积分在几何上的应用	(217)
1. 平面图形的面积(217), 2. 已知横截面面积的立体体积(221), 3. 平面曲线的弧长与弧微分(224), 4. 旋转面的面积(230), 5. 平面曲线的曲率(233), §3.9 习题(235).	
§ 3.10 定积分在物理上的应用	(236)
1. 质心坐标(236), 2. 变力作功(240), 3. 水压力(242), §3.10习题(244).	
4. 空间解析几何 向量	(245)
§ 4.1 向量 直角坐标	(245)
1. 向量的概念(245), 2. 向量的线性运算(246), 3. 向量在数轴	

上的投影(249), 4. 空间直角坐标系(250), §4.1 习题(256).	
§ 4.2 向量的数量积 向量积 混合积	(257)
1. 数量积(257), 2. 向量积(261), 3. 混合积(265), §4.2 习题(267).	
§ 4.3 平面	(268)
1. 平面方程(268), 2. 特殊位置的平面方程(270), 3. 点到平面的距离(271), 4. 平面的相互位置(272), §4.3 习题(274).	
§ 4.4 直线	(275)
1. 直线的方程(275), 2. 直线与平面的关系(278), 3. 直线间的关系(280), 4. 距离(281), 5. 有轴平面束(283), §4.4 习题(285).	
§ 4.5 几种常见的曲面	(287)
1. 曲面、曲线的方程(287), 2. 柱面方程(290), 3. 旋转面(292), 4. 锥面(294), 5. 直角坐标变换 常用二次曲面的图形(296), §4.5习题(305).	
§ 4.6 向量函数与空间曲线的参数方程	(306)
1. 空间曲线的参数方程(306), 2. 向量函数的导数(307), 3. 向量函数导数的物理意义与几何意义(310), *4. 空间曲线论的基本公式(313), §4.6 习题(319).	
5. 矩阵 行列式 线性代数方程组	(320)
§ 5.1 矩阵及其运称	(320)
1. 矩阵的概念(320), 2. 矩阵的线性运算(323), 3. 矩阵的乘法(324), 4. 转置矩阵(330), §5.1 习题(332).	
§ 5.2 矩阵的分块	(333)
§5.2 习题(340).	
§ 5.3 逆阵与初等变换	(341)
1. 逆阵(341), 2. 初等变换与初等阵(344), 3. 矩阵可逆的充要条件(351), 4. 用初等变换求逆阵(352), §5.3 习题(354).	
§ 5.4 行列式及其性质	(356)
1. n 阶行列式(356), 2. 行列式的性质(362), §5.4 习题(366).	
§ 5.5 行列式按行(列)展开	(368)
1. 行列式按一行(列)展开(368), *2. 拉普拉斯展开定理(375),	

- §5.5习题(377).
- § 5.6 用行列式求逆阵 克莱姆法则(380)
1. 用行列式求逆阵(380), 2. 克莱姆法则(382),
§5.6习题(386).
- § 5.7 向量组的线性无关(387)
1. n 维向量(387), 2. 线性相关与线性无关(388), 3. 等价向量组(393), 4. 向量组的极大无关组与秩(396), §5.7习题(398).
- § 5.8 矩阵的秩(399)
1. 矩阵的行秩、列秩与秩(399), 2. 秩的求法(402), §5.8习题(408).
- § 5.9 线性代数方程组(409)
1. 高斯消元法(409), 2. 线性代数方程组解的结构(413),
§5.9习题(421).
- 6. 多元函数的微分学**.....(424)
- § 6.1 多元函数 极限 连续(424)
1. n 维欧几里得空间(424), 2. $R^n \rightarrow R^m$ 的映射(428), 3. 多元函数的极限(430), 4. 多元函数的连续性(437), §6.1习题(439).
- § 6.2 偏导数 全微分(441)
1. 偏导数(441), 2. 全微分(444), 3. 复合函数微分法(449),
4. 曲面的切平面与法线(452), §6.2习题(454).
- § 6.3 高阶偏导数 泰勒公式(455)
1. 高阶偏导数(455), 2. 高阶微分(459), 3. 泰勒公式(461),
§6.3习题(464)
- § 6.4 隐函数及其微分法(464)
1. 由一个方程确定的隐函数(464), 2. 由方程组所确定的隐函数(向量值隐函数)(468), 3. 空间曲线的切线与法平面(474),
§6.4习题(476).
- § 6.5 向量值函数的微分法 函数的相关性(477)
1. 向量值函数的微分法(477), 2. 函数的相关性(482),
§6.5习题(484).
- § 6.6 二元函数的极值(484)
1. 二元函数的极值(484), 2. 条件极值——拉格朗日乘数法(489),

3. 最大值与最小值(493), 4. 最小二乘法(494), §6.6 习题(498).

§ 6.7 曲面的参数方程 (499)

1. 曲面的参数方程(499), 2. 切平面(502), *3. 曲面的第一、
第二基本形式(504), §6.7 习题(507).

习题答案 (509)

分析基础

数学分析的主要内容是微积分以及它的基本理论——极限理论。微积分是在17世纪由牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)创立,并在19世纪由波尔查诺(Bolzano, B.)、柯西(Ciuchy, A.-L.)、维尔斯特拉斯(Weierstrass, K)等数学家奠定严格的理论基础,这一理论基础就是极限理论。而极限理论又建立在实数理论的基础上。我们在承认实数理论的基础上直接讨论极限理论。

§ 1.1 实数集 函数

本节内容以后经常要用到,先集中介绍。其中部分内容在中学里已经学过,还有部分内容将在今后陆续给出证明。

1. 集合

具有某种特殊性质的一切事物组成的一个整体称为**集**(或称为**集合**),这些事物的每一个都称这个集合的**元素**。若 a 是集合 A 的元素,称 a 属于 A ,记为 $a \in A$;若 a 不是集合 A 的元素,称 a 不属于 A ,记为 $a \notin A$ 或 $a \notin A$ 。若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,称 A 是 B 的**子集**,记为, $A \subset B$,当 $A \subset B$ 并且存在元素 $x \in B$,而 $x \notin A$ 时,称 A 为 B 的**真子集**,记为 $A \subsetneq B$ 。不含任何元素的集合称为**空集**,记为 \emptyset 。集合通常可以表示为:

$$X = \{x \mid x \text{ 所满足的性质}\},$$

也可用将元素列举的方法表示集合。

若 A, B 是两个集合,由 A 中的元素以及 B 中的元素的全体所成的集合称为 A, B 的**并**,记为 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元素所组成的集合称为 A 与 B 的交, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 并且 } x \in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的那些元素所成的集称为 A 与 B 的差, 记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$, 即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

2. 实数集

我们不讨论实数的严格定义, 它涉及到实数理论. 直观地说, 一切正、负有限十进制小数、零及无限十进制小数统称为实数, 实数的全体所成的集记为 R ,

$$R = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$$

数轴是规定了原点, 单位长度及正方向的直线.

从中学所学的平面解析几何知道, 实数的全体与数轴上的点一一对应, 即对任一个实数 x , 在数轴上存在唯一的点与之对应, 因此, 今后常将“数 a ”说成“点 a ”.

实数集的下列子集在大学数学中是经常用到的:

非负实数集 $R_+ = \{0 \leq x < +\infty\}$;

有理数集 $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid q \neq 0, p, q \text{ 既约整数} \right\}$;

非负有理数集 $Q_+ = \{x | x \in Q, x \geq 0\}$;

整数集 $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$;

非负整数集 $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$;

自然数集 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$;

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$;

闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$;

左开右闭区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$;

左闭右开区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$;

无穷区间 $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,

$(-\infty, a) = \{x \mid -\infty < x < a\}$,

$(-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \leq a\}$,

$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$,

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\}$.

a 的 r 邻域 $U(a, r) = \{x \mid |x - a| < r\}$, 简记为 $U(a)$.

a 的右 r 邻域 $U_+(a, r) = \{x \mid 0 \leq x - a < r\}$, 简记为 $U_+(a)$.

a 的左 r 邻域 $U_-(a, r) = \{x \mid -r < x - a \leq 0\}$, 简记为 $U_-(a)$.

注: 上述各集合所使用的记号是本书的习惯用法.

3. 数集的界与确界

实数是有序的, 即任意两个实数 a, b 必须满足下列三个关系之一:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

由于实数有序, 可以定义实数集的上、下界, 最大、最小值与上、下确界的概念.

若 X 为一个数集, m, M 为两个实数, 如果对任意 $x \in X$ 有

$$x \leq M \quad (x \geq m),$$

则称 $M(m)$ 为数集 X 的上界(下界), 并称数集 X 是有上界的(有下界的), 否则称 X 无上界(无下界). 如果数集 X 既有上界又有下界, 则称数集 X 是有界的. 无上界、无下界的数集统称为无界集.

如果 $M(m)$ 是数集 X 的上界(下界)且 $M \in X (m \in X)$, 则称 $M(m)$ 为数集 X 的最大值(最小值).

数集 X 的最小上界称为数集 X 的上确界, 记为 $\sup_{x \in X} \{x\}$ 或 $\sup X$; 数集 X 的最大下界称为数集 X 的下确界, 记为 $\inf_{x \in X} \{x\}$ 或 $\inf X$.

M 为数集 X 的上确界等价于以下两个条件:

1° M 是数集 X 的一个上界, 即对任意 $x \in X$ 有 $x \leq M$.

2° M 是数集 X 的上界中的最小者, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x' \in X$, 使得 $x' > M - \varepsilon$.

同理, m 为数集 X 的下确界等价于以下两个条件:

1° 对任意 $x \in X$, 有 $x \geq m$.

2° 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x' \in X$, 使得 $x' < m + \varepsilon$.

4. 逻辑符号

为便于数学分析中许多概念、命题的描述与推导, 一个较好的途径是使用数理逻辑中的量词概念与量词符号, 将数学内容符号化. 这也能为学习大学数学中的难点——极限理论减少一些学习困难. 量词有两种:

全称量词 即“任意”, “全体”, “所有”, 记为 \forall . 符号 \forall 是将拉丁字母 A (英文单词 Any 的头一个字母) 上下倒过来写.

存在量词 即“存在某个”, “有些个”, 记为 \exists . 符号 \exists 是将拉丁字母 E (英文单词 Existence 的头一个字母) 左右反转过来写.

例如, “ $\forall x \in \mathbb{R}$ ”表示任意实数 x 或所有实数. “ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ ”表示 \mathbb{R} 中存在某个实数 x_0 , 此处的 x 和 x_0 称为**量词变量**.

除了量词符号 \forall, \exists 外, 还常用以下逻辑符号.

“ \Leftrightarrow ”: 充要条件或等价. 从 A 可推出 B , 又可从 B 推出 A , 称 A 是 B 的充分必要条件, 简称**充要条件**, 或称 A 与 B 是**等价的**.

利用逻辑符号, “数集 X 有上界”可简写为

$$“\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \text{ 有 } x \leq M”,$$

它由三个短句构成, 其中短句

$$“x \leq M”$$

是量词变量 M, x 所具有的性质.

“数集 X 无上界”与“数集 X 有上界”是相互否定的概念. 若数集 X 无上界, 则找不到 M , 使性质

$$“\forall x \in X, \text{ 有 } x \leq M”$$

能成立,这相当于 $\forall M \in \mathbb{R}$, 性质

$$“\forall x \in X, \text{ 有 } x \leq M”$$

都不成立,而性质“ $\forall x \in X, \text{ 有 } x \leq M$ ”不成立,在肯定语气下可用

$$“\exists x' \in X, \text{ 使 } x' > M”$$

描述. 注意,这时量词由“ \forall ”换成了“ \exists ”,而性质“ $x \leq M$ ”改为否定,即“ \leq ”换成了“ $>$ ”. 于是,在肯定语气下,“数集 X 无上界”可简写为

$$“\forall M \in \mathbb{R}, \exists x' \in X, \text{ 使 } x' > M”.$$

综上所述,在肯定语气下,有

数集 X 有上界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \text{ 有 } x \leq M$ 数集 X 无上界 $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists x' \in X, \text{ 使 } x' > M$

类似地有

数集 X 有下界 $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \text{ 有 } x \geq m$ 数集 X 无下界 $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}, \exists x' \in X, \text{ 使 } x' < m$

数集 X 有界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, \text{ 有 } x \leq M$ 数集 X 无界 $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists x' \in X, \text{ 使 } x' > M$

从上述例子可知,有上界与无上界、有下界与无下界、有界与无界,都是相互否定的概念. 要得到一个用量词符号描述的命题的否定命题时,可遵循如下的三条规则(在数理逻辑中,它可以给出证明):

- 1° 不改变原命题中语句的次序.
- 2° 把原命题中量词符号“ \forall ”换成“ \exists ”,“ \exists ”换成“ \forall ”(量词对偶法则).
- 3° 把原命题中所有量词变量所具有的性质改成否定,即将“ \leq ”、“ $<$ ”、“ \geq ”、“ $>$ ”、“ $=$ ”、“ \neq ”分别换成“ $>$ ”、“ \geq ”、“ $<$ ”、“ \leq ”、“ \neq ”、“ $=$ ”.

这种方法今后在分析描述中将反复使用.

5. 常用的等式与不等式

本章以及后面的一些章节中,常用到一些重要的等式与不等式,为使用方便,现列举部分如下,大部分只给出证明的提示,有兴趣的读者,不妨自行验证.

1) 等式

$$(1) 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (\text{数学归纳法}).$$

$$(2) 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (\text{数学归纳法}).$$

$$(3) 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1) \quad (\text{可用(2)推出}).$$

$$(4) 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 \quad (\text{数学归纳法}).$$

$$(5) 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

$$(6) 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

其中 C 称为欧拉(Euler)常数(见 §1.4 例 2).

$$(7) \sin \varphi = 2^n \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \cdots \cos \frac{\varphi}{2^n} \sin \frac{\varphi}{2^n}.$$

$$(8) \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ 个}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad \left(\text{由 } \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^2} \right)$$

2) 不等式

(1) 柯西不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$, 为任意两组实数, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

(提示: 由 $\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 再用二次三项式 $ax^2 + 2bx + c (a > 0)$

对任意 x 均取非负值 $\Leftrightarrow b^2 - ac \leq 0$).

(2) 伯努利(Bernoulli)不等式