大学数学教程

第一册

罗亚平 等

南京大学出版社

大学数学教程

第一册

韩继昌 罗亚平 王巧玲
范克新 王芳贵 曹祥炎

南京大学出版社
1996·南京

大学数学教程

（第一册）

罗亚平　等

*

南京大学出版社出版
（南京大学校内　邮政编码：210093）
江苏省新华书店发行　　丹阳兴华印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 16.875　字数 437 千
1996 年 9 月第 1 版　　1996 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—1500
ISBN 7-305-02991-2/O·209
定价 21.50 元
（南大版图书若有印、装错误可向承印厂退换）

序

高等数学教材琳琅满目，其中优秀教材也数量众多．但随着现代科学技术的飞速发展，大量现代数学的思想、方法、内容已渗透到各学科的理论与应用的研究之中，而且也渗透到许多基础理论（非数学）专业的本科与研究生课程中．南京大学基础型人才培养基地“强化部”，为使学生有良好的科学素质和深厚的业务基础，以适应各学科之间日益渗透的发展趋势，要求在不增加太多学时的前提下，在传统高等数学中适当引进现代数学知识，为本科生后续物理课程提供深厚的数学基础。为提高学生的数学修养并使之受到现代数学思维的熏陶，我们编写了这套教材．内容有微积分、空间解析几何、线性代数、常微分方程、距离空间、算子与泛函、变分法、积分方程、群论、张量与外代数、微分流形等共20章，分三册出版．教材大纲在1990年由编者与强化部孙景李、卢德馨（二位物理学教授）共同制订，并经数学系黄正中教授等十位专家评审修改后确定。全套教材已在强化部、天文系使用5次，第1～14章为全体强化部学生的必修内容，分三学期讲授，总学时270；第15～20章为物理类专业的必选课，用90学时讲授．

在编写时注意如下几点：

1．选材．内容取材贯彻少而精原则．传统高等数学的内容按教委(89)教高司字101号“综合大学本科物理专业高等数学课程教学基本要求”；第14章“距离空间”则作为传统高等数学的延续和拓宽，它为学生从高等数学过渡到现代数学的学习架了一座桥．

2．加强数学修养训练，概念叙述准确而严谨．注意加强逻辑非，“无穷小量”阶的估计，极限理论等训练．还将数直线上极限理论拓宽到距离空间的完备性、紧性．加强集合论基础知识，例如可

列集、基数，并引进流形上的微积分。大胆删去了传统高等数学中一些烦琐而用处不大的证明，在第14～20章中略去了一些很长或技巧性很高的证明。

3．结构编排．全书统一处理分析、几何、代数等多学科中的概念、方法、理论．各部分之间有很强的连续性，前后呼应，使之成为比较有机的整体，同时各学科内容又相对集中。

4．例题与习题．加强传统性计算训练．全书配备了大量启发性、典型性例题，并注意一题多解．每节后面都配有习题，在每册之后附有答案或提示。

5．力求深入浅出，少而精，在推理证明中尽力做到层次清楚，基本思路突出。

6．书中有部分内容用小字排印或打*号，在教学中可酌情选讲。

参加编写工作的有韩继昌、王巧玲、罗亚平、范克新、曹祥炎、王芳贵等六位同志．作者都是长期从事教学工作的中老年教师，不仅有丰富的教学经验，而且注意了解国内外高等数学的教学动态及有关专业的教学要求．在编写过程中每章都由二人以上讨论定稿，由韩继昌教授统稿．因此，本书是集体智慧的结晶。

本书的出版，得到了强化部领导卢德馨、桑志芹同志的大力支持，在编写过程中得到了黄正中、孙景李、唐述钊、许绍溥、姜东平、朱乃谦、金宁等同志的帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

限于水平，不妥之处在所难免，敬请读者和使用本教材的教师批评指教。

编者

1996年6月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

大 学 数 学 教 程

第一册目录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

分析基础　1

数学分析的主要内容是微积分以及它的基本理论——极限理论。微积分是在17世纪由牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)创立，并在19世纪由波尔查诺(Bolzano, B.)、柯西(Ciuchy, A.-L.)、维尔斯特拉斯(Weierstrass, K)等数学家奠定严格的理论基础，这一理论基础就是极限理论。而极限理论又建立在实数理论的基础上。我们在承认实数理论的基础上直接讨论极限理论。

§1.1　实数集　函数

本节内容以后经常要用到，先集中介绍。其中部分内容在中学里已经学过，还有部分内容将在今后陆续给出证明。

1. 集合

具有某种特殊性质的一切事物组成的一个整体称为**集**(或称为**集合**)，这些事物的每一个都称这个集合的**元素**。若 a 是集合 A 的元素，称 a 属于 A，记为 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，称 a 不属于 A，记为 $a\overline{\in} A$ 或 $a\notin A$。若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，称 A 是 B 的**子集**，记为，$A\subset B$，当 $A\subset B$ 并且存在元素 $x\in B$，而 $x\notin A$ 时，称 A 为 B 的**真子集**，记为 $A\subsetneq B$。不含任何元素的集合种为**空集**，记为 $\varnothing$。集合通常可以表示为：

$$X=\{x\,|\,x \text{ 所满足的性质}\},$$

也可用将元素列举的方法表示集合。

若 A,B 是两个集合，由 A 中的元素以及 B 中的元素的全体所成的集合称为 A，B 的**并**，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\ 或\ x\in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元素所组成的集合称为 A 与 B 的**交**，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\ 并且\ x\in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的那些元素所成的集称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$ 或 $A\backslash B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A\ 但\ x\overline{\in} B\}.$$

2. 实数集

我们不讨论实数的严格定义，它涉及到实数理论. 直观地说，一切正、负有限十进制小数、零及无限十进制小数统称为实数，实数的全体所成的集记为 R，

$$\mathrm{R}=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

数轴是规定了原点，单位长度及正方向的直线.

从中学所学的平面解析几何知道，实数的全体与数轴上的点一一对应，即对任一个实数x，在数轴上存在唯一的点与之对应，因此，今后常将"数 a"说成"点 a".

实数集的下列子集在大学数学中是经常用到的：

非负实数集　$\mathrm{R}_+=\{0\leqslant x<+\infty\}$；

有理数集　$\mathrm{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,q\neq 0,\ p、q\ 既约整数\right\}$；

非负有理数集　$\mathrm{Q}_+=\{x\mid x\in Q, x\geqslant 0\}$；

整数集　$\mathrm{Z}=\{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}$；

非负整数集　$\mathrm{Z}_+=\{0, 1, 2, \cdots\}$；

自然数集　$\mathrm{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$；

开区间　$(a, b)=\{x\mid a<x<b\}$；

闭区间　$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

左开右闭区间　$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

左闭右开区间　$[a, b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；

无穷区间 $(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$,

$(-\infty, a)=\{x \mid -\infty<x<a\}$,

$(-\infty, a]=\{x \mid -\infty<x\leqslant a\}$,

$(a, +\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}$,

$[a, +\infty)=\{x \mid a\leqslant x<+\infty\}$.

a 的 r 邻域 $U(a, r)=\{x \mid |x-a|<r\}$,简记为 $U(a)$.

a 的右 r 邻域 $U_+(a, r)=\{x \mid 0\leqslant x-a<r\}$,简记为 $U_+(a)$.

a 的左 r 邻域 $U_-(a, r)=\{x \mid -r<x-a\leqslant 0\}$,简记为 $U_-(a)$.

注：上述各集合所使用的记号是本书的习惯用法.

3. 数集的界与确界

实数是有序的,即任意两个实数 a, b 必须满足下列三个关系之一：

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b.$$

由于实数有序,可以定义实数集的上、下界，最大、最小值与上、下确界的概念.

若 X 为一个数集,m,M 为两个实数,如果对任意 $x\in X$ 有

$$x\leqslant M\,(x\geqslant m),$$

则称 $M(m)$ 为数集 X 的**上界(下界)**，并称数集 X 是**有上界**的(**有下界**的),否则称 X **无上界(无下界)**. 如果数集 X 既有上界又有下界,则称数集 X 是**有界**的. 无上界、无下界的数集统称为**无界集**.

如果 $M(m)$ 是数集 X 的上界（下界）且 $M\in X\,(m\in X)$，则称 $M(m)$ 为数集 X 的最大值(最小值).

数集 X 的最小上界称为数集 X 的**上确界**，记为 $\sup\limits_{x\in X}\{x\}$ 或 $\sup X$；数集 X 的最大下界称为数集 X 的**下确界**，记为 $\inf\limits_{x\in X}\{x\}$ 或 $\inf X$.

M 为数集 X 的上确界等价于以下两个条件：

1° M 是数集 X 的一个上界，即对任意 $x\in X$ 有 $x\leqslant M$。

2° M 是数集 X 的上界中的最小者，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in X$，使得 $x'>M-\varepsilon$。

同理，m 为数集 X 的下确界等价于以下两个条件：

1° 对任意 $x\in X$，有 $x\geqslant m$。

2° 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in X$，使得 $x'<m+\varepsilon$。

4. 逻辑符号

为便于数学分析中许多概念、命题的描述与推导，一个较好的途径是使用数理逻辑中的量词概念与量词符号，将数学内容符号化。这也能为学习大学数学中的难点——极限理论减少一些学习困难。量词有两种：

全称量词 即“任意”，“全体”，“所有”，记为 $\forall$。符号 $\forall$ 是将拉丁字母 A（英文单词 Any 的头一个字母）上下倒过来写。

存在量词 即“存在某个”，“有些个”，记为 $\exists$。符号 $\exists$ 是将拉丁字母 E（英文单词 Existence 的头一个字母）左右反转过来写。

例如，“$\forall x\in\mathrm{R}$”表示任意实数 x 或所有实数。“$\exists x_0\in\mathrm{R}$”表示 R 中存在某个实数 x_0，此处的 x 和 x_0 称为**量词变量**。

除了量词符号 $\forall$，$\exists$ 外，还常用以下逻辑符号。

“$\Leftrightarrow$”：充要条件或等价。从 A 可推出 B，又可从 B 推出 A，称 A 是 B 的充分必要条件，简称**充要条件**，或称 A 与 B 是**等价**的。

利用逻辑符号，“数集 X 有上界”可简写为

$$“\exists M\in\mathrm{R},\quad \forall x\in X,\quad 有\ x\leqslant M”,$$

它由三个短句构成，其中短句

$$“x\leqslant M”$$

是量词变量 M，x 所具有的性质。

“数集 X 无上界”与“数集 X 有上界”是相互否定的概念。若数集 X 无上界，则找不到 M，使性质

$$“\forall x\in X,\ 有\ x\leqslant M”$$

能成立，这相当于 $\forall M\in\mathrm{R}$，性质

$$“\forall x\in X,\ \text{有 } x\leqslant M”$$

都不成立，而性质“$\forall x\in X$，有 $x\leqslant M$”不成立，在肯定语气下可用

$$“\exists x'\in X,\ \text{使 } x'>M”$$

描述．注意，这时量词由“$\forall$”换成了“$\exists$”，而性质“$x\leqslant M$”改为否定，即“$\leqslant$”换成了“$>$”．于是，在肯定语气下，“数集 X 无上界”可简写为

$$“\forall M\in\mathrm{R},\ \exists x'\in X,\ \text{使 } x'>M”.$$

综上可得，在肯定语气下，有

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{数集 } X \text{ 有上界} \Leftrightarrow \exists M\in\mathrm{R},\ \forall x\in X,\ \text{有 } x\leqslant M\\ \text{数集 } X \text{ 无上界} \Leftrightarrow \forall M\in\mathrm{R},\ \exists x'\in X,\ \text{使 } x'>M\end{array}}$$

类似地有

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{数集 } X \text{ 有下界} \Leftrightarrow \exists m\in\mathrm{R},\ \forall x\in X,\ \text{有 } x\geqslant m\\ \text{数集 } X \text{ 无下界} \Leftrightarrow \forall m\in\mathrm{R},\ \exists x'\in X,\ \text{使 } x'<m\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{数集 } X \text{ 有界} \Leftrightarrow \exists M\in\mathrm{R}_+,\ \forall x\in X,\ \text{有 } |x|\leqslant M\\ \text{数集 } X \text{ 无界} \Leftrightarrow \forall M\in\mathrm{R}_+,\ \exists x'\in X,\ \text{使 } |x'|>M\end{array}}$$

从上述例子可知，有上界与无上界、有下界与无下界、有界与无界，都是相互否定的概念．要得到一个用量词符号描述的命题的否定命题时，可遵循如下的三条规则（在数理逻辑中，它可以给出证明）：

1° 不改变原命题中语句的次序．

2° 把原命题中量词符号“$\forall$”换成“$\exists$”，“$\exists$”换成“$\forall$”（量词对偶法则）．

3° 把原命题中所有量词变量所具有的性质改成否定，即将“$\leqslant$”、“$<$”、“$\geqslant$”、“$>$”、“$=$”、“$\neq$”分别换成“$>$”、“$\geqslant$”、“$<$”、“$\leqslant$”、“$\neq$”、“$=$”．

这种方法今后在分析描述中将反复使用．

5. 常用的等式与不等式

本章以及后面的一些章节中，常用到一些重要的等式与不等式，为使用方便，现列举部分如下，大部分只给出证明的提示，有兴趣的读者，不妨自行验证。

1) 等式

(1) $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ （数学归纳法）。

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ （数学归纳法）。

(3) $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$ （可用(2)推出）。

(4) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ （数学归纳法）。

(5) $1+q+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}(q\neq 1)$。

(6) $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n, \lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$

其中C称为欧拉(Euler)常数(见§1.4 例 2)。

(7) $\sin\varphi=2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n}$.

(8) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ $\left(\text{由}\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}\right)$

2) 不等式

(1) 柯西不等式

设$a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$，为任意两组实数，则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2.$$

（提示：由$\sum\limits_{i=1}^n(a_ix+b_i)^2\geqslant 0, \forall x\in\mathrm{R}$，再用二次三项式 $ax^2+2bx+c(a>0)$ 对任意x均取非负值$\Leftrightarrow b^2-ac\leqslant 0$）。

(2) 伯努利(Bernoulli)不等式

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com