數學史研究文集

第三辑

李迪 主编

内蒙古大学出版社
九章出版社

数学史研究文集

第三辑

李　迪　　　　主编

内蒙古大学出版社
九　章　出　版　社

数学史研究文集

第三辑

李　迪　主编

内蒙古大学出版社
（呼和浩特市大学西路1号）
九　章　出　版　社
（台北市虎林街252巷51弄77号3F）
联　合　出　版

本书简化汉字版由：
内蒙古大学出版社出版发行　内蒙古新华书店经销
内蒙古大学新技术公司排版　内蒙古大学印刷厂印刷

开本：787×1092／16　印张：10.875　字数：252千
1992年7月第1版　第1次印刷
ISBN 7—81015—258—0/O·20
定价：4.90元

目　　錄

懷念曾炯之博士

劉方由
（廣州暨南大學）
陳省身
（美國伯克利加利福尼亞大學）
蘇步青
（上海復旦大學）
程毓淮
（美國馬薩諸塞大學）

编者按：本文集第二輯發表"我國近世代數的先驅——曾炯之博士"一文前後，該文作者、曾博士的後人曾令林先生與當年同曾博士交往的老一輩數學家聯繫，收到一些文章、回憶錄、信函和照片，十分珍貴。今遵令林先生之囑，依文章和信函的時間順序一併刊出，以饗讀者。

曾炯不是一位普通的博士

劉方由
（廣州暨南大學數學系）

曾炯，不是一位普通的博士。他的學術成就，國際著名。

我從年輕的時代起就了解曾炯。那年頭我在南昌讀"心遠中學"，他以家貧，讀不起中學，只得上那"四不收"的學校，即不收雜費、不收學費、不收書籍費、不收伙食費的"師範學校"。官家子弟瞧不起"師範生"，常挖苦嘲笑爲"施飯生"！曾炯念的是江西省立第一師範學校，簡稱"一師"，即今日"南昌師範學校"的前身。他苦讀的精神，好學生無不敬佩！

後來，我們又在"國立武昌大學"同學，而且一同攻讀數學，一同受業於陳建功先生門下。他與另一位數學家王福春同班，我比他們低兩級。可我們幾個就如同兄弟一般，課餘之暇，總在一起，談愛國、談讀書、談數學。寒假暑假，也總是結伴歸家，又結伴返回學校。幾乎形影不分。他無論在校學習或放假在家，對數學勤奮鑽研，持之以恒。這是一般人所難趕得上的。

他 1926 年畢業於武昌大學數學系。旋即考上官費留學，1928 年赴德國學數學。他是"世界數學中心"——哥庭根大學哲學院數學部——的研究生。哥庭根大學在 20 年代末和 30 年代初期，是鼎盛時期。這時期，又號稱"諾特時代"。艾米·諾特(Emmy Noether)又稱"世界近代代數之母"。他把整個數學代數化。曾炯就是這位最偉大的女數學家的學生。他在諾特嚴格的指導下，勤奮苦學，終於成了大材。1933 年他發表了第一篇震動世界的論文：《函數域上的可除代數》，證明和提出了兩大定理，國際上命名爲"曾氏定理"。從此，蜚聲中外。1933 年完成 1934 年發表的博士論文《代數函數域上的代數》，又證明和提出了另兩個定理，國際上同樣命名爲"曾氏定理"。1936 年曾炯任教於國立浙江大學數學系期間，又發表了一篇重要的論文《關於擬代數封閉域層次論》，又提出了一個新的定理，并建立了擬代數封閉域層次論。此定理，國際數學界命名爲《曾-蘭定理》，其層次論，命名爲"曾層次"。他對世界數學作出了重大

的貢獻。他是世界著名的大數學家。

艾米·諾特

諾特是曾炯的博士指導教師。諾特是猶太人，1933 年受法西斯迫害逃離德國前夕，還諄諄囑咐他的學生"務必完成"博士論文。當 1935 年諾特在美國病逝時，曾炯得此消息凄然泪下。(照片和說明文字由曾令林提供)

姜立夫老前輩本來就是美國哈佛大學博士，1933 年利用休假的機會，到哥庭根大學學術訪問，與曾炯同窗。當 Emmy Noether 遭希特勒納粹黨清洗離開德國後，姜老先生便同曾炯、程毓淮博士等一道，從哥庭根奔往漢堡大學，轉到著名的數學家阿庭大師門下繼續訪問研究。在漢堡，曾炯又同另一位大數學家陳省身結識了。1935 年曾炯隨同姜老先生自漢堡經意大利羅馬返回祖國了。姜立夫教授回國後，遇植物學家胡先驌博士，姜又向胡博士介紹了曾炯對世界數學的偉大貢獻。因此，胡博士到了江西任國立中正大學第一任校長之初，即向我打聽曾炯的近址(當時我任教於中正大學數學系)，他想邀請曾炯到中正大學主持數學系。不料此時曾炯已病逝！胡博士知道，深爲惋惜！

陳省身博士當今世界第一流數學家，他在自己的《傳記》中，提及曾炯："……炯之，Emmy Noether 的學生，他的論文是有名的'曾氏定理'，是代數幾何中的基本性的貢獻。炯之爲人直爽誠懇，沒有人不喜歡他，不幸抗戰時期死於四川西昌。"

70 年代中期(1976)，美國數學代表團來到中國，團長、著名的代數學家 S. Mactane 向中國的數學家作學術報告:《代數的過去和將來》，他論及世界代數學家十一人，曾炯是其中之一，而且是唯一的一個中國人。國際數學界的這種評價，過去中國老數學家陳建功先生也介紹過。這類的斷語可否作爲定論，尚有待現在和將來驗證。但可想見曾炯的幾大"曾氏定理"對世界數學作用之大，影響之長遠！

最後，我想借用清代愛國詩人龔定庵的一首詩作爲本文的結束語：

不是逢人苦譽君，
亦狂亦俠亦溫文；
照人膽似秦時月，
送我情如嶺上雲！

1991 年 9 月

憶 炯 之

陳省身

我是在 1934 年 10 月在德國漢堡認識炯之的。那時他剛完成他的有名的關於"函數域可除代數(division algebra)"的基本定理，來漢堡作博士後研究。炯之爲人誠懇、豁達，没有人不喜歡他。那年在漢堡的中國數學家，還有姜立夫先生，程毓淮，周煒良等。我們時常共餐暢談對於發展中國數學的抱負和計劃，回顧半世紀中國數學的進展，感慨繫之。炯之和我都喜歡吃烤鵝，確是德菜中的美味。

漢堡一别，我們没有再見，通信亦稀。他回國後没有充分發展他的才力，是國家的損失。

(1991 年 10 月 10 日於伯克利)

信 函 摘 編

蘇步青教授致曾令林先生的信

曾令林先生：

三月六日大札己由全國政協辦公廳轉下，借悉一是。曾炯教授是抗戰之前在浙江大學數學系的老同事，逝世多年了，今瞻仰遺照，猶能想象當年風采，言之曷勝感慨。

曾老博士論文是在漢堡大學阿爾丁教授指導下作成的，可能在《漢堡學報》發表。可惜時間過了半個世紀，……

復，順頌

教祺

蘇步青手啓

1989 年 4 月 21 日

程毓淮教授致曾令林先生的信

令林教授：

收到您 12 月 3 日的手書，真是出我意外！我和您父親確是同學好友，他比我年長，時常在校里圖書館見到。有時和一些同學們出外游玩。數十年前的事歷歷在目，但在 1934 年後即没有再見到，也未通過信。……

敬祝年安

程毓淮

1990 年 12 月 17 日(於馬薩諸塞大學)

陳省身教授致曾令林先生的信

令林同志：

前信稽復爲歉。9月28日來信收到，附拙文，匆匆撰成，不盡所懷。

找到了兩張當年共游的相片，當制版盡快寄上。

匆請教安

陳省身

1991年10月10日(於伯克利)

令林同志：

附上底片兩張，系1935年在德國哥丁根① 所攝，片中有姜立夫、葉理殿先生。

祝諸事順利。

陳省身

1991年10月28日(於伯克利)

編者後記：文中一處提到“阿庭”另一處有“阿爾丁”，實爲一人，均由 Arting 譯出。E. Arting (1898—1962)，德國數學家，1973年移居美國。

① 據本文的前兩篇内容判斷，可能應是德國漢堡——編者。

1935 年於德國漢堡

左起：曾炯之，
姜立夫，
陳省身。

（照片由陳省身教授提供）

中國現代數學家
的一次盛會
1935 年，漢堡
左起：曾炯之，
葉理殿，
陳省身，
姜立夫。

（照片由陳省身教授提供）

古代中國印度間的數學聯係

洪 天 賜 Ang Tian Se
(馬來西亞馬來亞大學中文系)

古代中國和印度鄰接，早在公元前兩國人民已有跨國界活動。公元前2世紀中國外交使節張騫的報告說明了這種情況。以張騫爲首的使節團被皇帝派往中亞[1]，用十二年時間，成功地編織了與西域各國間的友誼紐帶。張騫觀察到中國南部的某些產品遍及北印度市場[2]。他還發現中亞、西亞甚至更遠地區的人民特別贊賞中國的優質絲綢；這表明絲綢市場早在西漢以前已經存在。後來聞名世界的絲綢之路起始西漢首都長安，延伸到當時的邊城敦煌，過吐蕃或樓蘭、和田與中亞的塔什干連接。絲綢商人們從和田或塔什干可以走南路經過塔什庫爾干(Tashkurgan)和 Caspapyra 到達印度的 Takesila；或者向西到 Mary 也有兩條路：一是走撒馬爾罕，另一是過巴爾干。森(S. N. Sen)認爲許多生意人寧願走喀布爾(Kabul)峽谷和開伯爾(Khybar)山口[3]到達印度。絲綢之路的西段從 Mary 通過達姆甘(Damgham)、哈馬丹(Hamadan)和泰西封(Ctesiphon)，自古就有了。東西之間最重要的聯係除商品的交流，也有思想的傳遞。森指出，東印度早期到中國也有兩條路：一是通過緬甸的 Burma 和阿薩姆的 Manipur，另一是通過西藏和錫金，走連接拉薩和甘托克(Gantok)，并延伸到恒河(Gangetic)峽谷的 Pataliputra。

絲綢之路不僅是橫穿亞洲的貿易通道，同時也是中國同印度、羅馬帝國、甚至更遠的西方國家進行文化交流的最重要的渠道。在此期間，中國被看成是閉關自守的世界。直到2世紀佛教傳入後這種狀態才被打破。

隨着佛教的傳入，著名的佛教學者從克什米爾和西、東印度由陸路或乘船來到中國，歷經數載傳播教旨、翻譯教規，使教徒數量逐年增長。成百上千的中國僧人冒險長途跋涉到印度學習梵文、翻譯佛經。第一位著名的僧人叫法顯(334－420)，於399年沿陸路到印度，414年乘船返國。他除了譯佛經中釋加牟尼聖訓之外，還對訪問過的佛教王國作詳細的考察記錄。這些寶貴的材料對證實和確立中亞和南亞的地理位置和年代表起了不可估量的作用。

還有唐朝(618－906)的玄奘(596－664)，是一位最著名的朝聖者，同時也是一位翻譯家，曾在印度16年(629－645)。差不多同時，在671到695年間，僧人義淨渡海繞了一圈到達印度。中印間常設的、服務於旅客的中間停留站在蘇門答臘仍有保留[4]。鑒於這種設施和長期的宗教文化接觸，中印間科學觀點也開始互相交流和融合。本文僅限於同時期中印數學的發展，討論兩者可能存在的數學聯係[5]。

在中印兩種文明中，很難指明數學何時率先發展成一門科學。然而，兩國有可能都在早期發展了描述性天文學，使數學知識成爲度量時間和角度的工具；因此，通曉天文意味着準確應用算術、代數、幾何和三角知識。

隨着佛教傳入中國,印度天算著作接踵而至,譯成中文後學者們競相研究。有些著作已得到官方承認并编入史書。如 610 年魏徵編《隋書》書目中有一係列印度天算著作,所有的標題均以“婆羅門”開頭,意謂“婆羅門教的”。十分有趣的是,在日本發現的《婆羅門陰陽算曆》是 9 世紀由中國傳入日本的。

唐朝時不僅印度天算知識傳入,印度學者們還以官方或民間的組織形式積極參與。一批有影響的印度數學家、天文學家居住在唐朝首都長安,形成三個各具風格的宗族,叫做迦葉氏(Sheye)或迦葉波(Kasyapa),瞿曇氏(Gautama)和倶摩羅(Jumoluo)或鳩摩羅(Kumara)。迦葉氏重要成員是迦葉孝威,他幫助李淳風在 665 年制定了《麟德曆》。在瞿曇氏一族中瞿曇羅和瞿曇悉達引人注目。瞿曇羅在 665 年被任命天文局① 的首長,并繼任此職三十餘年。他爲朝庭制定了兩種日曆:697 年的《經緯曆》和 698 年的《光宅曆》。後來瞿曇悉達成爲瞿曇羅的接班人,他受委托把 Navagraha 曆法體系在 718 年從梵語譯成中文,叫做《九執曆》②,它特別强調計算在中國的日食和月食。此外,瞿曇悉達還由於编輯《開元占經》(開元年間的占星術和天文學)而名垂久遠,該書中出現了零的符號和其他革新的內容。

另一著名的瞿曇氏家族成員是瞿曇巽③,762 年成爲天文局的代理首長。這個宗族爲維護他們超越數學、天文學的權威發揮了巨大的影響。一個多世紀他們世襲了天文局的官位,也表明了這一點。

縱覽歷史,無疑從佛教傳入中國後,中國人已接觸到大量的印度天文數學科學。同樣也可以說,數學知識傳播到印度,一方面是印度學者自己帶回去的,一方面是由中國商人帶去的。在此考察兩種文明中某些共有數學思想的歷史發展,并研究兩者間可能的聯係,將是十分有趣的。印度人以數字計算的淵博天賦而出衆,自古數學就是印度教育的重要組成部分。小孩從五歲就要受怎樣數數的特別訓練[6]。甚至在早期梵文中 ganita 字義爲“計算科學”,已被認爲是“科學的頂峰”,在公元初年前其地位和價值已被加强和進一步肯定,并擴大了它的研究範圍。於是,ganita 就變成了一般數學的含義。

爲什么印度人要用一些計算符號?爲弄清這個原因,最重要的是搞清楚他們是怎樣使用算具的。算板叫 pati,用粉筆或小石頭在沙地或算板上計算。字要寫得大些才清楚,爲省地方,設計出算式就有必要了,數字一用完就擦掉。計算是從左向右書寫的。

數學在古代中國的教育中也起了重要作用。自周朝建立,約在公元前 11 世紀,就把數學看作是“士”的教育和訓練中的“六藝”之一[7]。中國人和印度人一樣,在板子或地面上用一束籌來計算。……古代中國人已熟知數字的位值或十進制。這種數字從左向右排列,與中國人通常從上到下、從右向左的書寫方法適成對比。加法的過程與婆什迦羅(Bhaskara Ⅰ,1114－1178)在《利拉瓦提》(Lilavati,1150)[8]中提出的相反過程類似,加法是從左向右計算低位求出的和。減法同加法,只是欲求的是差,位於大數之上。這兩種算法裡術語“進位”(carry)和“借位”(borrow)有多種意義,一根籌就被確定或放到另一位置。如果這根籌是從鄰位借出的,它得“還清”(paid back)。在 pati 算板上所作運算中消去和補值都是容易實現的。

① 唐乾元(758)前爲太史局,後爲司天臺,明、清爲欽天監。——譯者注。《新唐書·曆志》稱“九執曆者,開元六年,詔太史監譯之。”又據《新唐書·百官志》開元十四年改太史監爲太史令。——校者注。

② 《九執曆》的中譯本保存在《開元占經》一百零四卷中。——校者注。

③ 據 1977 年長安縣北田村發現的瞿曇巽墓志,他的父親是悉達,祖父是瞿曇羅。——校者注。

在印度和中國諸多的乘法算法裡，在婆什迦羅的《利拉瓦提》[9]中的 sthan-khanda 法與楊輝的《乘除通變算寶》(1274)中的相乘法有共同的特徵，如下所示：

1	3	5
12		
········	········	········
12		
3	6	
	6	0
········	········	········
16	2	0

乘數被當成一個完整的數，運算從左邊開始。正象藍麗蓉(Lam Lay-yong)假設的那樣："我們的乘法法則在中世紀叫棋盤法，起源於這種算法。"[10]她還指出早期意大利人把乘數分解成因子的方法稱爲"repiego"法，印度人在 628 年就已知之，而此法中國人早已熟知，并據因子類型之不同而稱爲"重因"、"重乘"和"重加"。

甘内撒(Ganesa)在 1545 年評論《利拉瓦提》時將乘法中的 gelosia 法取了一個名字 kapata-sandhi。這種 gelosia 法，或格栅(grating)法，還以四邊形法或分格法(the method of the cells)而知名，很可能起源於印度[11]。此法也出現在 14 世紀阿拉伯著作和大致同期的歐洲著作中。史密斯(Smith)認爲此法可能從印度向北傳入中國，出現在程大位 1592 年的《算法統宗》上[12]。中國人稱之謂"因乘圖"或"鋪地錦"。425 乘 456789 如下左圖所示：

	4	2	5	
1	1/6	/8	2/0	4
9	2/0	1/0	2/5	5
4	2/4	1/2	3/0	6
1	2/8	1/4	3/5	7
3	3/2	1/6	4/0	8
5	3/6	1/8	4/5	9
	3	2	5	

中國籌算除法與 4 世紀印度在算板 pati 上作的除法有許多共同特點。下例 1620 除以 12，引自文獻[6]，闡明了印度的除法[13]：

1	6	2	0
1	2		

除數 12 置於被除數之下；商的第一個數字 1 置於右邊，擦去 16，其位置由餘數 4 取代。除數向右移一位。

4	2	0	1
			········
1	2		商數綫

數字 42 除以 12，商數 3 置於商數綫上，去掉 42，其位置由餘數 6 取代。除數再向右移一位，於是：

6	0	13
		········
1	2	商數綫

繼續做除法，將商數 5 同前一樣置於商數綫上，去掉 60，没有餘數。商數上的 135 就是所求結果。

中國和印度的除法的共同特點是：(1)除數位於被除數之下，(2)每得一商，除數向右移一位，(3)商數排列在被除數之上。在歐洲直到 15 世紀還把除法看作是一種困難的運算[14]，用計數板在 pati 上去掉數字的簡明方法使中印數學家們做起除法來輕松自如。據信這種除法後來是從印度傳入歐洲的[15]。

在印度對世界的數學貢獻中，最有意義的是印度-阿拉伯數字體系。它是因印度發明、阿拉伯人傳入歐洲而得名的，其特點是有 9 個數字和零的符號，數字各具一定位值以表示所有整數。從一項對古印度使用的各種形式數字的調查[16]來看，從阿育(Asoka)王之前(公元前 3 世紀)就逐漸發展起一種類似於今日印度-阿拉伯數字的形式。值得指出的是，在所有這些數字體

系中前三個整數的寫法正好同中國的完全一樣。然而應當注意，在最古老的印度銘文中我們發現的數字符號既無零也無位值的含義，也就是從一到九，十、百、千及其倍數各有獨立的記法。據信前九個符號最早出現在公元 595 年的一塊銘文中(Sankheda 授給 Gurjara 的金屬牌)[17]，由此時到 9 世紀末的期間內，大約 20 塊銘文使用了這些符號[18]。盡管銘文的證據同印度古代位值制相牴牾，看來可以確認位值制在公元 5 世紀早年《波利薩・悉德罕塔》(Paulisa Siddhanta)的作者已知道并有應用，一定是在 Aryabhata 和 Varaha-Mihira 的時代(公元 500 年之前)。

對於零的概念，印度人所用的術語是“空”(sunya，emptiness)和“點”(bindu，dot)。無容置疑，最早的零的符號出現在 876 年在格瓦略(Gwalior)的一塊銘文中。可以肯定零最初是個空位，然後是個點，最後才是圓圈符號。

據李約瑟(J. Needham)講，在中國早已開始認識了位值概念[19]。最早顯示十進位的嘗試很可能出自公元前 330 年的《墨經》。中國人在度量衡單位中應用十進制特別先進。自公元初年隨着在所有數學運算中使用算籌以來，對位值的理解已充分地牢固樹立起來。3 世紀《孫子算經》對位值制作出了解釋。中國人在用算籌數字進行的所有計算中，留下的空位都表示零。當瞿曇悉達在 718 年把印度的 Navagraha 曆法譯成漢語時，這種位值制被引入印度的記數法[20]。在譯文中出現的零是個點而非圓圈。在印刷物中用圓圈符號表示零首先是在 1247 年秦九韶的《數書九章》裡發現的。三上義夫(Mikami)認爲零的符號至少還要早一個世紀已在中國應用了[21]。一般認爲零的符號起源於印度，但這種零的符號在中國還有獨立的發展，這是基於 8 世紀前零的位置是空位這一事實而言的。在籌算中擺出空位表示零會引起混淆，故可能用一個四方形符號，而用中國毛筆寫時就很容易畫成一個圓圈了。

盡管在 8 世紀印度數字已傳入中國，但并沒有被采納。看來令中國人感興趣的是非常大和非常小的數字概念。《數術記遺》(約 190 年)和《孫子算經》(3 世紀)已給出十個術語來表示大於萬的數，朱世傑 1299 年的《算學啓蒙》又添加了另外六個，最大的表示 10^{4}。這些術語是按佛教的思想創立的；同樣地，朱還增加了十五個術語以表示非常小的數字[22]。

分數是數學裡的基本和重要的部分。印度史料表明早在公元 200 年分數就象今天的一樣了，只是沒有橫綫[23]。所有包含分數的運算在巴克斯哈里(Bakhshali)手稿中均可找到，它的寫作時代有不少推測，範圍在 3 世紀到 12 世紀間[24]。盡管從 5 世紀印度人的天算著作中已涉及到多種形式的分數，而化簡公分母的法則和求最小公倍數可分別在 6 世紀的婆羅門笈多(Brahmagupta)和 7 世紀的馬哈維拉(Mahavira)著作中找到[25]。在中國非常早的年代數學家們對使用分數也感到困難，約在《九章算術》(公元 100 年)成書的時代，分數加減乘除的法則已經形成公式。到 13 世紀，中國人在處理分數、特別是求分母的最大公約數和最小公倍數方面有了極大的進展。這種方法在歐洲直到 15—16 世紀才被應用[26]。

有趣的是，在巴克斯哈里手稿中假分數的全部分子都寫在分母之上，這與中國表示假分數完全相同。在這兩國裡下面的分數四則運算過程也是完全一致的[27]：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd},\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd},\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

印度人和中國人不僅在他們的數學著作中對分數運用自如，而且也都採納了負數的概念。

印度人引進負數表示負債，這時正數表示資財。第一個著名的用法是由婆羅門笈多在約628年提出的，他僅說明了負數四則運算法則[28]。在中國，正負數的概念看來是從“得”、“失”的概念中引申出來的。這在《九章算術》一道買賣動物的問題中可清楚看出：賣價被看成是“正”的，因爲得了錢；而買價被看成是“負”的，因爲花了錢[29]。……古代中國人在籌算中具體地用紅色和黑色的籌表示正負，兩者間的加減規則形成了公式并明文寫出。《九章算術》提供了具體證據：中國人在1世紀不僅接受了負數的有效性，而且還理解它與正數的關係，以及能夠用正負數運算。然而，中國人没有注意負數平方根的性質，但印度人如馬哈維拉和婆什迦羅卻意識到這一點[30]。

爲解決大量有關比例的問題，印度和中國數學家們發明了一種相同的解法，印度人稱之謂“三數法則”(the Rule of Three)，而中國人則稱之謂“今有術”[31]。印度名字的意思是“三項”，可追溯到公元初年巴克斯哈里手稿，在《阿約布哈提亞》(Aryabhatiya)和其他有關數學著作中[32]。婆羅門笈多曾把這個法則作出如下解釋[33]：

“在三數法則中 pramana(自變數)，phala(結果)和 iccha(需求)是已知的三項，前後兩項必須一致。需求乘以結果除以自變數，得到需要的結果。”即

$$(\text{所求的})\text{結果} = \frac{\text{需求} \times \text{結果}}{\text{自變數}}$$

中國的“今有術”用於解比例問題，通過三個已知項求未知數，這些項稱爲“所有數”和“所求率”。法則表明，把“所有數”和“所求率”之積作爲“實”(被除數)，把“所有率”作爲“法”(除數)，即可得到“所求數”。

李約瑟曾正確指出中文和梵文的術語在語義上的等價性[34]。中文裡“實”的基本含義相似於梵文中的 phala(結果)，“法”和 pramaha 在表述計量長度的標準單位時兩者也是相似的，甚至“所求率”與意爲“需要”、“要求”的 iccha 也是一致的。

顯然，由於這個法則對解決常見問題的簡明性和通用性，它受到印度人和中國人的高度評價，事實上被兩國商人廣泛應用。它的印度名稱更貼切、更準確，所以在傳入其他國家時，便廣爲人知。因此，該法則的起源一般歸於印度，可能在8世紀傳到阿拉伯，後來傳到歐洲。在歐洲它受到高度珍視，被稱爲“黄金法則”。

在林語堂(Lin Yutang)编著的《印度的智慧》中，他指出印度是“世界三角學之師”[35]。盡管在評論中他熱切描寫“印度精神的豐富和她的靈性”，但卻顯得言過其實。然而，林語堂正確指出了印度人在數學方面的卓越貢獻。李約瑟也認爲，正是印度人把三角學變成了現代的形式[36]。正餘弦早期的概念首次出現在公元400年後不久的《波利薩·悉德罕塔》中。阿耶波多(Aryabhat，510)第一次給正弦函數起了個特殊的名字并求出完整的正弦表。這個表用一個地道的簡單方法。正弦90°等於半徑或3438，顯然由關係 $2\times3.14r=21600$ 而獲得。圓分成四個象限，每個有90°和5400′，全圓就分成21600份了。每個象限還分成24等分，各包括225′，等於3.75°，於是24分弧的正弦表便可算出。

718年瞿曇悉達通過翻譯 Navagraha 天文體系將這個正弦表介紹到中國。藪内清(Yabuuti Kiyosi)在研究這一體系的譯文時發現，中國的《九執曆》不是 Navagraha 體系的直譯本[37]。

印度譯者精確地把觀測點從北緯 23°2′的尤加因(Ujain)改到北緯 36°16′的唐朝首都長安,以便於預報中國的天文現象。然而中國的天算家感到翻譯的體系奇怪而陌生,沒有採納它[38]。

古代中國人并不了解三角學這個詞的真實意義,但他們非常熟悉直角三角形的性質,并認識到各邊之比的重要性。"重差術"涉及到相似直角三角形的性質,可以看成是一種早期的三角學。這樣,在實際運用平面三角時勾比弦等於正弦,勾比股等於正切,弦比股等於正割。由於數學天文學的發展,曆法精度要有基本保證,這促使象唐朝一行那樣的曆法學者去尋求改進三角技術。當一行受唐朝皇帝之命制新曆以取代 725 年的舊曆法時,他事實上將印度三角知識和正弦表應用於研究數據中計算和分析等方面。近來古克禮(Cullen)認爲一行《大衍曆》中的一張函數表等價於一張用三階有限差分法制成的正切表[39]。古克禮解釋說,這張表明顯是在印度應用正弦的知識的基礎上取得的獨立的發展。但是,因一行構造此表爲的是一個實際的目的,而并沒有作爲一項理論的分析,因此沒有數學家接續對三角術作進一步研究。這樣,8 世紀從印度傳人三角學的這一方面沒有在中國生根。

以希臘人畢達哥拉斯(Pythagoras,前 540 年)的名字命名的勾股定理已是家喻户曉的了,但此定理是否首先由他證明仍是遺留問題。許多數學史家認爲它是最深刻的概念之一,并且是數學史上的一個重要的里程碑[40]。

在古代印度和中國,數學家們研究勾股弦的關係素來是有特殊興趣的課題。《吠陀》(Vedic)時的印度人已熟悉"畢達哥拉斯數",即正整數 a,b,c 滿足關係 $a^2+b^2=c^2$。這在《蘇爾巴・蘇特拉斯》(Sulba Sutras)中有證據,該書编寫年代估計在公元前 800 年到 500 年間[41]。盡管印度的勾股定理早於畢達哥拉斯,然而赫斯(Heath)堅持認爲,沒有證據或任何可能說明希臘人是從印度學來的,他强調該式是在這兩個國家完全獨立獲得的[42]。

在中國,勾股關係記錄在《周髀算經》中,有討論而非證明,結尾說它已被禹充分使用。……此書積累了不少數學資料,可追溯到公元前 5 世紀。當趙君卿寫書評(估計在 3 世紀)時,他提供了一個證明。……有趣的是,印度的婆什迦羅(約 1150)給出了該定理的一個類似的證明。布銳兹奈德(C. A. Bretschneider)推測,畢達哥拉斯的證明其實也是同樣的[43]。給人印象最深的是應用這條定理的相似性。例如在婆什迦羅的書中有這樣的例子[44]:

"一竹高於地平 32 腕尺,爲疾風所折,竹梢着地,離根 16 腕尺。此竹斷處高有多少?"

這個問題與漢朝《九章算術》的一個問題類似:

"今有竹高一丈,末折抵地,去本三尺。向折者高幾何?"[45]

婆什迦羅的著作基本上是一本教科書,取材於他的前輩的著作,特别是婆羅門笈多(約 628)和馬哈維拉(約 850)。達塔(Datta)說,先於婆什迦羅也有類似的問題,盡管不全是"竹"的問題,在馬哈維拉的 Ganita-sara-samgraha 和 Prthuda-kasavami(約 860)的有關婆羅門笈多著作的注釋中均有發現[46]。馬哈維拉和 Prthudakasavami 雖爲同時代人,但前者住在 Mysore 的南部,而後者住在很靠北的 Kananju。盡管他們所舉某些例子具有① 引人注目的相似性,但達特認爲這兩個數學家住在次大陸的兩端,不可能互相影響對方。達特傾向於認爲他倆各自獨立設計並解答題目。

① 原文爲"沒有",據文意改。——譯者。

然而考慮到以上兩人的著作中某些問題引人注目的相似性，似乎更有理由認爲他們的靈感是從共同的源泉——有可能是從中國獲得的。

評述中印間可能的數學聯係如不涉及不定分析將是不完整的，早期中印數學家對該問題都有巨大興趣。該題目的起源也吸引了許多數學史家的注意，并仍有不少有爭議的論題[47]。有三種理論一直在討論。19世紀初科爾布魯克(H. K. Colebrooke)提出一種理論，認爲在很早的時代印度人已得到不定問題的一般解。他的觀點得到森的支持，并從《蘇爾巴・蘇特拉斯》中舉出例子，説明印度人對不定問題的興趣可追溯到公元前5世紀[48]。凱(B. K. Kaye)和其他一些人擁護希臘起源説，把印度解法歸因於希臘影響[49]。另一方面，李約瑟則把這種方法歸於中國人的發明[50]，并進一步指出歐洲人只是在9世紀才知道這種不定問題。雖然如此，這些問題只不過被當成普通的迷惑人的難題而已。

森聲稱印度人對不定分析的興趣早在公元前，看來這是不能令人信服的。他舉出的問題是如何用三種尺寸的磚來砌築祭壇，由它可列出如下的一階聯立不定方程：

$$x+y=21$$

$$x/m^2+y/n^2=1$$

m和m是聖壇一邊的整數部分。解法沒有給出，但對 $x=9, y=12$ 時 $m=6, n=4$ 是已知數值；當 $m=3, n=6$ 時 $x=5, y=6$。

在前述《九章算術》里也有這樣一個不定問題，可表示成如下的方程組：

$$2x + y = w$$

$$3y + z = w$$

$$4z + u = w$$

$$5u + v = w$$

$$6v + x = w$$

以上所示確實是一不定問題，但是所提供的解法與一般不定方程的解法是不同的。

最早的不定分析問題出在3世紀《孫子算經》中：

“今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾何？”

孫子的解可歸納成如下形式：

$$70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 105 \times 2 = 23$$

孫子問題在1839年由畢歐(E. Biot)和1852年由偉烈亞力(A. Wylie)帶到歐洲，變成了著名的“中國剩餘定理”[52]。但孫子所給解的數字易於猜出，而且孫子僅給一題，故他并非必然導出如下綫性同餘式組的解法：

$$N \equiv 2(mod3) \equiv 3(mod5) \equiv 2(mod7)$$

十分有趣的是，5世紀末老阿耶波多(Aryabhata Ⅰ)在他的《阿耶波提亞》(Aryabhatiya)中給出的問題與孫子問題類似[53]：

“有一數，被8除餘5，被9除餘4，被7除餘1，求此數。”

阿耶波多提出的解法叫“庫塔卡”(kuttaka)，解釋的文字十分簡明。此法隨後由婆什迦羅、婆羅門笈多、馬哈維拉、小阿耶波多(Aryabhata Ⅱ)，小婆什迦羅和其他數學家一再修改完善。

另一方面，中國剩餘定理即綫性同餘式組的特殊形式直到13世紀中葉秦九韶時代才得到

充分的研究。然而在 5 世紀張丘建提出了另一類型的不定問題，即有名的"百鷄"問題[54]："今有鷄翁一，直錢五，鷄母一，直錢三，鷄雛三，直錢一。凡百錢買鷄百隻，問鷄翁、母、雛各幾何？"張丘建找到了正確的解，但他的方法没有完全表達出來。後來不定分析逐漸得名"大衍"。從秦九韶的時代形成解不定問題的一般方法差不多用了十個世紀。由於這個原因，某些數學史家，諸如赫師慎(L. van Hee)、洛里亞(G. Loria)和漢克爾(H. Hankel)對大衍術的獨創產生了懷疑。森甚至提出："在不定分析及其應用於天文學的方面，如果在印度和中國間曾有引進的話，那麼不是印度而是中國處在接受的一方。"[55]

李倍始(U. Libbrecht)寫出了有關中國剩餘定理的專題論文，對從孫子時代到 19 世紀該問題進行了逐字逐句的分析[56]。他也作出了相似的努力去研究印度"庫塔卡"法的歷史發展。基於內在的分析，他對比研究了兩種方法，由此他相信中國的大衍術不同於庫塔卡法。

李倍始的研究依據內在的分析，闡明了大衍術和庫塔卡法間的複雜的問題，爲建立數學思想的歷史關係作出了良好的範例。這項研究需要足夠的數據，客觀的審慎，綜合概括的事實。這篇論文是一篇初步的概括，企圖説明中印數學間平行的發展和共同的特徵。毫無疑問，自從絲綢之路的開闢和佛教傳入中國的影響，中印知識分子大量接觸，數學思想經由商人、香客和學者爲兩國數學家們所互相理解，數學家們彼此間的影響也不可避免，正如中國諺語所説"取人之長，補己所短。"然而不應忘記：獨立成長的數學體系間自然會有許多相似點，也會有許多差異。當然，兩者完全一致的發展模式則是不可能的。兩者的聯係豐富了印度和中國古代的數學，這一領域將是一個饒有興趣、有待進一步研究的課題。

參　考　文　獻

〔1〕《漢書》，中華書局，第 61 卷，2690。

〔2〕Loewe，Michael，漢朝的危機和冲突，倫敦，1974，22。

〔3〕S. N. Sen，古代和中世紀印度與外國科學觀點的交流，印度科學史會議論文集，加爾各答，1961，21。

〔4〕Cheng Te-K'un，中國人的世界——人類諧調的斗爭，中文大學出版社，香港，1980，131。

〔5〕何丙郁，印度科學在東亞，泰米爾人研究首屆國際會議論文集，第 1 卷，吉隆坡，1968，39～52。

〔6〕B. Datta & A. N. Singh，印度數學史，第 1 部分，拉合爾，1935，4。

〔7〕據《周禮》，"六藝"指禮、樂、射、馭、書、數。

〔8〕見〔6〕，131。另見洪天賜，中國籌算，漢學研究論文，第 1 卷，馬來亞大學，吉隆坡，1977，97～109。

〔9〕同〔6〕，147。

〔10〕藍麗蓉，對楊輝算法的批判研究：13 世紀中國數學論文，新加坡大學出版社，1977，209。

〔11〕Smith，D. E.，數學史，第 2 卷，波士頓，1925，114～116。另見〔6〕，144。

〔12〕何丙郁 理、氣和數：中國科學和文明導言，香港大學出版社，1985，106。何認爲 gelosi