天气预报中的概率统计方法

王宗皓　李麦村等编著

科学出版社

内 容 简 介

本书是以短期、中期和长期天气预报的概率统计方法为主题编写的，是一本适合气象台站天气预报用的基础书。对制作统计预报的操作全过程，从预报问题的形成、资料加工与挑选预报因子、建立概率预报模式以及预报方法的集成都有详尽的叙述。全书共分十二章，包括线性代数、概率统计基本知识、统计预报模式、资料处理、简易预报方法、多元迴归、判别分析、马尔可夫链、时间序列分析、天气概率预报、统计决策函数论的应用、预报集成、统计动力预报和卡门滤波模式等，最后一章叙述预报的评分方法。

本书可供省气象台、专区气象台和县气象站预报员，大专学校有关专业教师和研究工作者参考；也可供水文预报、地震预报工作者参考。

天气预报中的概率统计方法

王宗皓 李麦村等编著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1974年3月第一版 开本：787×1092 1/16

1978年11月第二次印刷 印张：13 1/2

印数：13,501—23,590 字数：305,000

统一书号：13031·205

本社书号：341·13—15

定价： 1.40 元

序　言

在毛主席《五·七指示》指引下，大气物理研究所搞天气预报的部分工作人员，下台站参加预报实践，本书是在此基础上总结国内外的概率统计预报方法进展，编写而成的.

天气预报的概率统计方法发展到今天，明显地包含三个组成部分：(1)天气的物理背景（包括大气运动的动力和热力学规律，天气学规律），这是概率统计预报的基础. (2)概率论数理统计的理论与方法. (3)转化为代数问题，应用电子数字计算机实现预报（少量资料样本问题简化后可由人工计算）. 编写本书时考虑到这三部分，但着重第二部分的内容. 其次，就概率统计方法的发展趋向来看，有物理统计预报、天气统计预报和动力统计预报. 本书将前两方面混合一起叙述，未加区别；而将动力统计预报独立开来作了简要介绍(第十一章)，并按习惯称为统计动力预报. 再次，预报检验与评分，由于预报服务需要，特别是统计决策在天气预报中的应用，促进了这方面的研究，为此，本书第十二章对预报检验评分方法作了简要介绍.

本书是以短期、中期和长期天气预报的概率统计方法为主题编写的，较少涉及概率统计在天气、气候统计分析方面的应用. 而且对短期、中期和长期预报问题在方法上也未加以明显区别，只是注意到因子挑选上的差异. 对预报的操作全过程，从预报问题的形成，资料加工与挑选预报因子，用概率统计方法建立预报模式，以及预报方法的集成都有所叙述.

当前国内气象台站的天气预报思路和预报方法，和本书中叙述的预报方法有密切关系，前者主要是经验统计、经验判断的预报方法，后者能以前者的预报指标、模式和经验为基础，应用近代概率统计的理论方法，进行模拟，用电子计算机加工提炼，建立预报模式，作出较为客观的定量或定性预报. 因此，本书在内容取材上，希望能反映统计天气预报的发展水平，并尽量针对国内台站的当前条件，理论的叙述和实际操作举例并重，方法有繁有简.

全书共分十二章。各章的重点内容、目的及相互联系概述如下：

第一、二章叙述有关代数和概率统计的基本概念，为读者阅读以后各章提供基本知识.

第三章介绍概率统计预报模式产生的一般性问题. 概要叙述概率统计预报模式产生的全过程，及注意事项. 强调要对预报对象作天气动力学分析，应用现有的天气动力学知识提供可能因子. 并给出从实际观测资料提取组合因子的方法，比如物理组合、统计组合及非线性组合. 而且详细讨论了经验正交函数分解和因子分解方案的原理及误差估计.

第四章至第十章叙述物理及天气统计预报的基本方法. 其中，第四章主要叙述适合县站应用的简易客观统计预报方法. 第五章为多元迴归分析，这是概率统计预报的基本方法，其它各章叙述的方法都要用到迴归技术处理各自的课题. 第六章详细叙述二级判别分析，并倾向应用逐次二级判别分析作预报. 第七章叙述马尔可夫链在天气预报与分析中的应用，特别讨论部分地考虑随机过程后效的时间序列马尔可夫链方法的预报问题.

第八章较详细叙述单要素及多要素平稳时间序列预报公式的推导，以及应用平稳序列预报的若干具体问题．第九章叙述天气事件概率迴归估计在短期、中期和长期预报中的应用,详细介绍此方法在初夏、盛夏大到暴雨预报中的应用情况．第十章简单介绍统计决策在概率预报中的初步应用,并指出预报集成问题的实际意义,提出集成的初步方法．

第十一章介绍几种有代表性的统计动力预报的思路和方法，通俗地介绍卡门滤波模型．并讨论动力模型与统计模型的优缺点和两者相结合的必要性．

第十二章介绍天气预报检验评分的若干常用方法,强调评分的实际意义．

参加本书编写工作的还有陈嘉滨、章名立、王焕德、骆美霞等，王宗皓统一整编定稿．在编写过程中,朱抱真、周家斌等同志提出许多宝贵意见．本书曾作为 1973 年 4—6 月全国统计预报短期学习班的主要参考资料,并得到各方面的有益意见,在此表示感谢．由于编写者的预报实践经验不足,理论水平有限,工作粗糙,资料收集不齐全,不一定能反映当前水平;不妥当和错误之处一定难免,希望读者提出宝贵意见．

编著者

目　　录

第一章　线性代数的基本知识

§1　线性代数与概率统计预报

概率统计天气预报发展到今天，可以清楚地看出它包括如下三方面的内容：

(1) 天气预报经验和天气动力学理论；

(2) 概率论数理统计的理论与方法；

(3) 线性代数的理论与方法及其在电子计算机上的实现方案.

线性代数在概率统计预报中的应用，是用来分析和提取历史资料中的主要预报因子，确定预报系数，得出预报方程. 近代概率统计的理论与方法，多用矩阵和向量来叙述. 本书中许多章节也用到这方面的知识.

线性代数的一个重要方面，是研究方程组的求解理论和求解方法，研究某些变换的性质. 而矩阵和向量则是研究的基本工具.

线性代数方程组的解，是指找到的一组常数，代入方程都变成恒等式. 有的方程组能找到解，有的找不到解，有的却找到无穷多个解. 例如方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \tag{1}$$

就没有解，因为用任何数 $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ 代入，方程组之左端有相同值，而右端却不相同. 这类方程组称为不相容方程组. 下面的方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \tag{2}$$

有解 $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. 这类方程组称为相容方程组. 但相容方程组可能有唯一组解，也可能有许多组解. 例如方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

有 $x_1 = x_2 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ 等无穷多组解. 因此，当相容方程组有唯一解，称之为确定的.

与上述方程组不同的另一种方程组，是右端也是一组变数，比如

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \end{cases} \tag{4}$$

随着自变数 (x_1, x_2) 的值不同而变. 这种方程组称为变换式.

§2 矩阵运算规则和性质

（一）矩　阵

先从线性方程组谈起．这里用 x 加下标表示未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；用 a_{ij} 表示第 i 个方程中未知数 x_j 的常数实数系数；b_i 记第 i 个方程的常数项(自由项)．普遍形式的线性代数方程组形状如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{5}$$

这组方程中的常数系数可以按次序排成阵列表：

$$ {}_sA_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \tag{6}$$

称为 s 行 n 列矩阵，记成 ${}_sA_n$；数 a_{ij} 叫做矩阵 ${}_sA_n$ 的元素． 若方程个数与未知数个数相等，$s = n$，则 ${}_nA_n$ 称为 n 阶方阵，也叫做 n 行 n 列矩阵． 从左上方到右下方的对角线上元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 常称为主对角线元素． 若主对角线上元素不为零，而矩阵中其它元素均为零，这样的矩阵称为对角矩阵，记为：

$$ {}_nD_n = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

特殊的，当 $d_{11} = d_{22} = \cdots = d_{nn} = 1$，这样的矩阵称为单位矩阵，记为：

$$ {}_nI_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

（二）矩阵(加、乘)运算规则和性质

如果两个矩阵 ${}_sA_n$ 和 ${}_sB_n$ 的对应位置上的元素相等，$a_{ij} = b_{ij}$，则称 ${}_sA_n = {}_sB_n$． 矩阵 ${}_sA_n$ 与 ${}_sB_n$ 的和(差)也是 ${}_sC_n$ 矩阵：

$$ {}_sC_n = {}_sA_n \pm {}_sB_n = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} \pm b_{s1} & a_{s2} \pm b_{s2} \cdots & a_{sn} \pm b_{sn} \end{bmatrix} \tag{9}$$

亦即矩阵 ${}_sC_n$ 的元素 $C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$；特殊地，当 ${}_sA_n = {}_sB_n$，则有零矩阵(元素均为 0)：

$$ {}_sC_n = {}_sA_n - {}_sB_n = {}_sO_n $$

矩阵 ${}_sA_n$ 与常数 α 相乘，所得矩阵是 ${}_sA_n$ 的元素，均乘以 α，即：

$$\alpha_sA_n=\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12}\cdots\alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22}\cdots\alpha a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ \alpha a_{s1} & \alpha a_{s2}\cdots\alpha a_{sn}\end{bmatrix} \tag{10}$$

矩阵 ${}_sA_n$ 乘 ${}_nB_m$ 所得矩阵为 ${}_sC_m$ 矩阵，简记成：

$${}_sC_m={}_sA_nB_m=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\cdots C_{1m}\\ C_{21} & C_{22}\cdots C_{2m}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ C_{s1} & C_{s2}\cdots C_{sm}\end{bmatrix} \tag{11}$$

其中元素

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,m)$$

例如

$${}_2A_4=\begin{bmatrix}3 & 2 & 8 & 1\\ 1 & -4 & 0 & 3\end{bmatrix}\quad 与\quad {}_4B_2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\\ 0 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

相乘所得矩阵为：

$${}_2C_2={}_2A_4B_2=\begin{bmatrix}3 & 2 & 8 & 1\\ 1 & -4 & 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\\ 0 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\cdot2+2\cdot1+8\cdot0+1\cdot3 & 3\cdot(-1)+2\cdot(-3)+8\cdot1+1\cdot1\\ 1\cdot2+(-4)\cdot1+0\cdot0+3\cdot3 & 1\cdot(-1)+(-4)\cdot(-3)+0\cdot1+3\cdot1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 0\\ 7 & 14\end{bmatrix}$$

由乘法定义和经过实际计算，推出矩阵乘法有下列性质：

(1) ${}_sA_n({}_nB_mC_k)=({}_sA_nB_m)_mC_k$；

(2) $\alpha({}_sA_nB_m)=(\alpha_sA_n)_nB_m$；

(3) $({}_sA_n+{}_sB_n)_nC_m={}_sA_nC_m+{}_sB_nC_m$；

(4) ${}_mC_s({}_sA_n+{}_sB_n)={}_mC_sA_n+{}_mC_sB_n$；

(5) ${}_sA_nB_s\neq{}_nB_sA_n$。

作矩阵乘法运算，必须注意左乘矩阵 ${}_sA_n$ 的列数 (n) 必须等于右乘矩阵 ${}_nB_m$ 的行数 (n)，否则不能进行乘法运算。

矩阵 ${}_nA_n$ 的 p 次幂定义为：

$$\underbrace{{}_nA_{nn}A_n\cdots{}_nA_n}_{p\text{ 次}}={}_nA_n^p\qquad(令\ {}_nA_n^0={}_nI_n)$$

而且有性质

(1) ${}_nA_n^p A_n^q = {}_nA_n^{p+q}$,

(2) $({}_nA_n^p)^q = {}_nA_n^{pq}$.

(三) 转 置 矩 阵

将矩阵 ${}_sA_n$ 行列交换所得矩阵称为 ${}_sA_n$ 的转置矩阵,记成为:

$$ {}_sA'_n = {}_nA_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots & a_{s2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{sn} \end{bmatrix} \tag{12} $$

在特殊情况下,1 行 n 列矩阵的转置矩阵为:

$$ {}_1A'_n = (a_{11} \quad a_{12} \cdots a_{1n})' = {}_nA_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \tag{13} $$

按定义计算,可得下列性质:

(1) $({}_sA'_n)' = {}_sA_n$;

(2) $({}_sA_n + {}_sB_n)' = {}_sA'_n + {}_sB'_n = {}_nA_s + {}_nB_s$;

(3) $({}_sA_nB_s)' = {}_nB'_{ss}A'_n = {}_sB_nA_s$.

如果矩阵 ${}_sA'_n = {}_sA_n$, 则称 ${}_sA_n$ 为对称矩阵. 由此,推知对称矩阵必是方阵 ($s = n$),而且它的元素关于主对角线是相等的,即:

$$ a_{ij} = a_{ji} $$

乘积 ${}_sC_s = {}_sA_n({}_sA'_n)$ 也是对称矩阵,因为

$$ {}_sC'_s = ({}_sA_{ns}A'_n)' = ({}_sA'_n)'{}_sA'_n = {}_sA_n({}_sA'_n) = {}_sC_s $$

如矩阵

$$ {}_2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} $$

有

$$ {}_2A_3({}_2A_3)' = {}_2A_3A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} 1^2 + 2^2 + 3^2 & 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 3 & 4^2 + 5^2 + 6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix} $$

(四) 逆矩阵、正交矩阵

如果方阵 ${}_nA_n$ 成立等式

$$ {}_nA_{nn}A_n^{-1} = {}_nA_n^{-1}{}_nA_n = {}_nI_n \tag{14} $$

则称 ${}_nA_n^{-1}$ 为方阵 ${}_nA_n$ 的逆矩阵. 方阵称为非异的,是指它的行列式不等于零. 所谓方阵

$$
{}_nA_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

的行列式是一个数，不是有秩序的数字阵列表．这个数常表示为 $\det {}_nA_n$ 或 Δ:

$$
\det {}_nA_n = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(-1)}^{N(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \cdots a_{\alpha_n n} \tag{15}
$$

其中 $N(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 表示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 即 $1, 2, \cdots, n$ 的一种排列之逆序数．如下列的二、三阶矩阵(方阵)的行列式(数)

$$
\det {}_2A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2 \neq 0
$$

$$
\det {}_3A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot2\cdot2 + 2\cdot1\cdot3 + 3\cdot2\cdot1 - 3\cdot2\cdot3 - 2\cdot2\cdot2 - 1\cdot1\cdot1 = -11 \neq 0
$$

因此，方阵

$$
{}_2A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad 和 \quad {}_3A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

都是非异矩阵．可以证明非异矩阵存在逆矩阵，否则不存在，证明过程也给出 ${}_nA_n^{-1}$ 的表达式．为了证明，先造一个 ${}_nA_n$ 的关联矩阵

$$
{}_n\widetilde{A}_n = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{16}
$$

其中元素 A_{ij} 是 ${}_nA_n$ 的代数余因子，它是去掉 i 行 j 列的全部元素带上符号 $(-1)^{i+j}$ 的行列式

$$
A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1}, & a_{1,j+1}, & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1}, & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1}, & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1}, & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{17}
$$

$(i, j = 1, 2, 3, \cdots, n)$，用 Δ 除 ${}_n\widetilde{A}_n$ 的每个元素，得矩阵

$$
{}_nA_n^* = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix}
$$

就是要求的逆矩阵。经过矩阵乘法运算，可以得出：

$$
\left.\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}\Delta \\
\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}\Delta
\end{aligned}\right\} \tag{19}
$$

式中

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}
$$

利用这个性质，可证乘积

$$
{}_nA_nA_n^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta} & \dfrac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \dfrac{A_{n1}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}}{\Delta} & \dfrac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \dfrac{A_{2n}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{A_{1n}}{\Delta} & \dfrac{A_{2n}}{\Delta} & & \dfrac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = {}_nI_n \tag{20}
$$

由定义即知 ${}_nA_n^{-1} = {}_nA_n^*$。 若 $\Delta = 0$，则不存在 ${}_nA_n^{-1}$。

例如矩阵

$$
{}_3A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}
$$

的行列式为

$$
\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \neq 0
$$

而 ${}_3A_3$ 的关联矩阵为

$$
{}_3\widetilde{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

由此得出它的逆矩阵为

$$
{}_3A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

求高于三阶矩阵的逆矩阵时，总是求解矩阵方程(20)，就是解系数完全相同，右端分别为单位矩阵的列的 n 个 n 阶线性代数方程组(见本章 § 5)。

逆矩阵具有下列性质:

(1) $({}_mA_mB_m)^{-1} = {}_mB_m^{-1}{}_mA_m^{-1}$;

(2) $({}_nA_n^{-1})' = ({}_nA'_n)^{-1}$.

对给定的实矩阵 ${}_nA_n$,若其转置矩阵 ${}_nA'_n$ 等于它的逆矩阵 ${}_nA_n^{-1}$,即 ${}_nA'_n = {}_nA_n^{-1}$ 或 ${}_nA'_nA_n = {}_nI_n$,则称 ${}_nA_n$ 为正交矩阵,并具有下述性质:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

§3 向量运算、垂线问题

(一) 向量、向量运算

某些物理量,比如温度、气压、质量等无方向性的量叫做无向量;但有些量,比如梯度力、空气质点的移动速度、加速度等是有方向性的,叫做有向量.表示有向量,需要同时用数量(大小)和方向来表示.比如风,需要用风速和风向来表示.

由解析几何知识,对给定的两个数 (x, y),在平面坐标系(二维空间)中可以确定一点,与原点的联线可以定义一个向量.一般地,对于给定 n 个数

$$(x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1}) \tag{21}$$

在 n 维空间中定义一个 n 维向量

$$\boldsymbol{X}_1 = (x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1})' = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \tag{22}$$

其中 $x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1}$ 可以看成 n 维坐标系中的坐标分量.向量 $\boldsymbol{X}_1$ 也可以看成 n 行 1 列矩阵 ${}_nX_1$. 线性代数方程组的解也可以看成 n 维向量. ${}_nA_m$ 矩阵的每行可以看成 m 维向量;每列可以看成 n 维向量.分量为零的向量称为零向量.

$$\boldsymbol{O} = (0, 0, \cdots, 0) \tag{23}$$

两个向量 $\boldsymbol{X}_1 = (x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1})'$ 和 $\boldsymbol{X}_2 = (x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{n2})'$,若对应分量相等: $x_{i1} = x_{i2}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$,则称为相等的向量: $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2$.

两个向量的和定义为:

$$\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 = (x_{11} + x_{12}, x_{21} + x_{22}, \cdots, x_{n1} + x_{n2})'$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} \\ x_{21} + x_{22} \\ \vdots \\ x_{n1} + x_{n2} \end{pmatrix} \tag{24}$$

用数 k 乘向量 $\boldsymbol{X}_1$ 定义为

$$k\boldsymbol{X}_1 = (kx_{11}, kx_{21}, \cdots, kx_{n1})' = \begin{pmatrix} kx_{11} \\ kx_{21} \\ \vdots \\ kx_{n1} \end{pmatrix} \tag{25}$$

全部 n 维向量组成的集体(集合),可以进行和以及数乘的运算,而且经过运算所得的向量仍然属于这 n 维向量的成员,这样的集合称为线性向量空间(E_n).

(二)向量的投影与内积

向量 $\boldsymbol{X}_1$ 在向量 $\boldsymbol{X}_2$ 方向上的投影,表示为向量 X_1 的长度乘以此二向量夹角 θ 的余弦

$$投影_{\boldsymbol{X}_2}\boldsymbol{X}_1 = |\boldsymbol{X}_1|\cos\theta$$

其中长度 $|\boldsymbol{X}_1|$ 为 $\boldsymbol{X}_1$ 的 n 维空间坐标分量平方和之平方根. 比如三维向量 $\boldsymbol{X}_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31})$ 的长度为 $|\boldsymbol{X}_1| = \sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2}$. 两个向量的数量积(内积)是一个数,表示为:

$$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = |\boldsymbol{X}_1||\boldsymbol{X}_2|\cos\theta \tag{26}$$

而且可用分量表示内积:

$$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + x_{31}x_{32} \tag{27}$$

由此,一般定义两个 n 维实数坐标向量的内积为

$$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} \tag{28}$$

且有下列性质

(1) $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_1) \geqslant 0$, 仅当 $\boldsymbol{X}_1$ 为零向量时,等于 0;

(2) $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = (\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_1)$;

(3) $k(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = (k\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = (\boldsymbol{X}_1, k\boldsymbol{X}_2)$, k 为实数;

(4) $(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3) = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_3) + (\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3)$.

若 n 维向量空间 E_n 中的两个向量 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 的数量积等于零,

$$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = 0 \tag{29}$$

则称 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 是正交的. 对于非零向量,正交性意味着两向量之间的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 就是互相垂直的意思.

向量组 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$ 之中任何两个向量彼此正交

$$(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) = 0 \qquad 当\ i \neq j \tag{30}$$

则称为正交向量组. 若向量 $\boldsymbol{X}_1$ 正交于 $\boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$, 则正交于后者的线性组合

$$\boldsymbol{X} = C_2\boldsymbol{X}_2 + C_3\boldsymbol{X}_3 + \cdots + C_m\boldsymbol{X}_m$$

$C_i (i = 2, \cdots, m)$ 为常数, 也就是说 $\boldsymbol{X}_1$ 正交于由 $\boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$ 展布的空间(E_n' 子空间)、实际上,若 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_k) = 0$, $(k = 2, 3, \cdots, m)$, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}) &= (\boldsymbol{X}_1, C_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + C_m\boldsymbol{X}_m) \\ &= \sum_{k=2}^{m} C_k(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_k) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

（三）线性相关、正交基底

空间 E_n 中的向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$，若存在不全为零的常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$，使得

$$C_1\boldsymbol{X}_1 + C_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + C_m\boldsymbol{X}_m = 0 \text{（零向量）} \tag{32}$$

则称向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$ 为线性相关. 比如 $C_m \neq 0$，由上式得到

$$\boldsymbol{X}_m = r_1\boldsymbol{X}_1 + r_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + r_{m-1}\boldsymbol{X}_{m-1}$$

式中

$$r_i = -\frac{C_i}{C_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m-1)$$

因此，对于给定的向量组是线性相关的，当且仅当其中一个是其余的线性组合.

若仅当 $C_1 = C_2 = \cdots = C_m = 0$ 时，组合式(32)才能成立，则称向量组 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$ 为线性无关.

对给定的一组向量

$$X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

要检查是否线性相关，可由定义得出下列确定常系数 $C_k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 的方程组:

$$\begin{cases} C_1x_{11} + C_2x_{12} + \cdots + C_mx_{1m} = 0 \\ C_1x_{21} + C_2x_{22} + \cdots + C_mx_{2m} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \cdots + C_mx_{nm} = 0 \end{cases} \tag{33}$$

若这组方程有非零解 C_k，则向量组 $\boldsymbol{X}_j$ 是线性相关的. 反之，向量组 $\boldsymbol{X}_j$ 是线性无关的. 用坐标的矩阵写出

$${}_n\boldsymbol{X}_m = \begin{bmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \cdots, & x_{1m} \\ x_{21}, & x_{22}, & \cdots, & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \cdots, & x_{nm} \end{bmatrix} \tag{34}$$

其秩 r（即矩阵中不等于零的行列式最高阶数）$< m < n$，即 $\det {}_m\boldsymbol{X}_m = 0$，则有非零解 C_k. 因而，若 $r < m$，则向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_m$ 为线性相关. 反之，$r = m$，则为线性无关. 比如向量组

$$\boldsymbol{X}_1 = (1, -1, 1, -1, 1)'$$
$$\boldsymbol{X}_2 = (1, 0, 2, 0, 1)'$$
$$\boldsymbol{X}_3 = (1, -5, -1, 2, -1)'$$
$$\boldsymbol{X}_4 = (3, -6, 2, 1, 1)'$$

的坐标矩阵

$${}_5\boldsymbol{X}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

它有三阶行列式 $\neq 0$，因而秩 $r=3$，小于向量个数 $m=4$，则向量组 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4$ 是线性相关的．事实上，

$$\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3-\boldsymbol{X}_4=0 \text{（向量）}$$

在空间 E_n 中存在 n 个线性无关的向量组，比如 n 个单位向量组

$$\begin{cases} \varepsilon_1=(1, 0, 0, \cdots, 0)' \\ \varepsilon_2=(0, 1, 0, \cdots, 0)' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n=(0, 0, 0, \cdots, 1)' \end{cases} \tag{35}$$

是线性无关的． n 维空间中的 n 个线性无关的向量组，称为这个空间的基底． n 维空间中的任何向量可用基底的线性组合形式唯一地表示，即当 $\boldsymbol{X}$ 属于 E_n，而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为基底，则

$$\boldsymbol{X}=C_1\varepsilon_1+C_2\varepsilon_2+\cdots+C_n\varepsilon_n$$

是唯一的．

空间 E_n 中的基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 若是相互正交的，则称为正交基底． 显然，n 维单位向量(35)是正交向量组．若基底向量 $\varepsilon_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 满足

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_k)=\begin{cases} 1 & \text{当 } i=k \\ 0 & \text{当 } i\neq k \end{cases}$$

则称为正交正规化基底．任何正交基底除以各自的长度

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{(\varepsilon_i, \varepsilon_i)}} \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{36}$$

所得的基底 $\boldsymbol{e}_i$ 是正交正规化的．

（四）垂 线 问 题

在 E_n 中，取一子空间 E'_k 与向量 $\boldsymbol{Y}$，要求作出分解式

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H} \tag{37}$$

其中 $\boldsymbol{G}$ 属于子空间 E'_k，向量 $\boldsymbol{H}$ 与子空间 E'_k 中的任何向量正交． $\boldsymbol{G}$ 称为向量 $\boldsymbol{Y}$ 在 E'_k 上的投影，向量 $\boldsymbol{H}$ 称为自向量 $\boldsymbol{Y}$ 的终点投影到 E'_k 的垂直向量(图 1-1)．

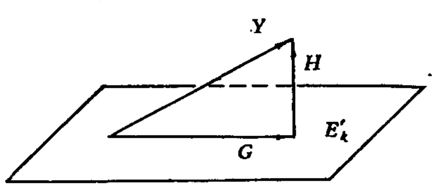

图 1-1

为建立分解式，在 E'_k 中选取正交正规化基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ 并将 $\boldsymbol{G}$ 表示为

$$\boldsymbol{G}=C_1\boldsymbol{e}_1+C_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+C_k\boldsymbol{e}_k \tag{38}$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 是待定常数，向量 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{G}$ 必须与子空间 E'_k 正交，其充要条件为

$$(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{e}_i)=(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{G}, \boldsymbol{e}_i)=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, k) \tag{39}$$

将 G 的组合表达式代入，得到

$$(\boldsymbol{Y}-C_1\boldsymbol{e}_1-C_2\boldsymbol{e}_2-\cdots-C_k\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i)=(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{e}_i)-C_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{e}_i)-C_i=0$$

因此，当等式

$$C_i=(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{e}_i) \qquad (C_i=1, 2, \cdots, k) \tag{40}$$

成立，向量 $\boldsymbol{H}$ 与子空间 E'_k 中的向量正交．