建筑画法几何学

〔奥〕H. 布劳纳　W. 基金格　著
叶秉钧　译

高等教育出版社

本书是奥地利 H. 布劳纳(Brauner)和 W. 基金格(Kickinger)合著的建筑画法几何学(«Baugeometrie», 第一卷(1977年版)和第二卷(1982年版)的合译本。全书共分十章。第一、二两章介绍画法几何的基本原理和方法,是学习其余各章的基础。第三章至第六章介绍各种曲面的投影,对回转面、直纹面、平移曲面和二次曲面作了专题论述。第七章至第十章介绍透视、阴影和标高投影的各种方法,以及如何运用这些方法解决各种曲面的作图问题。

本书中的大部分图例选自世界各国已建成的建筑,图例的综合性较强,刻意解决现代建筑造型中采用的各种曲面的投影作图问题。解题时综合运用了画法几何、射影几何和微分几何的一些方法,以解决一些比较复杂的图示和图解问题。

本书是为从事设计工作的建筑、土木和测量等方面的工程技术人员,以及大专院校相应专业的教师、学生而写的,亦可供对画法几何要求较高的其他专业人员参考。

建筑画法几何学

〔奥〕H. 布劳纳 W. 基金格 著

叶秉钧 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

民族印刷厂印装

*

开本787×1092 1/16 印张 14 字数 314 000

1989年4月第1版 1989年10月第1次印刷

印数 0001—1 560

ISBN 7-04-000879-3/TU·29

定价 5.80 元

译者的话

设计现代建筑物时，往往需要有广博的画法几何知识。这是因为现代建筑造型采用了大量的曲面，而且由于结构造型或美观的要求，又常常使这些曲面对投影面处于一般位置。因此，有必要对各种曲面的投影性质进行深入的研究，搞清楚在不同的相对位置下，以及在不同的投影方式(多面正投影，轴测投影，透视，标高投影等)中，各种曲面的投影外形线和交线的投影特性。为了准确地作出曲面及其上的一些曲线，还需要进一步研究它们的微分几何性质(如切平面、切线、曲率、曲率中心等)，以及它们的投影表示。

本书综合应用画法几何、微分几何和射影几何的一些方法来解决复杂的投影问题。在画法几何的理论阐述上有一定的深度。原书的第一、二两卷分别于1977年和1982年出版。为了读者阅读的方便，中译本合并为一册。本书的第一、二两章介绍画法几何的一些基本方法，它是其余各章的基础。第三章至第六章介绍各种曲面的投影，对回转面、直纹面、平移曲面和二次曲面作了专题论述，并把着重点放在现代建筑结构如薄壳结构等的造型与图示、图解方面。第七章至第十章，介绍透视、阴影和标高投影的各种方法，以及如何运用这些方法解决各种曲面的作图问题。

本书中的大部分图例选自各国已建成的建筑，其中不乏著名的设计。一部分图例的综合性较强，难度也比较大，对开阔视野、深入掌握画法几何的知识有较大的参考价值。

本书作者H. 布劳纳 (Brauner)1928年生于维也纳，1950年获哲学博士，1952年获工学博士。1969年开始任维也纳工业大学教授及第一几何教研室主任，1970年兼任维也纳大学名誉教授，1973年开始任奥地利科学院通讯院士，是欧洲的著名几何学家和画法几何学家。另一作者W. 基金格 (Kickinger)1934年生于维也纳，1978年开始任维也纳工业大学高级科学顾问。

在本书的翻译过程中，同济大学黄锺琏教授曾提出过很好的意见，同时还得到了不少同行专家的支持和鼓励，在此深表谢意。由于译者水平所限，加之在奥地利、德国体系的画法几何书中，有许多独有的词汇，而当前国内还没有统一的译法，对于译文不当之处，欢迎读者批评指正。

译　者

一九八七年五月

目　　录

第一章　几何基本知识、棱锥面和棱柱面

1.1　射影和透视对应，棱锥面和棱柱面

1.1.1　符号

本书中，点用大写斜体字母（A、B、P、Q、…）表示，直线和曲线用小写斜体字母（a、b、g、h、…）表示，平面和曲面用希腊字母（α、β、ε、π、Φ、Ψ、…）表示。辅助点有时用编号表示。我们把曲线和曲面、特别是把直线和平面看成是点集。这些几何概念是客观世界的物体通过抽象而得到的，为的是能够较好地描述有规律的形体。如果材料强度可以忽略不计，这些几何形体就可以用来代替由物质组成的形体。

虽然在工程物体上见到的只是有限的一段直线和一片平面，但是为了作图需要，我们经常把这些直线和平面想象成为无限的。本书中，两个不同的点 A 和点 B 的连线用 AB 表示，两个不同的平面 α 与平面 β 的交线用 $\alpha\beta$ 表示，直线 a 与不通过 a 的平面 α 的交点用 $a\alpha$ 表示，两相交直线 a 与 b 的交点用 ab 表示，三角形(A, B, C)的平面用 ABC 表示。在重复连结时采用括号，例如直线 OP与平面 π 的交点用$(OP)\pi$ 表示。

此外，平行状态和垂直法向状态①分别用符号 $/\!/$ 和 $\perp$ 表示；以 A、B 为端点的线段 (A,B) 的长度用 $\overline{AB}$ 表示。点 A 到平面 α 的距离 $\overline{A\alpha}$，要在通过 A 的一条 α 面的法线 n 上作为距离 $\overline{AN}$ 来量取，这时候 $N=n\alpha$。点 A 到直线 a 的距离 $\overline{Aa}$，在通过 A 向 a 所作的垂线 n 上作为距离 $\overline{AN}$ 来量取，这时候 $N=na$。

为了消除平行元素在位置上的特殊性，我们采用了下面的说法：

(1)　平行直线共有一无穷远点②。

(2)　平行平面共有一无穷远直线。

(3)　一直线和与之平行的平面共有一无穷远点，这个无穷远点位于平面的无穷远直线上。

由于(1)，一平面内两条不同直线总有一个交点。如果两条直线没有公共点，它们就叫做交叉直线。由于(2)，两个不同平面总有一条交线。由于(3)，一直线与不通过它的任一平面交于一点。

如果要强调一点不是无穷远点或一直线不是无穷远直线时，我们把它们分别叫做固有点或固有直线。本书中，无穷远点或无穷远直线通常分别用带下标 u 的大写正体字母或小写正体字母来表示。在图上，由一条固有直线 g 唯一地确定的无穷远点 $\mathrm{G_u}$ 用空心箭头指示，无论箭头指向 g 的那一端都表示同一个无穷远点。

---

①　“铅垂”只用来表示指向地心的方向。

②　新概念首次出现时，下加着重点表示。

1.1.2 射影

工程物体是通过射影用图来表示的。从一个射影中心(视点)O 把物体向一个不包含 O 的画面 π 作射影，任意一个与 O 不同的点 P 以点 $P^c=(OP)\pi$ 作为它的图象(图 1.1)。我们把这样射影所得的图象点 P^c 也叫做 P 的投影。通过 O 的直线或平面叫做投射线或投射面。如果一点 P 沿着一条非投射直线 g 移动，那么它的图象点 P^c 也沿着图象直线 g^c 移动；如果 g 不在 π 内，则 g^c 包含 g 的迹点 $G=g\pi=G^c$。尤其是对于 g 上的无穷远点 G_u，从 1.1.1 可知，OG_u 是通过 O 且平行于 g 的直线，并且 $G_u^c=(OG_u)\pi$。在一条投射线 s 和一个投射面 σ 上，与视点不重合的那些点的投影，分别是迹点 $s\pi=s^c$ 和迹线 $\sigma\pi=\sigma^c$ 上的一点。

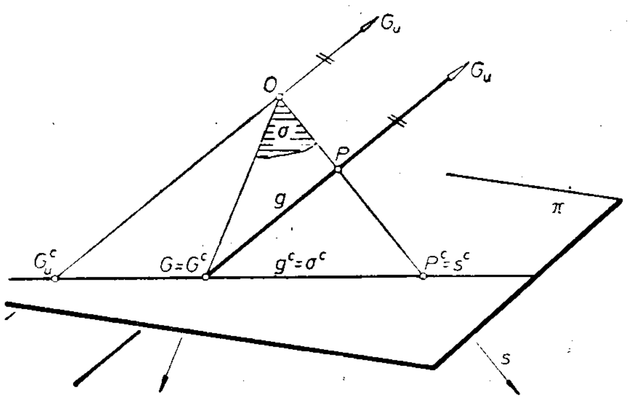

图 1.1

每一条与 π 相平行的直线 h 叫做主直线。如果主直线 h 不在 π 内，则 h 的迹点是 π 的一个无穷远点 H_u。每一个与 π 相平行的平面 η 叫做主平面。如果主平面 η 与 π 不重合，则 η 的迹线是 π 的无穷远直线。

如果采用已按顺序编号的几个投影①，我们就称为第一主直线、第一投射线等等。

根据射影中心是固有点还是无穷远点，可把射影分为中心射影(透视投影)或平行射影②。所以在平行射影中，投射线都是平行的。透视投影是用一只眼睛看物体并把它仿制成照片；平行射影则相当于从较远的距离观察物体。指向观察方向的投射线叫做视线；直线的方向以实心箭头表示。观察方向对可见性问题起关键性作用，因此在平行射影中须附加说明。

作为射影过程的结果，物体的投影是画面上的一个图形。我们想象把这个图形移到图面上去，例如把它移到书页上或图板上去。

1.1.3 透视对应

设 α 和 β 是两个不同的平面，它们的交线是 $a=\alpha\beta$。而 Z 是既不在 α 内又不在 β 内的一点，从 Z 向平面 β 作空间的射影，这个射影在 α 内的点到 β 内的点之间建立一个特殊的对应，其中对应点总是位于通过 Z 的一条直线上。在这里，我们把一个平面的无穷远点也看成是它的点集内的点，根据 1.1.1，这些无穷远点全都属于平面的无穷远直线。这种从 α 内的点到 β 内的点之间的可逆的一一对应，称为以 Z 为透视中心和以 a 为透视轴的透视对应③。在这个透视对应中，a 上的点是唯一保持不变的点。利用 1.1.2，得到由平面 α 到平面 β 间透视对应的下列特性：

(I) α 内一直线上的点，都对应于 β 内一直线上的点；

(II) α 内的任一点 P 和它在 β 内的对应点 $\bar{P}$，都在一条通过透视中心 Z 的直线上；

(III) α 内的任一条直线 g 和它在 β 内的对应直线 $\bar{g}$，在透视轴 a 上都有一公共点。

① 本书规定三个基本投影的顺序号是：水平投影——第一投影，正面投影——第二投影，侧面投影——第三投影。——译者注

② 中心投影采用图象上标c。平行射影采用图象上标p。

③ 有时亦称透视变换。——译者注

由透视中心 Z、透视轴 a、一点 P 和它的对应点 $\bar{P}$，刚好确定一个透视对应。这时，P 和 $\bar{P}$ 应当与 Z 不重合且属于通过 Z 的一直线，这条直线与 a 不相交。于是平面 α 和 β 分别是 a 与 P 以及 a 与 $\bar{P}$ 的连结平面。我们用 $(Z, a; P\to\bar{P})$ 表示这样确定的一个透视对应。如果 $P=\bar{P}$，则 $\alpha=\beta$，该透视对应变为 $\alpha=\beta$ 的恒等对应。

在图 1.2 中，平面 α 内的一个正方形经由透视对应 $(Z, a; P\to\bar{P})$ 变换到平面 β 上①。对应顶点的连线都通过 Z，对应边所在的直线相交于 a。Q 的对应点 $\bar{Q}$ 是这样求出的：PQ 所对应的直线通过 $\bar{P}$ 和 PQ 与 a 的交点，而且，Q 和 $\bar{Q}$ 由通过 Z 的一条直线相连。

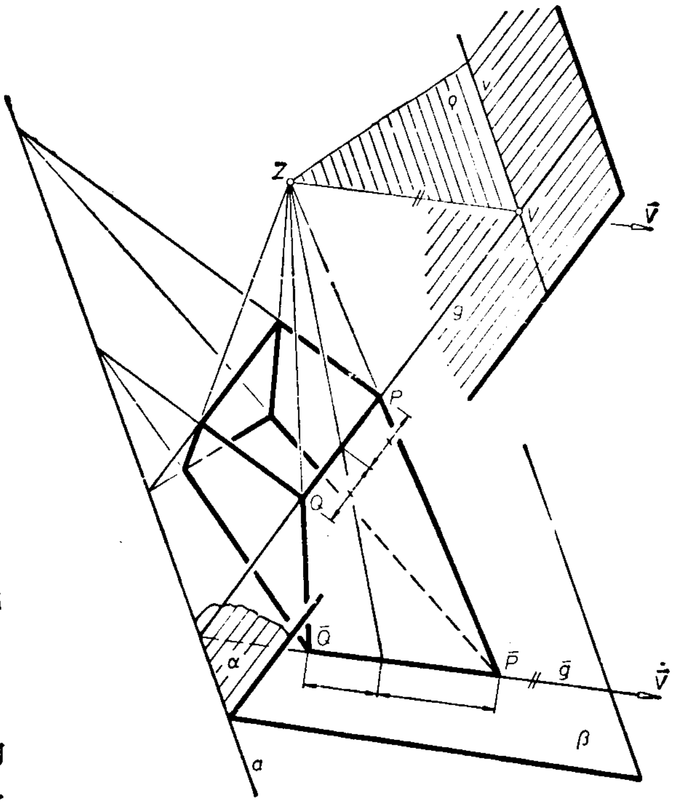

图 1.2

由于正方形并不对应于平行四边形，所以在透视对应中，α 内的平行线一般并不变换为 β 内的平行线，因此 α 内的一个无穷远点可以对应于 β 内的一个固有点。如果 α 内的某一点 V，使连线 ZV 与平面 β 相交于无穷远点，则点 V 对应于 β 内的一个无穷远点 $\bar{V}$，α 内的这种点 V 就叫做透视对应的遁点。如果 Z 是固有点，则所有的遁点都在通过 Z 且平行于 β 的平面 ρ 与平面 α 的交线 v 上（图 1.2）。我们把透视对应中与 β 的无穷远直线相对应的直线 v 称为透视对应的遁线。

设 A、B、C 是一直线上三个不同的点，根据 C 不在 A、B 之间或 C 在 A、B 之间的不同情况，把线段 $(A、C)$ 与 $(B、C)$ 的长度之比 $\overline{AC}:\overline{BC}$（总是正值）分别加上正号或负号，这样所表示的这个实数称为简单比，用 $TV(A,B,C)$ 表示。一般来说，透视对应是不保简单比的。因此，一线段的中点，并不一定变换为它的对应直线的中点，如图 1.2 所示。

1.1.4 特殊的透视对应

如果透视中心是一个无穷远点，或者透视轴是一条无穷远直线，就得到特殊的透视对应。

如果透视中心是一个无穷远点 Z_u，则对应的固有点（如 P 和 $\bar{P}$）的连线都互相平行，我们用 $(a; P\to\bar{P})$ 表示平面 α 对平面 β 的这一种平行透视对应，它可以由平行射影得到。因为在平行射影中，α 内的平行线都变换为 β 内的平行线（参看 1.2.1），所以平行透视对应是保平行性的（保无穷远点的），所有遁点都在 α 的无穷远直线上。

图 1.3 中，平面 α 内的一个正方形，经由平行透视对应 $(a; P\to\bar{P})$ 变换到平面 β 上，作图时也利用了保平行性。

从射线定理可知，α 的直线 g 到 β 内的对应直线 $\bar{g}$ 的平行透视对应是等简单比的。特别

① 建议读者按课文把全部作图都独立做一遍，并把所得结果跟本书的插图对照。图 1.2—1.5 的画法参看 1.1.5 和 1.2.2。

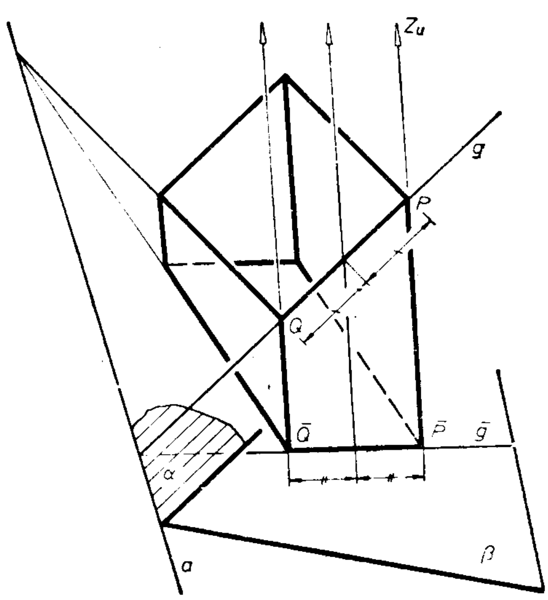

图 1.3

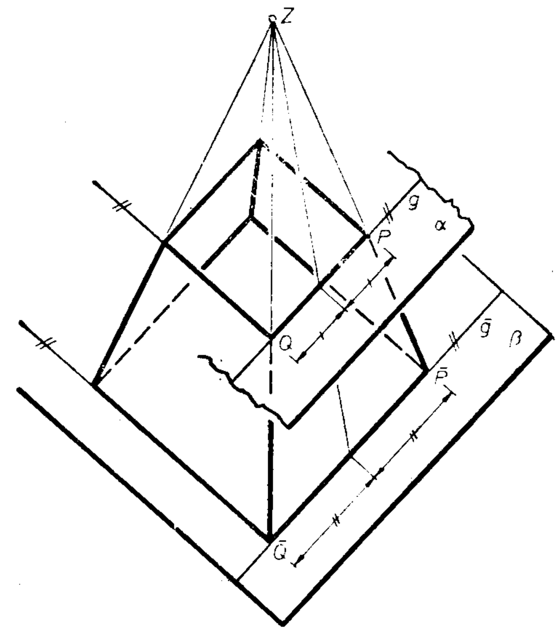

图 1.4

是线段的中点都与它的对应线段的中点相对应(图1.3)。

若透视轴为无穷远直线，则平面 α 与 β 平行。从1.1.3(III)可知，对应直线 α 内的 g 与 β 内的 $\bar{g}$ 总是平行的，因此对应角大小相等。若透视中心 Z 是固有点，则从射线定理可知，α 的每一直线 g 和它在 β 内的对应直线 $\bar{g}$ 是等简单比的，因而 α 内的每一图形和它在 β 内的对应图形只是比例不同。这种持殊的透视对应称为平面 α 到平面 β 的中心相似(图1.4)。

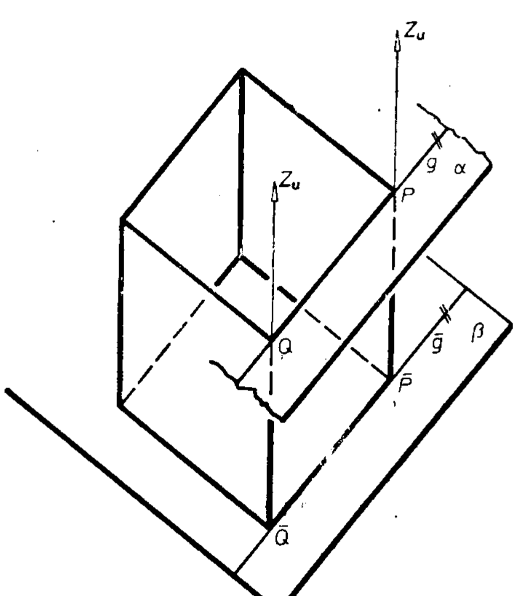

图 1.5

若透视轴为无穷远直线而且透视中心为无穷远点 Z_u，则 α 内的两点 P、Q 和它们在 β 内所对应的两点 $\bar{P}$、$\bar{Q}$ 总是组成一个平行四边形。在从 α 到 β 的这种平移中，α 内每一个图形平行移动至它在 β 内所对应的图形，对应图形是等平移的，因此是全等的(图1.5)。

1.1.5 棱锥面和棱柱面

当一直线 e 在运动时，始终通过定点 S 且与一多边形 l 相交，则可描绘出一个棱锥面。e 的各个位置称为棱锥面的素线①。S 称为棱锥面的顶点，而 l 称为棱锥面的导多边形，这里假设 l 的两邻边的连结平面并不包含 S。通过导多边形一个角的素线叫做棱锥面的棱。若顶点 S 恰好是一个无穷远点，则所有素线都相互平行，我们称这种面为棱柱面。

如果把棱锥面的顶点 S 选作从平面 α 到平面 β 的透视对应的中心，则从1.1.3和1.1.4可得：

① 象通常在几何书籍中那样，我们将“素线”变成和“直线”一样。

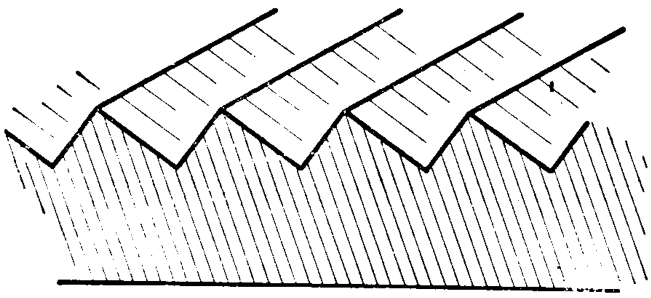

图 1.6

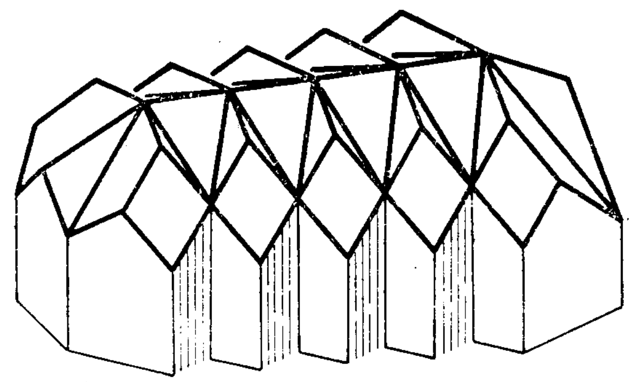

图 1.7

一棱锥面与不通过顶点的两平面α、β截割而成的两个截交多边形成透视对应(图1.2),如果β平行于α,则正好成中心相似(图1.4)。一棱柱面与两个和棱柱素线不平行的平面α、β截割而成的两个截交多边形成平行透视对应(图1.3),如果β平行于α则正好成等平移(图1.5)。

折板结构是一种由平板组成的空间支承结构。在这种结构中,外力首先不是垂直作用于平板的平面,而是通过平板的倾斜位置引向建筑物的支承构件。从几何学看,最简单的折板结构是棱锥形的和棱柱形的。由于一个棱锥侧面或棱柱侧面绕着棱线作适当的旋转时,可以将侧面展开在一个平面内,因此在支座处,只有用山墙式的支撑来保证折板结构的刚性组合,它才有承载能力。连贯一起的棱锥面和棱柱面彼此互相加强。图1.6所示的厂房屋顶是由山墙固定的V形折板结构。

图1.7所示是联邦德国波鸿市基督教堂(D. 厄斯特伦设计)的屋盖,由棱锥和棱柱相贯成的屋脊和天沟加强了体系的刚性。

图1.22、1.24和1.34中进一步介绍其它一些折板结构形式。

1.1.6 透视同素对应

平面π的点的集合对自身的可逆一一对应,即$\alpha=\beta=\pi$且满足1.1.3(I)、(II)、(III),其中Z是π的一个点而a是π的一条直线,这种对应,叫做π内的透视同素对应。在平面π内,直线a的每一点都保持不变,这条直线称为同素轴,π内的对应直线g与$\bar{g}$在此直线上相交。平面π内任意一对对应点P和$\bar{P}$的连线都通过面内一点Z,这个点称为同素中心①。由1.1.3(II)知,平面π内通过Z的一条直线的点只是变换成该直线内的另一点,而点Z在透视同素对应$(Z, a; P\to\bar{P})$中自相对应。如果同素中心正好是π的一个无穷远点,那末这个对应就称为π内的透视仿射对应$(a; P\to\bar{P})$,而a则称为仿射轴。

图1.2—1.5虽然表示的是从平面α到平面β的透视对应的空间关系,但毕竟实际上只是平面的书页π上的一个图形。从这些图我们可看出1.1.3和1.1.4中所述的透视对应的特性,由此可以得知,相应的这些特性也适用于平面π内的透视同素对应。特别是由π平面内的同素轴a、同素中心Z、一点P与它的对应点$\bar{P}$,如果P、$\bar{P}$既与Z相异又不在a上但属于通过Z的一条直线,则它们完全确定了π内的一个透视同素对应。此外,π内还有一条遁线,对

① π内的恒等对应是π内的一种透视同素对应,其中每个点都可以看作是同素中心,每条直线都可以看作是同素轴。

透视仿射对应来说，它是 π 的无穷远直线。以 π 的无穷远直线为同素轴的透视同素对应是 π 内的一个中心相似或是平移，则应根据同素中心是 π 的一个固有点还是无穷远点而定。

定理 1.1 透视对应(透视同素对应)由中心、轴以及通过中心的一条直线上的一对对应点确定。平行透视对应和透视仿射对应是保简单比和保平行性的。如果截平面不包含棱锥面的顶点或不平行于棱柱面的素线，则一个棱锥面或棱柱面的两个截交线分别成透视对应或成平行透视对应。

1.2 平行射影

1.2.1 平行射影的特性

在平行射影中，通过两条平行的非投射直线 a 和 b 的投射面是相互平行的，因此，图象直线 a^p 和 b^p 也是相互平行的(图 1.8)。

如果(A, B)和(P, Q)分别是 a 和 b 上的一直线段，且 a 平行于 b，则根据射线定理有 $\overline{A^pB^p}:\overline{AB}=\overline{P^pQ^p}:\overline{PQ}$。由此可得如下结论：

在平行射影中，非投射直线上的平行线段，其投影相互平行且按同一比值变形。

根据1.1.4，在非投射面 α 内的一个图形 $\mathfrak{F}$，与它在画面 π 内的投影 $\mathfrak{F}^p$ 成平行透视对应。如平面 α 与 π 不共面，则平面 α 在 π 上的迹线 $a=\alpha\pi$ 就是透视轴(图 1.9)。

尤其是对于与 π 不重合的主平面 η 来说，其透视轴位于 π 的无穷远直线上，因此根据1.1.4，主直线上的线段和主平面内的图形在平行射影时不变形地被画出来(图 1.8)。

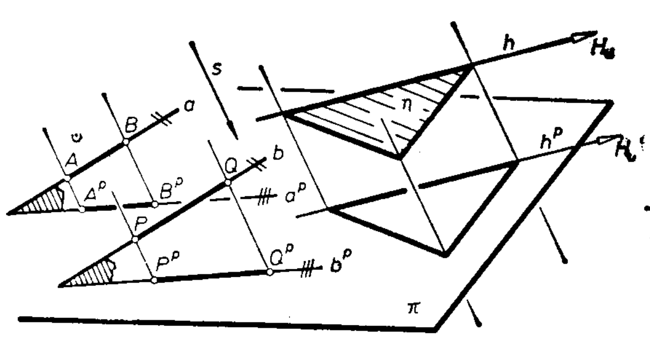

图 1.8

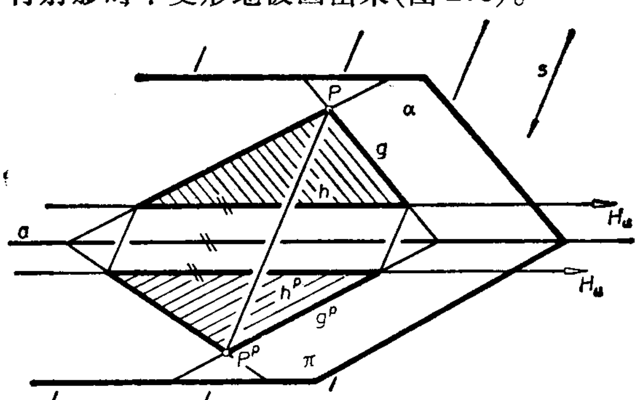

图 1.9

1.2.2 透视对应图形的平行射影

设 Z 是平面 α 到另一平面 β 的透视对应的中心，而平面 α 和 β 对一个给定的平行射影来说又不是投射面，则在透视对应中对应点 α 内的 P 和 β 内的 $\bar{P}$，其投影 P^p 和 $\overline{P^p}$ 在画面 π 内的一个透视同素对应中是对应的。在平行射影中，对非投射面 α 与 β 来说，1.1.3(I)、(II)、(III)这几条规律是成立的，因此这些规律对 π 内的投影也成立。若 Z 不是射影中心，则透视中心 Z 的投影 Z^p 是同素中心，而透视轴 $a=\alpha\beta$ 的投影 a^p 是 π 内的同素轴。由于每一个与视线的无穷远点不相重合的无穷远点经过平行射影仍然是一个无穷远点，所以由1.1.4所列举的平面 α 到平面 β 的一种特殊的透视对应中，可以得到1.1.6所讲的 π 平面内的一种类似的特殊的透视同素对应。

于是按所选定的可见性，图 1.2 和图 1.4 可看成是棱锥台的平行投影，而图 1.3 和图 1.5 则可看成是一段棱柱的平行投影。

1.2.3 正射影

正射影是视线 s 垂直于画面 π 时的一种平行射影①。在正射影中，与主直线 h 垂直的平面 α 是投射的，因此通过点 $h\alpha$ 垂直于 h 的任意一条非投射线 a 都在 α 内，其投影 $a^n=\alpha\pi=\alpha^n$ 垂直于 h^n(图 1.10)。这就表明：

如果直角的一边是主直线而另一边不是投射线，则直角的正投影仍是一个直角。

不是正投影的平行投影称为斜投影。上述重要规律在斜投影中不成立。

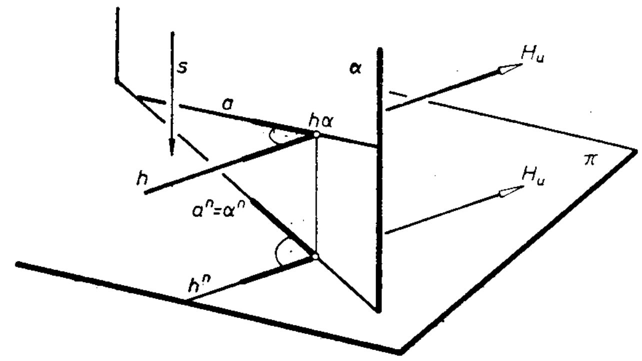

图 1.10

1.2.4 水平投影，正面投影，侧面投影

空间笛卡儿坐标系由三条通过公共原点 U 且两两相互垂直的轴 x、y、z 以及分别在 x、y、z 轴上称为单位点的三点 A、B、C 所组成，其中 $\overline{UA}=\overline{UB}=\overline{UC}$ 等于一选定的单位长度 e。我们以有向线段 $\overrightarrow{UA}$、$\overrightarrow{UB}$、$\overrightarrow{UC}$ 代表轴线的方向，而且都采用空间笛卡儿右手系。在右手系中，当对着 z 箭头看时，x 箭头通过沿正向，即在 xy 面内按逆时针方向转动四分之一圈后就变换为 y 箭头。（一个平面笛卡儿坐标系，当它的第一条方向已确定的坐标轴沿正向旋转四分之一圈就变换为第二条坐标轴时，则称为平面笛卡儿右手系。）同样当对着 x 箭头或对着 y 箭头看时，在 yz 平面或 zx 平面内，y 箭头或 z 箭头分别转到 z 箭头或 x 箭头。xy 平面、yz 平面和 zx 平面分别称为水平投影面 π_1、正立投影面 π_2 和侧立投影面 π_3。这些平面也叫做坐标面。

为了能读出一点 P 的坐标(同样用 x、y、z 表示)，将点 P 向水平投影面 π_1、正立投影面 π_2、侧立投影面 π_3 作垂直投射，并以相应轴线的反向作为视线 s_1、s_2、s_3 的视向。这样就得到图象点 P'、P'' 和 P'''，我们分别称它们为 P 的水平投影(第一投影)、正面投影(第二投影)和侧面投影(第三投影)②(图 1.11)。在相应坐标面的平面笛卡儿坐标系中，这三个正投影中的每一个投影表示 P 点的三个坐标中的两个坐标。以 (P,P')、(P,P'')、(P,P''') 为棱线的直六面体称为 P 的坐标直六面体；以 U 为起点、以 P 为终点的包含坐标直六面体上三条棱的折线称为 P 的坐标折线。

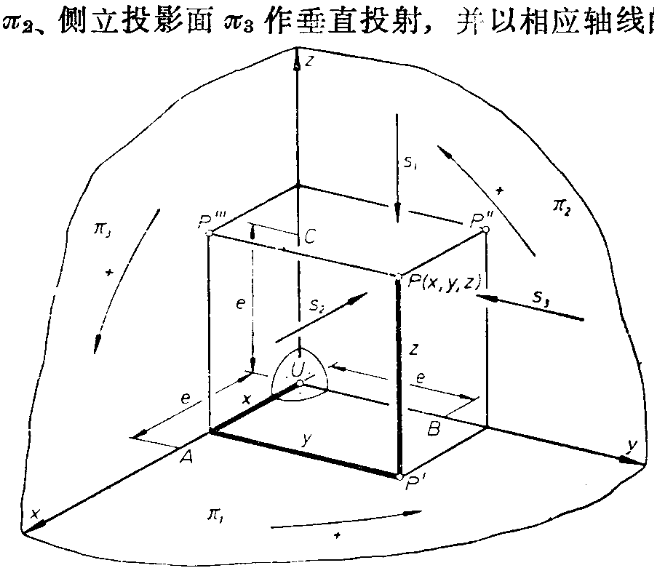

图 1.11

物体在互相垂直的两个画面上的正射影，称为配对正投影。水平投影和正面投影，正面投影和侧面投影以及水平投影和侧面投影是特殊的配对正投影。

① 采用图象上标 n 表示正射影。如果要区分几个正投影，也采用上标′、″、‴、IV 等。

② 在本书中水平投影、正面投影和侧面投影的配置方法与我国的习惯有些不同。——译者注

一个建筑物通常可以随便跟一个空间笛卡儿右手系连结起来，坐标系的轴确定了物体的长度、宽度和高度。z 轴总是铅直的并指向上方，水平投影面总是放在水平位置。水平投影表示从上面看到的视图，正面投影表示从前面看到的视图，而侧面投影表示从右面看到的视图。当然，对于建筑物的图形处理来说这些投影都太大。因此我们设想在空间按给定的比例来缩小物体，然后才按上述方法作缩小了的物体的投影。

1.2.5　配置线①、配对正投影的配置位置

已知空间一点 P 在两个坐标面内的正投影，则 P 点的三个坐标及其在坐标系的位置亦为已知(其中一个坐标甚至还出现两次)。为了作图，我们按 1.1.2 将物体在两坐标面上的正投影连同其上的坐标轴一起截开，把它们平放在图面上，使两个正射影的视线视向箭头都从绘图者指向图板。从 1.2.4 可知，图面上水平投影的 xy 系、正面投影的 yz 系和侧面投影的 zx 系都是平面笛卡儿右手系。

如果采用水平投影和正面投影，则 y 坐标是公有的(图 1.12)。借助于分规或配置线可以得到公有坐标的转换：如果在图面上水平投影图片的 y 轴不平行于正面投影图片的 y 轴，则从任一点 P 在水平投影图片中的水平投影 P' 及其在正面投影图片中的正面投影 P'' 向各自的 y 轴作垂线，从射线定理可知，这些垂线的交点都位于一条配置线轴上（图 1.12a 中用点划线表示)。因此，配置线轴可以由 y 坐标不同的两个空间点的两对投影来确定，而一点的水平投影和正面投影总是成对地在一条配置折线上，配置折线由两段在配置线轴弯折的直线组成。在正面投影图片中，平行于 z 而方向与 z 箭头相反的一段配置线可以看成是第一视线 s_1 的正面投影 s_1''；在水平投影图片中，平行于 x 而方向与 x 箭头相反的一段配置线可以看成是第二视线 s_2 的水平投影 s_2'。

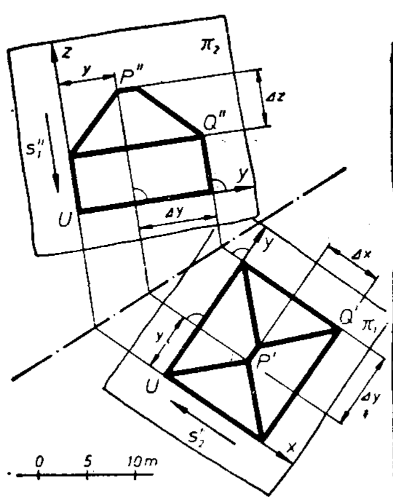

图　1.12a

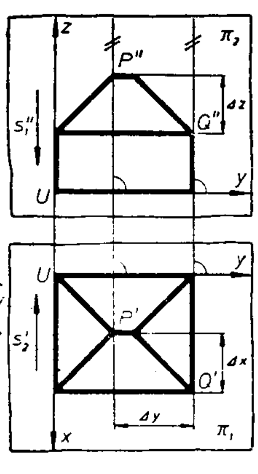

图　1.12b

在图面上，两坐标面上的配对正投影最好这样来放置，即放在使它们的配置线不弯折的位置上(图 1.12 b)。在这种配对正投影的配置位置，两视线不成点状的那两个投影总是成相对指向。

如果知道了物体上各点的相对位置，亦即知道了坐标差 Δx、Δy、Δz，则就确定了该物体的尺寸(图 1.12)。对确定一个物体来说，在图面上给出坐标轴是多余的。因为任意两个互相垂直的画面总可以被取作坐标面而组成一个坐标系，这样一来，物体的尺寸就可以由图面上的两个配对正投影确定。物体即使作平移，它对坐标系的位置还是确定的，因为人们知道的只是坐标差而不是坐标本身。

① 即投影连线。——译者注

在图面上,通常这样来放置工程物体的坐标面:即水平投影与正面投影以及正面投影与侧面投影处于配置位置,水平投影配置在正面投影下方;侧面投影配置在正面投影左方(德国工业标准 8 号,奥地利标准 M1104 号)①;一般不画坐标轴,也不画配置线。

虽然通过两个配对正投影可以确定物体上所有标有记号的点的相对位置,但却不一定能唯一地确定物体。图 1.13 表示两个不同的杆状构架的某部分,它们具有相同的水平投影和正面投影;但由侧面投影就可以看出这两个杆状构架的区别。这里的直观图是按 1.4.1 的方法画的。

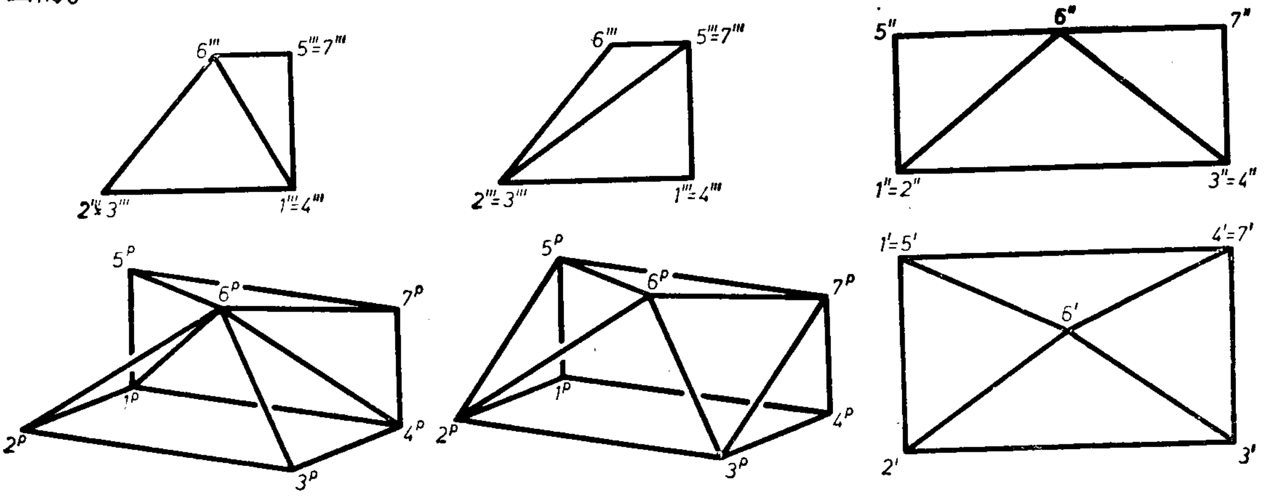

图 1.13

定理 1.2 在平行射影中,非投射的平行线段,其投影互相平行且变形量相等;主平面内的图形,其投影不变形。两个非投射面内成透视对应的图形或特殊时成平行透视对应的图形,平行射影后得到成透视同素对应的投影,特殊情况下得到成透视仿射对应的投影。如果直角的一边是主直线而另一边不是投射线,则这个直角的投影还是直角。物体上有标记的点的相对位置,可由两个配对正投影决定。

1.3 配对正投影

1.3.1 配对正投影中的平面

下述通常用以绘制水平投影和正面投影的方法,同样也可以用来绘制位于图面上任意位置的两个配对正投影。

第一主平面 η_1(平行于 π_1)上所有的点的 z 坐标相同。由于 z 坐标是在正面投影看到的,因此 η_1 内的点的正面投影在一条垂直于配置线的直线 η_1'' 上,即 η_1 的正面投影上。同样,每一个 x 坐标为常数的第二主平面 η_2(平行于 π_2)的水平投影 η_2',是一条垂直于配置线的直线。一般有:

投影面 π 的主平面,在与 π 配对的投影面上的投影,是一条与配置线相垂直的直线。

一个平面(例如 α)可以看成是与相交(特殊情况是平行)的两直线(例如 a 和 b)相交于不同两点的所有直线的点的集合。利用 α 内一直线 c 与直线 a 和 b 的交点 *1* 和 *2*,可以从 c 的

① 美国习惯规定将水平投影放在正面投影上方,将侧面投影放在正面投影右方。

一个投影补画它的配对投影(图 1.14a)。这种在平面内添加辅助线的方法也可以解决补投影问题：已知平面 α 内一点 P 的一个投影，求作它的配对投影(图 1.14a)。

在许多作图中都要用到平面上与两个投影面平行的主直线(比如参看1.3.4、1.3.7、2.2.2等)。第一主直线 h_1 总在某一个第一主平面 η_1 上，因此如果 h_1 不是第二投射线，则它的正面投影 $h_1''(=\eta_1'')$ 垂直于配置线。在通过 a 和 b 所决定的平面 α 上添加辅助线 h_1，可得 h_1 的水平投影(图 1.14a)。平面 α 上第二主直线 h_2 总是在某一个第二主平面 η_2 上，用同样方法可以先求出它的水平投影，然后求出它的正面投影。于是平面 α 也就由它的两条直线 h_1 和 h_2 确定。

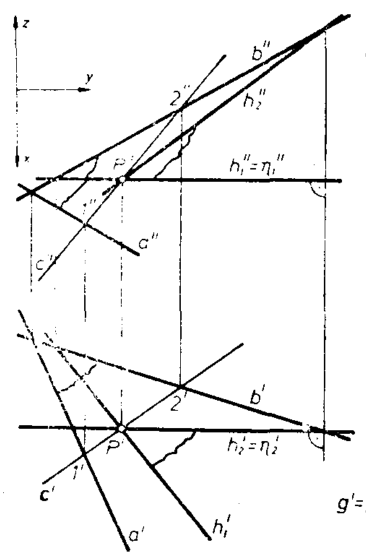

图 1.14a

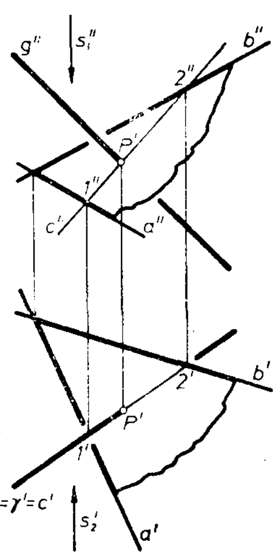

图 1.14b

为求出直线 g 与平面 α 的交点 $P=g\alpha$，我们过 g 作一投射面 γ，在图 1.14b 中，这个面用的是第一投射面。它与 α 相交于直线 c，直线 c 的水平投影为 $c'=\gamma'=g'$。通过 α 内的添加辅助线 c，可以从 c' 求出它的正面投影 c''，于是 $P''=c''g''$ (图 1.14b)。如果用这样的方法作出平面 β 上的两直线与平面 α 的交点 P 和 Q，假设这两点不重合，则 P 和 Q 确定了交线 $s=\alpha\beta$。

利用 1.2.5 所规定的视向箭头，可以在配对投影中判断一个投影的可见性，图 1.14b 中，g 对 α 上一片不透明平面的可见性就是这样得来的。

根据定理 1.2，与平面 α 垂直的非投射线 n 的正投影，与 α 内每一条主直线的正投影成直角。假如在两个配对正投影中依次应用这个规律，可以对两点 A、B 作出一个由相交两主直线确定的对称平面 α，这个平面以 AB 为法线 n 并通过线段(A,B)的中点 M，如图 1.15的正面投影和侧面投影所示。我们称 B 与 A 对称于 α。

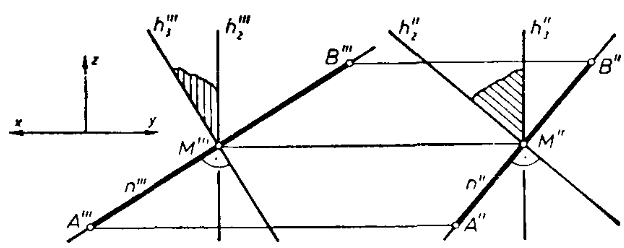

图 1.15

1.3.2 副投影

设 π_1 和 π_2是两个配对正投影的投影面，则 π_2 可用一个垂直于 π_1 的新投影面π_3 来替换。作为特例，侧面投影是一个与水平投影(或者也可说是与正面投影)配对的新的正投影①。设 P、Q 是物体的两个点而 η_1 是通过 P 的第一主平面，则 P、Q 两点的坐标差 Δz 等于点 Q 与 η_1 间的距离(图 1.16a)。这个距离在正面投影以及在作为副投影的 π_3 正投影中均反映真形。

如果在图面上，与水平投影配对的副投影是按 1.2.5 来放置，那末它与水平投影成配置位

① 今后，下标3 不只用于侧面投影。

置。这时，新配置线与新视线 s_3 的水平投影平行。在通过物体上一点 P 的水平投影 P' 的一条配置线上，给定点 P 的副投影 P'''，物体的副投影就完全确定。这时，s_1''' 的方向、即 s_3' 的反方向也就成为已知了(图 1.16b)。

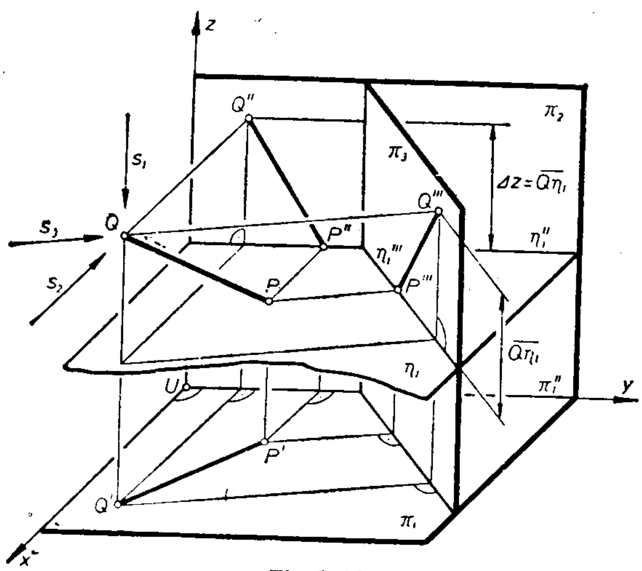

图 1.16 a

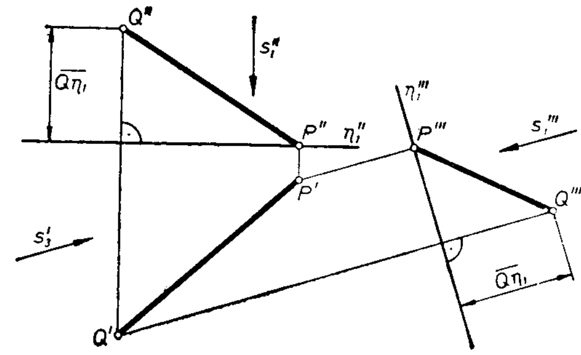

图 1.16b

用同样方法可作一个副投影，使其画面与任意两个配对正投影之一的画面相垂直。副投影通常选在与它配对的投影的配置位置上(不按这种方法配置的例子请参看图 3.10)。

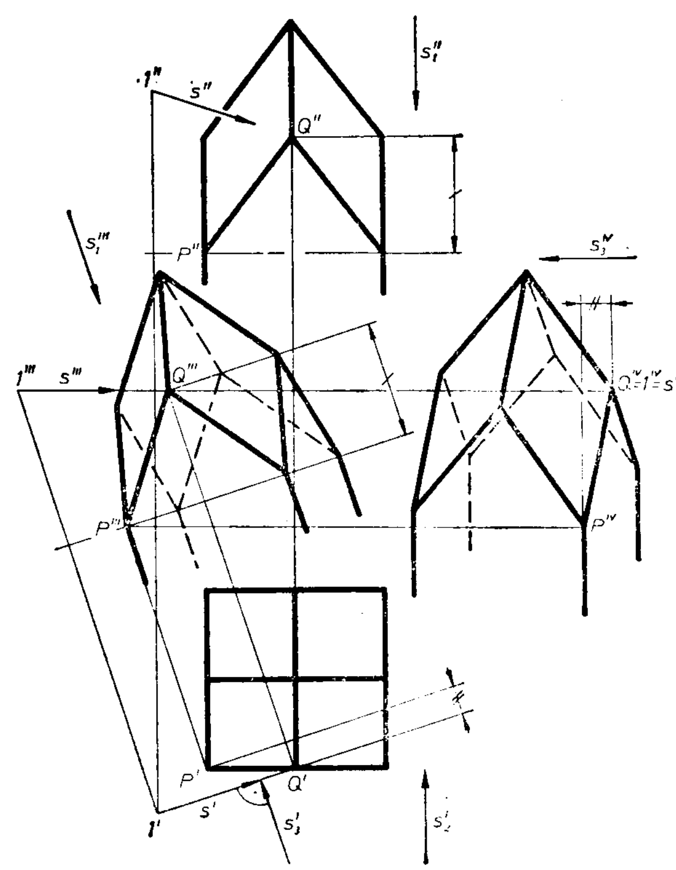

图 1.17

副投影在新的方向上产生新的视图。这个方向不同于原来的视向，但平行于原来的一个投影面。顺次作物体的两个副投影，可在原坐标系的一般位置方向上画出物体的视图。用这样的方法可以画出物体的直观图。

在图 1.17 中用这种方法画出菱形屋面，所得的屋面水平投影和正面投影完全没有直观性①。在与水平投影成配置位置的副投影中，可见性由所选定的视线 s_3 的观察方向决定。

快速画直观图的其它方法将在 1.4 节讨论。

1.3.3 作为一种辅助作图法的副投影

引入副投影也是一种重要的辅助作图方法，它是以下面两类作图题为依据的：

① 图 1.17 中直线 s 和点 1 的含义在 1.3.3 中再作解释。