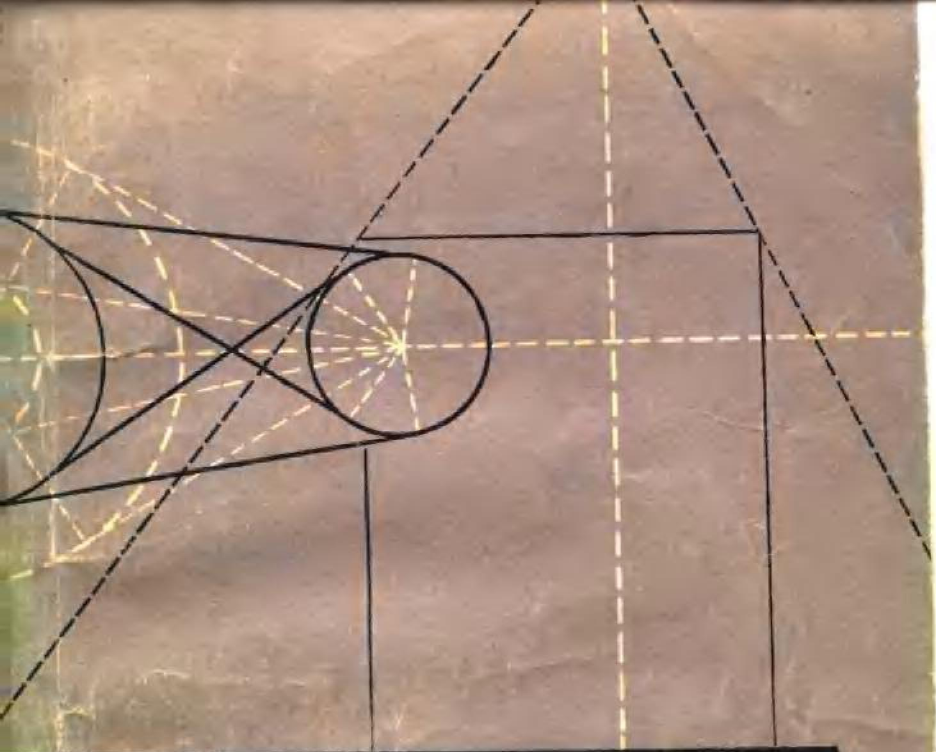

几何的证题与作图

乐嗣康

浙江人民出版社

几何的证题与作图

乐 嗣 康

浙 江 人 民 出 版 社

内 容 提 要

本书通过一些典型实例，向读者介绍关于几何的一些基本证题与作图方法，全书由三个专题二十三篇文章组成。最后部分兼谈改进教学方法、提高几何教学质量问题，对中学数学教师有参考作用。各篇文章之间既保持一定联系，又具有相对的独立性，读者可根据需要选学。

几何的证题与作图

乐嗣康

*

浙江人民出版社出版

（杭州武林路196号）

浙江新华印刷厂印刷

（杭州环城北路天水桥摸）

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张7.625 字数175,000

1980年10月第 一 版

1980年10月第一次印刷

印数：1—31,000

统一书号：7103·1120

定　价：0.62 元

目　录

一、几种重要的证题方法和应用

二、几何作图中的几个基本方法

三、几何教学中应重视的几个问题

一、几种重要的证题方法和应用

学习几何的一种思考方法

在学习、研究几何时，常常既要研究图形的特性，又要进行分析、概括，经过推理，找出它是否还具有一般的性质．同时，当掌握了某些一般定理之后，又要在它的指导下，灵活运用，使理论联系实际．这种从个别到一般；又从一般回到个别，去指导具体的、特殊的学习几何的方法，能够使学习不断深化，不断提高分析问题和解决问题的能力．

譬如在讲到三角形的角平分线定理时，首先应想一想，这个定理是怎样被证明的？其关键是什么？定理的特点是什么？具体地，如图1所示．

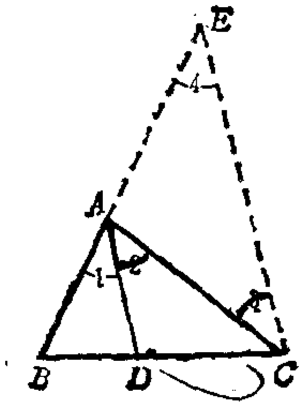

图1

已知　AD为$\triangle ABC$中$\angle A$的平分线，即$\angle 1=\angle 2$．

求证　$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$．

分析　为了要证明$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$即要证四个线段成比例，自然会想到平行线分线段成比例定理．根据图形可过C点作直线$CE\parallel AD$与BA的延长线交于E．这样，便得到$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE}$，

∴只要证$\frac{BA}{AE}=\frac{AB}{AC}$即可.显然,问题在于证明$AC=AE$.这样,把原欲证明的问题转化为证两线段相等的问题了. 由图可知,这只要证$\angle 3=\angle 4$即可. ∵$AD /\!/ EC$,∴$\angle 1=\angle 4$,$\angle 2=\angle 3$.而题设$\angle 1=\angle 2$, ∴$\angle 3=\angle 4$, ∴$AC=AE$, ∴$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.于是定理获证. 很明显,这个定理证明的关键在于将证"线段成比例"转化为证"线段相等". 其方法是过C(或B点)作AD的平行线,应用平行线分线段成比例定理.

现在再来看看定理的特点是什么? 注意到$\triangle ABC$中被其顶角平分线分成两个三角形,即$\triangle ABD$和$\triangle ADC$. 此时,由原定理的条件可见,此两个三角形满足条件$\angle 1=\angle 2$、AD是公共边,还有$\angle ADB+\angle ADC=180°$. 假定去掉这个"$AD$是公共边"的因素,保持$\angle 1=\angle 2$, $\angle ADB+\angle ADC=180°$的条件,并把原定理改述为如下命题:

若有两个三角形,有一对角相等,一对角相补,则其等角所对边之比与其补角所对边之比相等. 不难发现,此是一个真命题. 事实上,如下图所示.

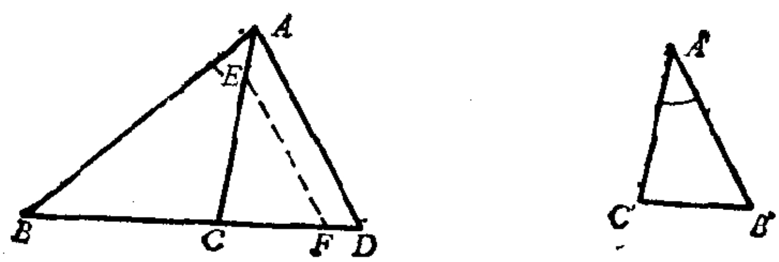

图2

设 在$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$中,$\angle A=\angle A'$, $\angle C+\angle C'=180°$,

求证 $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

证 在 AC 上取 $CE=A'C'$. 过 E 作 $\angle CEF=\angle A'$ $(=\angle A)$，与 BC 的延长线交于 F. 过 A 作 $AD/\!/EF$ 与 BC 的延长线交于 D（如图 2）.

$\because$ $\angle BCA+\angle ECF=180°$,

而 $\angle BCA+\angle C'=180°$,

$\therefore$ $\angle ECF=\angle C'$.

又 $\because$ $\angle CEF=\angle A'$, $CE=A'C'$.

$\therefore$ $\triangle A'B'C'\cong\triangle EFC$, $(a、s、a)$

$\therefore$ $CF=C'B'$, $EF=A'B'$.

又 $\because$ $AD/\!/EF$, $\therefore$ $\angle CEF=\angle CAD$.

但 $\angle CEF=\angle A'$, $\angle A'=\angle A$,

$\therefore$ $\angle BAC=\angle CAD$.

这就是说, AC 是 $\triangle ABD$ 的 $\angle BAD$ 的平分线

$\therefore$由三角形角平分线定理知

$$\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{AD}, \text{ 即 } \frac{BC}{AB}=\frac{CD}{AD}.$$

又 $\because$ $EF/\!/AD$, $\therefore$ $\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{CF}{EF}$,

而 $CF=C'B'$, $EF=A'B'$.

$$\therefore \frac{BC}{AB}=\frac{CD}{AD}=\frac{C'B'}{A'B'}, \text{ 即 } \frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

注意：若应用正弦定理来证则可更简：

$$\because \frac{BC}{AB}=\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ACB}, \quad \frac{B'C'}{A'B'}=\frac{\sin\angle B'A'C'}{\sin\angle A'C'B'}.$$

但 $\angle BAC=\angle B'A'C'$, $\angle ACB=180°-\angle A'C'B'$.

$$\therefore \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}. \qquad \text{即} \frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}$$

由此可见，在三角形角平分线定理中，决定其结论的因素是$\angle 1=\angle 2$，和BDC是一条直线，即$\angle ADB+\angle ADC=180°$. 而公共边$AD$显然不起决定作用. 通过上述剖析，认识到三角形内角平分线定理的本质与特点，从而把这个定理进一步推广，也就是说，我们已经从特殊中飞跃到一般，得到了一个新的**定理**(*). 即

在两个三角形中有一对角相等，一对角相补，则其等角所对边之比与其补角所对边之比相等.

接着，我们再看看这个新定理(*)能否包括各种特殊的情形，先来看三角形的**外角定理**

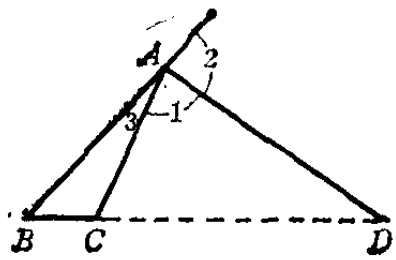

图 3

设 AD为$\triangle ABC$的$\angle A$的外角平分线，即$\angle 1=\angle 2$(图 3)，

求证 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

证 在$\triangle ABD$及$\triangle ACD$中，

$\angle D=\angle D$,

又∵ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$,

但 $\angle 1=\angle 2$, ∴ $\angle 1+(\angle 1+\angle 3)=180°$,

即 $\angle CAD+\angle BAD=180°$.

∴由定理(*)知

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

其次来看直角三角形中**比例中项定理**

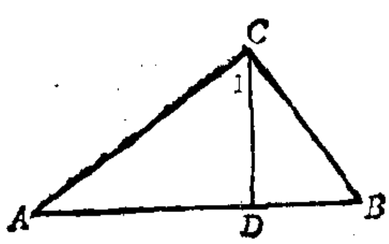

图 4

设 $Rt\triangle ABC$中$\angle C=90°$, $CD\perp AB$.

求证 $AC^2=AD\cdot AB$;

$$BC^2=BD\cdot AB.$$

证 如图 4，在 $Rt\triangle ABC$ 及 $\triangle ACD$ 中

$\because$ $\angle 1=\angle B$,

$\angle ADC+\angle ACB=90°+90°=180°$.

$\therefore$ 由定理（*）知

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},\ \text{即}\quad AC^2=AD\cdot AB,$$

同理可证 $BC^2=BD\cdot AB$.

由此可知，定理（*）不但包括三角形的外角平分线定理而且也包括了直角三角形中的比例中项定理.

下面再举两例来说明定理（*）的应用.

例 1 **设** $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$，E 为 AB 上的一点，延长 AC 至 D，使 $CD=BE$，连结 ED 与 BC 交于 P 点如图 5，

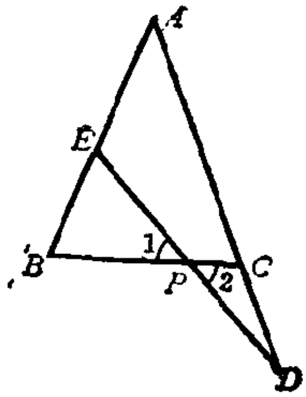

图 5

求证 $EP=DP$.

证 在 $\triangle BPE$ 及 $\triangle CPD$ 中，

$\because$ $\angle 1=\angle 2$， 又 $\because$ $AB=AC$，

$\therefore$ $\angle B=\angle ACB$

$=180°-\angle PCD$,

即 $\angle B+\angle PCD=180°$.

$\therefore$ 由定理（*）即可得

$$\frac{BE}{CD}=\frac{EP}{DP}.$$

因题设 $CD=BE$，$\therefore$ $EP=DP$.

例 2 如图6. 设 $\angle\alpha=\angle\beta$，$AF=DF$，$BE=CE$，

求证 $AB=CD$.

分析 欲证 $AB=CD$，则可证 $SA=KD$，$SB=KC$. 将

二式相减，即得.

欲证 $SA=KD$,

则考虑包含 SA、KD 的两个三角形：

$\triangle SAF$ 和 $\triangle KFD$.

显然，在这两个三角形中，$\angle\alpha=\angle\beta$.

$$\angle AFS+\angle KFD=180^\circ.$$

∴由定理（*）知

$$\frac{SA}{KD}=\frac{AF}{FD}.$$

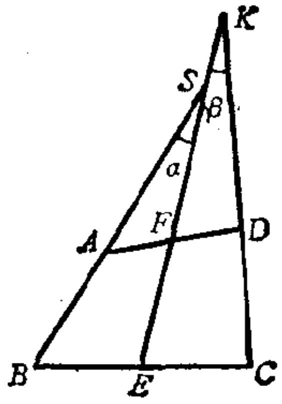

图 6

今题设 $AF=FD$, ∴ $SA=KD$.

同样可在 $\triangle SBE$ 和 $\triangle KEC$ 中得到

∵ $\angle\alpha=\angle\beta$, $\angle BES+\angle KEC=180^\circ$,

∴ $\dfrac{SB}{KC}=\dfrac{BE}{CE}$.

而题设 $BE=CE$, ∴ $SB=KC$;

∴ $SB-SA=KC-KD$, 即 $AB=CD$. 命题获证.

本例证明方法不少，但一般说来上面的证明较为简捷一些.

上述情况说明，如何根据具有一般性质的几何问题，来解决有关的特殊性质的几何问题. 现在再作进一步的探讨，看看定理（*）的逆命题是否正确.

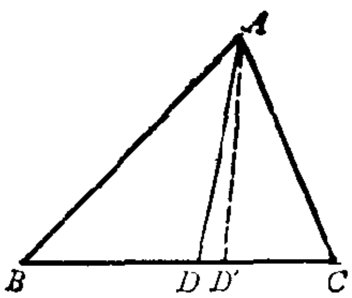

图 7

不妨先来看一下三角形内角平分线定理的逆定理是否存在?

设 $\triangle ABC$中，D为 BC 内一点，且使

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\text{（图 7）},$$

求证 $\angle BAD=\angle DAC$.

证 作 $\angle A$ 之平分线 AD' 与 BC 交于 D'，则由三角形内角平分线定理知

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB}{AC}.$$

$$\therefore \quad \frac{BD'+D'C}{D'C}=\frac{AB+AC}{AC},$$

即
$$\frac{BC}{D'C}=\frac{AB+AC}{AC};$$

由题设
$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \quad \frac{BD+DC}{DC}=\frac{AB+AC}{AC},$$

即
$$\frac{BC}{DC}=\frac{AB+AC}{AC}.$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{D'C}=\frac{BC}{DC},$$

$$\therefore \quad D'C=DC.$$

因 D'、D 均在 BC 之内部.

$$\therefore \quad D'\equiv D, \quad \therefore \quad AD'\equiv AD.$$

由作图知 AD' 为 $\angle A$ 的平分线，$\therefore$ AD 为 $\angle A$ 之平分线，$\therefore$ $\angle BAD=\angle DAC$.

这就是说，三角形内角平分线定理的逆定理是存在的.

下面来看定理（ * ）的逆命题即逆定理（ * * ）

有两个 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$，若 $\angle C+\angle C'=180°$

且
$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'},$$

则
$$\angle A=\angle A'.$$

证 如图8．在 AC 上取 $CE=A'C'$，延长 BC 至 F，使

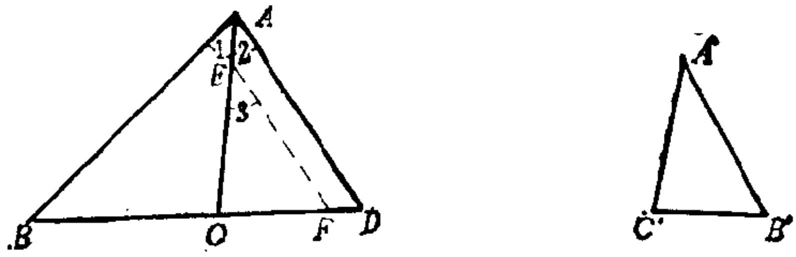

图 8

$CF=C'B'$. 连 EF，过 A 作 $AD /\!/ EF$ 与 BC 的延长线交于 D.

则 $\triangle CEF \backsim \triangle CAD$,

$$\therefore \quad \frac{CD}{CF}=\frac{AD}{EF}. \qquad (1)$$

$$\because \quad \angle ACB+\angle C'=180^{\circ},$$

$$\angle ACB+\angle ECF=180^{\circ},$$

$$\therefore \quad \angle C'=\angle ECF.$$

又 $\because \quad CF=C'B',\ CE=A'C',$

$$\therefore \quad \triangle ECF \cong \triangle A'C'B',\ (s.a.s.)$$

$$\therefore \quad EF=A'B'.$$

代入(1)式得 $\dfrac{CD}{C'B'}=\dfrac{AD}{A'B'}$,

即 $\dfrac{A'B'}{C'B'}=\dfrac{AD}{CD}$.

由题设 $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}$,

即 $\dfrac{A'B'}{B'C'}=\dfrac{AB}{BC}$.

$$\therefore \quad \frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC},$$

即 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{CD}$.

$\therefore$ 由三角形内角平分线定理的逆定理知 $\angle 1=\angle 2$.
但 $EF\parallel AD$,

$\therefore\quad \angle 2=\angle 3$, 而 $\angle 3=\angle A'$,

$\therefore\quad \angle 1=\angle A'$,

即 $\quad \angle BAC=\angle A'$.

由此可知，定理(*)的一个逆定理(**)也是存在的．有了这两个互逆的定理后，将可更加广泛地应用到解决具体问题中去．例如，若将前面的例 2 改成为下面的命题，运用上面的正逆定理就很容易给以证明：

设 A、F、D 在一直线上，且 $AF=DF$，又 B、E、C 在一直线上，且 $BE=CE$，$SB=KC$（图 6），

求证 $AB=CD$.

证 在 $\triangle SBE$ 及 $\triangle KCE$ 中，

$\because\quad \angle BES+\angle KEC=180°$,

又 $\because\quad BE=CE$，$SB=KC$,

$$\therefore\quad \frac{BE}{CE}=\frac{SB}{KC}.$$

由逆定理(**)知 $\angle\alpha=\angle\beta$；

又在 $\triangle SAF$ 及 $\triangle KDF$ 中，

$\because\quad \angle\alpha=\angle\beta$，$\angle AFS+\angle KFD=180°$.

由定理(*)知 $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{SA}{KD}$,

但 $AF=DF$，$\therefore\quad SA=KD$,

但 $SB=KC\quad \therefore\quad SB-SA=KC-KD$,

即得 $\quad AB=CD$.（证毕）

以上虽然只是举了一个从三角形内角平分线定理引出的例

子，但从中却可看出，若能运用这种从特殊到一般，从具体到抽象；又能从一般回到特殊，从理论走向实践的学习方法，广泛地运用到学习几何的其他方面去，将会使我们的学习不断深化，从而不断提高我们的数学水平.

【注】若将例2中的已知条件稍加改变为

$$\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n},\ \frac{AF}{FD}=\frac{BE}{EC}=\frac{m}{n},$$

试问其$\angle\alpha$与$\angle\beta$的相等关系能否保持？读者可以自行证明.

分析是证题和解题的先导

当我们遇到一个几何命题需要证明或求解时，应该怎样着手呢？这是学习几何时先要解决的问题. 一般说来，在看懂命题的条件和结论(同时画出一个草图)后，总是先进行分析，通过分析获得证题或解题的方法. 所以说，分析是证题和解题的先导. 所谓分析，就是先从命题的结论着手，看看使结论成立的条件是什么，再看看证明了哪些才能导致结论的成立. 当然，在许多命题中不是经过这么一步就能推得的. 这样逐步追查其成立的原因，直至达到已知的条件为止，这种由结论逆求至已知条件，并且使它步步可逆的思维方法就是分析的方法.

在分析一个命题时，要抓住已知条件与结论中的内在联系，通过对图形施行的各种变换，运用图形的性质和规律，把表面上关系不清楚的已知条件与结论联系起来，化繁为简，化难为易，就这样获得了证题或解题的方法. 下面举一些例子来说明.

例 1　自圆心O到圆外一直线MN作垂线OA，A为垂足. 过A作圆的割线ABC及ADE，若CD及EB的延长线

分别交 MN 于 P、Q（图1），求证 $PA=AQ$.

分析 本题已知 $OA\perp MN$，所以我们可以考虑用轴对称（反射变换）的方法来研究. 以 AO 为轴取 C 的对称点 C'，连结 $C'A$、$C'Q$、$C'E$，如图1，

则 $CA=C'A$，

$\angle CAO=\angle C'AO$. OA=OA

又 $\because\ \angle OAP=\angle OAQ=90^\circ$，

$\therefore\ \angle CAP=\angle C'AQ$.

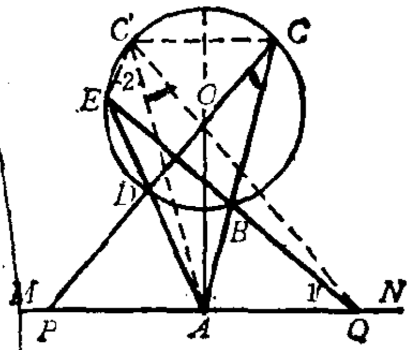

图1

若 $PA=AQ$ 已经证得，则

$\triangle CPA\cong\triangle C'QA$.

$\therefore$ 只要证 $\angle ACP=\angle AC'Q$.

但 $\angle ACP=\angle AEQ$，

$\therefore$ 只要证 $\angle AEQ=\angle AC'Q$.

$\therefore$ 只要证 A、Q、C'、E 四点共圆即可. 显然，这只要证 $\angle 1=\angle 2$ 即可.

于是不难得到下述证法：

证 $\because$ C' 点以 OA 为轴对称于 C 点，

$\therefore$ 连结 CC' 则可得 $CC'\parallel MN$.

$\therefore\ \angle CAQ=\angle C'CA=\angle CC'A$.

但 $\angle CBQ=\angle EC'C=\angle 2+\angle AC'C$，

又 $\angle CBQ=\angle CAQ+\angle 1$，

$\therefore\ \angle 2+\angle AC'C=\angle CAQ+\angle 1$，

故 $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ A、Q、C'、E 四点共圆.

于是 $\angle AEQ=\angle AC'Q$.

但 $\angle AEQ=\angle ACP$，

$\therefore\quad \angle AC'Q=\angle ACP$,

$\therefore\quad \triangle ACP\cong\triangle AC'Q$,

$\therefore\quad PA=AQ$. 于是本题得证.

又若题设中直线 MN 与 O 圆相割，也可以获得同样的结果. 其证明如下:

证　如图 2 连结 CC' (C' 为以 OA 为轴 C 的对称点), $C'Q$、AC', $C'E$.

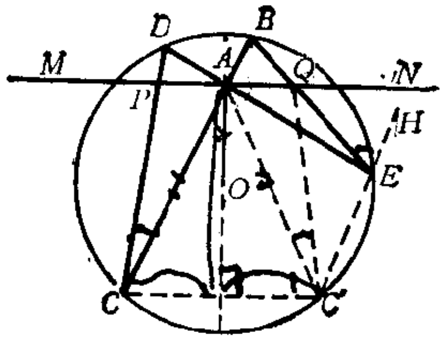

图 2

则　$\angle BEH=\angle ACC'$

$=\angle PAC$

$=\angle QAC'$,

即　$\angle BEH=\angle QAC'$.

$\therefore\quad A$、C'、E、Q 共圆,

$\therefore\quad \angle AEB=\angle AC'Q$.

但　$\angle AEB=\angle PCA$,

$\therefore\quad \angle PCA=\angle AC'Q$.

又　$\because\quad AC=AC'$, $\angle CAP=\angle C'AQ$,

$\therefore\quad \triangle PAC\cong\triangle QAC'$.

$\therefore\quad PA=AQ$.

例 2　已知四边形 $ABCD$ 中, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, 且 AB 与 CD 的夹角为 θ, 试求作这个四边形.

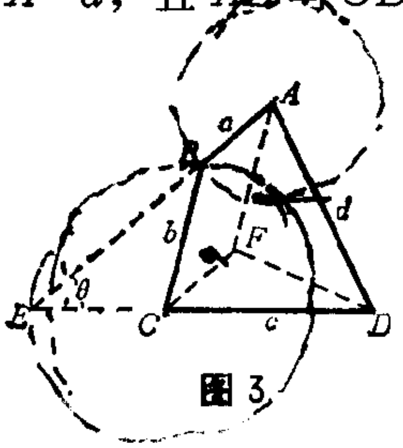

图 3

分析　作草图如图 3. 从图中看到，已知的四条边与 $\angle\theta$，它们之间的关系不明显，为此，我们考虑作图形的变换. 不妨采用平行移动的方法，将四边形转化为两个三角形，使所构成的这两个三角形能作

出来，这样就使所求图形易于作出.

过C作$CF \parallel AB$，过A作$AF \parallel BC$，CF与AF相交于F点，连结FD. 显然，$AFCB$为平行四边形，

$$\therefore \quad AF=BC=b, \ AB=CF=a.$$

又 $$\angle FCD=\angle BEC=\theta.$$

于是对$\triangle FCD$来说，已知两边及一夹角，则此三角形可以作出，因此FD的位置、大小都可由此而定下来.

再来看$\triangle AFD$，因为$AF=b$，$AD=d$，而FD已经可以作得，所以，由于$\triangle AFD$三边已知，故可作得. 至此，C、D、A三点都可作出，接着只要作出B点就可以了. 明显地，

过A作$AB \parallel FC$，过C作$CB \parallel AF$，AB与CB交于B，则B点即可作出，所以四边形$ABCD$可以作出. （具体的作图、证明、讨论均略.）

上面例题的证题、解题的思路都是由分析而得. 在分析中，都遇到已知因素间的关系不明显的情况，由于题目的不同，这里用了不同的变换，如例1采取反射变换（轴对称），而例2则采取平移变换. 但变换的目的是一致的，都是把分散的已知因素集中起来，把表面上毫不相关的因素显现出它们之间内在的联系，化难为易. 应当指出，所采取的图形变换也是通过各种不同的分析的自然结果，这种例子是很多的.

除了上述的分析方法外，对于那些与三角形基本线段（如三边、三中线、三个角平分线、三条高、内切圆半径、外接圆半径等等）有关的命题，还常常可以应用代数运算这个工具，进行代数分析，从而达到证题或解题的目的. 例如，

例3 若一个三角形有两个角的平分线相等，则这个三角形必为等腰三角形（图4）.

设 $\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，