叶家东
范倍芬 编著

人工影响天气的统计数学方法

科学出版社

人工影响天气的统计数学方法

叶家东　范蓓芬 编著

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书叙述近三十年来人工影响天气试验的统计设计和统计检验方法，着重介绍我国的进展情况。全书共分四章，前三章较系统地阐释了线性代数、统计检验和回归分析方法，第四章结合作者的研究工作，总结了国内外人工影响天气的试验设计和效果检验方法。

本书可供人工影响天气的科技人员和天气、气候方面的有关人员参考，也可供大专院校气象和大气物理专业师生阅读。

人工影响天气的统计数学方法

叶 家 东
范 蓓 芬 编著

责任编辑 侯建勤 许贻刚

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街 137 号

中国[illegible]厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 10 月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1982 年 10 月第一次印刷 印张：12 3/8
印数：0001—2,330 字数：281,000

统一书号：13031·2002
本社书号：2730·13—15

定价： 1.90 元

前　　言

二十多年来，我国人工影响天气试验的规模日趋扩大，其中人工降水和防雹，不少地区曾经或正在作为群众性的抗灾斗争的一种重要措施加以推广。社会生产的发展迫切要求提高人工影响天气的科学水平和试验效果。从根本上讲，只有当人们透彻地认识成云致雨的物理过程，并且能够人为地改变自然过程中某些关键环节的时候，人工影响天气才能真正成为“控制天气”的科学实验。问题在于客观实际的需要常常不能等待科学家把一切都研究清楚了再从事人工影响天气的实践。事物往往是相互牵制而又相互促进的，云和降水物理过程的研究是人工影响天气的科学基础，而人工影响天气的实践又是云物理学发展的动力，在我国尤其如此。因此，如何在现有的科学基础上，科学地组织和客观地评价人工影响天气试验，是一个不能回避的，在实践中且是很重要的问题。由于目前人们对云雨自然过程的认识以及干预自然过程的能力都相当有限，风云变幻又是无奇不有、错综复杂，致使人工影响天气试验的对象和结果都存在着一定的不确定性。因此，在组织人工影响天气的外场试验以及评价试验的效果中，普遍采用统计设计和统计分析的方法，它与试验的物理设计和物理分析是相辅相成、互为补充的。

本书是将近三十年来国内外人工影响天气试验中的统计设计和统计分析的方法作一力所能及的概括，以期对国内人工影响天气试验的进一步开展有所裨益。为了使读者掌握有关的统计分析方法，本书较系统地介绍了线性代数和统计检

验中有关的基本概念和方法；回归分析是效果检验的一种重要方法，所以专列一章加以讨论。所举的例子基本上都是国内外人工影响天气试验中实际采用的，目的是给初学者一些具体的实例，便于加深理解。

我国研究人工影响天气的效果统计检验工作首先是徐尔灏教授做的，谨以此书表示纪念。

由于我们水平和经验有限，错误与不当之处在所难免，请读者批评指正。

目　录

第一章 线性代数

线性代数在气象中作为一种基本数学工具，在概率统计预报，流体力学及数值预报诸方面应用十分广泛。在人工影响天气试验中，线性代数方法主要应用于试验效果的统计回归分析，它在挑选检验因子，建立检验方程中是不可缺少的基本工具。本章将扼要地介绍有关的线性代数基本概念和方法。

第一节 矩　　阵

一、矩阵的概念

气象上许多问题都可以化为求解线性方程组。

设 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

把方程组中的系数表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

方程组 (1.1) 及其解的性质完全取决于上述两个数表中的元素，所以研究这种有次序的数表的性质，对于求解线性方程组

是很有意义的，由此引进矩阵这一数学工具。

1. 矩阵的定义

定义 1　按m行n列次序排列成长方形的数表称为m行n列矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

简记为A_{mn}或(a_{ij})。这个矩阵中的每个数a_{ij}称为元素或简称为元，下标i和j分别指该元素在矩阵中的行数和列数。

如果把方程组(1.1)中常数列增添在A右边而组成一个m行$(n+1)$列的矩阵B

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

矩阵A和B分别称为(1.1)方程组的系数矩阵和增广矩阵。

仅有一行的矩阵(即$m=1$)称为行矩阵(或行向量)如

$$A=(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) \tag{1.4}$$

仅有一列的矩阵(即$n=1$)称为列矩阵(或列向量)，如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

通常我们把这种一行或一列的矩阵A(即向量)记作$\boldsymbol{a}$.

行数和列数相等$(m=n)$的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵，如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

对于方阵 $A=(a_{ij})$，由 $i=j$ 的全部元素 a_{ij} 组成的对角线称为主对角线（总是自左上角至右下角），主对角线上全部元素和称为 A 的迹，记为 Str$A$。

2. 特殊矩阵

对角矩阵　方阵中除主对角线上的元素外，其余元素都是零，则称为对角矩阵或对角方阵

$$D=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

对角矩阵常简记为

$$D=\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \tag{1.8}$$

纯量矩阵　对角矩阵中，若 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\alpha$，则称为纯量矩阵

$$[\alpha]=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

单位矩阵　对角矩阵中，若 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=1$，则称为单位矩阵或么矩阵，记作 I（或 E），即：

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

单位矩阵在矩阵代数中所起的作用类似于数 1 在普通代数中所起的作用。

零矩阵　　全部元素都是零的矩阵称为零矩阵，记为 0，即：

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

零矩阵在矩阵代数中所起的作用类似于数 0 在普通代数中所起的作用。

转置矩阵　　矩阵 A 的行和列互换，得到的矩阵称为 A 的转置矩阵，记为 A'（或 A^T）。用符号表示，若 $A=(a_{ij})$，则 $A'=(a_{ji})$。

对称矩阵　　如果 $A'=A$，则称 A 为对称矩阵。显然，对称矩阵必定是方阵，而且其元素以主对角线为对称轴，即 $a_{ij}=a_{ji}$。例如回归分析中的相关矩阵 R 就是对称矩阵。

三角矩阵　　当方阵 A 的主对角线以上或以下的所有元素均为 0，即：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称之为三角矩阵，前者称为下三角矩阵，后者称为上三角矩阵。

注意：矩阵不是一个具体的数，而是 $m\times n$ 个数按一定次序排列而成的矩形阵表。

二、矩阵的运算

矩阵虽然不是一个具体的数，但仍能进行加法、减法、乘法等代数运算。

1. 矩阵的运算

矩阵的相等　两个行数和列数都相同的矩阵$A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$，当且仅当所有的 $a_{ij}=b_{ij}$ 时是相等的，记为

$$A=B$$

矩阵的加、减法　若 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 的行数和列数都相同，则定义A与B的和为

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

同理，可定义A与B的差为

$$D=A-B=(a_{ij}-b_{ij}) \quad (1.13)$$

即矩阵的加（或减）法，就是矩阵对应元素相加（或减）.

例 1　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

数与矩阵的乘法　设 $A=(a_{ij})$，k 为任意数，则定义数 k 与矩阵A的乘积为

$$C=kA=(ka_{ij}) \quad (1.14)$$

即数 k 乘矩阵 A 就是矩阵 A 的每个元素都乘上 k。

例 2　设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

则

$$2A=\begin{pmatrix}2\times 1 & 2\times 2 & 2\times 3\\ 2\times 0 & 2\times 1 & 2\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & 10\end{pmatrix}$$

矩阵的乘法　设变元 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 与变元 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 间有线性关系

$$z_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \quad i=1, 2, \cdots, m \tag{1.15}$$

再设变元 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 可由 s 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 线性地表示，即：

$$y_j=\sum_{k=1}^{s} b_{jk}x_k \quad j=1, 2, \cdots, m \tag{1.16}$$

要直接表示 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 与 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 的线性关系，将 (1.16) 代入 (1.15)，可得

$$z_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k=1}^{s} b_{jk}x_k=\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)x_k$$
$$i=1, 2, \cdots, m \tag{1.17}$$

令此线性变换为

$$z_i=\sum_{k=1}^{s} c_{ik}x_k \quad i=1, 2, \cdots, m \tag{1.18}$$

比较 (1.17) 和 (1.18) 右端的系数可得

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \quad i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,s \tag{1.19}$$

方程组(1.18)的系数矩阵 C 称为矩阵 A 与 B 的积，记作

$$C = AB \tag{1.20}$$

由此引出矩阵的乘法法则:

设 $A=(a_{ij})$ 是 m 行 n 列矩阵，$B=(b_{jk})$ 是 n 行 s 列矩阵，则定义 A 和 B 的积 AB 是矩阵 $C=(c_{ik})$，其中

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \tag{1.20$'$}$$

即 C 中 i 行 k 列上的元素 c_{ik} 等于矩阵 A 的第 i 行元素与矩阵 B 的 k 列中对应元素乘积的和。这称行乘列法则。

注意:(1) 两矩阵 A,B 相乘时，只有 A 的列数与 B 的行数相同时才有定义，这样的矩阵称为可相乘的;

(2) 两矩阵 A,B 相乘时，一般来说，不满足交换律，即:

$$AB \neq BA$$

例 3　求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{和 } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

的积。

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

BA 不成立。

例 4　设

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 1\\2 & 4\end{pmatrix} \text{和} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 13\\1 & 3 & -1\\8 & 14 & 4\end{pmatrix}$$

而

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 15\\1 & -2\end{pmatrix}$$

显然

$$AB \neq BA$$

所以,两矩阵的乘积一般不可互换位置。

但是,也有例外。例如,纯量矩阵 $[\alpha]$ 可与任一同阶方阵互换:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nn}\end{pmatrix}=\alpha A$$

同理,对于单位矩阵 I, 也有

$$IA=AI=A \text{ 及 } I^n=I \tag{1.21}$$

(3) 两个矩阵 A 与 B 的乘积等于0,不能推出 $A=0$ 或 $B=0$。

矩阵的分块乘法[1]　设 A, B 为任意两个可相乘的矩阵,今把 A 任意分成四小块如下:

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

然后参照 A 的列的分法来分 B 的行，要求 A,B 中的对应子矩阵是可相乘的，至于 B 的列可以随意分，设分为

$$B=\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

所谓矩阵的分块乘法就是把 A,B 都看成二阶矩阵相乘，即：

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

不难验证这种“形式”相乘与实际相乘是一样的，即把 (1.22) 式右边看成一个大矩阵时正好就是 AB。

例5　设

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{c|cc} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

现把 A,B 分成四小块，其子矩阵分别为：

$$A_1=(1\ \ 0),\ A_2=(3\ \ -1),\ A_3=(2\ \ 1),\ A_4=(0\ \ 2)$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},B_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},B_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}=AB$$

矩阵的分块乘法可以把矩阵的乘法降阶，特别当某些子矩阵是零矩阵时，这样计算比较方便。

2. 矩阵运算的性质