

画法几何

西南交通大学 朱育万 主编
兰州铁道学院 周棣萼

高等学校试用教材

中国铁道出版社

高等学校试用教材

画法几何

西南交通大学 朱育万
兰州铁道学院 周棣萼 主编

中国铁道出版社

1980年·北京

高等学校试用教材

画 法 几 何

西南交通大学 朱育万 主编
兰州铁道学院 周棣萼

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092 1/16 印张: 9.25 字数: 224 千
1980年9月第1版 1980年9月第1次印刷
印数: 0001—24,500册 定价: 1.00元

内 容 简 介

本书叙述画法几何的基本原理和基本方法。全书十二章：第一章绪论，第二~九章正投影，第十章轴测投影，第十一章透视投影，第十二章标高投影。本书按几何体系——点、线、面、体——由浅入深编写，说理清楚，文字通顺，作图清晰。

本书是高等学校土木建筑各专业的试用教材，其他读者亦可用以自学。

前 言

画法几何是研究空间形体的图示法和空间几何问题的图解法的科学。它在教学内容、教学方法和具体要求上均与工程制图有差别。前者,着重讲授基本理论和基本方法,从而培养和锻炼学生的空间想象力;后者,主要讲授绘图和读图的方法,使学生按一定的规格,通过一系列的作业,获得有关的知识和技能。目前有的学校已按画法几何及工程制图分别设课。为适应这种需要,我们分别编写了《画法几何》及《工程制图》。未分别设课的学校,可将二书的内容穿插安排进行教学。

但是,画法几何毕竟与工程制图有密切的联系,它为绘制和阅读工程图样提供必要的理论基础。本书在内容的选择上,也充分注意了这一点。例如,在叙述基本理论和方法的基础上,着重阐述有关非迹线表示的平面及有关特殊位置立体的问题,并选编了土木建筑类专业常遇到的曲面及透视投影、标高投影等。

本书阐明本学科的基本内容和内在规律,内容按由浅入深,由简及繁,循序渐进的原则进行编排。为了便于自学,文字力求通顺,说理力求明白,图表力求清晰。对重要的基本作图题,采用了分步图的形式,对基本概念的阐述和较复杂的投影图,则绘有直观图。

本书适用于工科院校土木建筑类各专业。对于某些专业,根据专业要求和学时安排,可考虑删节立体表面的展开及透视投影等部分。

与本书同时编写出版的,除《工程制图》外,还有《画法几何及工程制图习题集》。

本书在编写过程中,经北方交通大学、长沙铁道学院、上海铁道学院等院校的有关教师审阅。

本书由西南交通大学朱育万、李睿谟,兰州铁道学院周棣萼、洪经邦、张光荣等编写,由朱育万、周棣萼担任主编。

欢迎读者对本书的缺点和错误批评指正。

编 者

目 录

第一章 绪论	1
§ 1—1 学习画法几何的目的和方法	1
§ 1—2 投影概念	1
§ 1—3 工程上常用的几种投影图	3
第二章 点	6
§ 2—1 点的二投影	6
§ 2—2 点在二投影面体系中的各种位置	7
§ 2—3 三投影面体系及点的三投影	9
§ 2—4 重影点及其可见性	13
第三章 直线	15
§ 3—1 直线的投影	15
§ 3—2 直线的倾角和线段的实长	17
§ 3—3 与投影面平行及垂直的直线	19
§ 3—4 两直线的相对位置	22
§ 3—5 直角的投影	25
第四章 平面	27
§ 4—1 平面的表示法	27
§ 4—2 各种位置的平面	28
§ 4—3 平面内的直线和点	33
第五章 直线与平面、平面与平面间的相对位置	39
§ 5—1 平行位置	39
§ 5—2 相交位置	41
§ 5—3 垂直位置	46
§ 5—4 点、直线、平面的综合例题	49
第六章 投影变换	53
§ 6—1 概述	53
§ 6—2 变换投影面法	53
§ 6—3 旋转法	62
第七章 平面体	66
§ 7—1 棱柱和棱锥	66
§ 7—2 平面体表面上的点	68
§ 7—3 平面体的截断	70
§ 7—4 两平面体相交	73
第八章 曲线、曲面和曲面体	77

§ 8—1 曲线	77
§ 8—2 曲面	79
§ 8—3 曲面体及其表面上的点	84
§ 8—4 曲面体的截断	86
§ 8—5 曲面与曲面的相交	92
第九章 立体表面的展开	98
§ 9—1 概述	98
§ 9—2 柱面的展开	98
§ 9—3 锥面的展开	100
第十章 轴测投影	104
§ 10—1 基本概念	104
§ 10—2 正轴测投影	106
§ 10—3 平行于坐标面的圆的正轴测投影	112
§ 10—4 斜轴测投影	116
第十一章 透视投影	119
§ 11—1 基本概念	119
§ 11—2 直线的迹点和灭点	119
§ 11—3 各种位置直线的透视	120
§ 11—4 圆的透视	126
§ 11—5 作建筑透视图的基本方法	127
第十二章 标高投影	131
§ 12—1 点和直线	131
§ 12—2 平面	134
§ 12—3 地面的表示法	136
§ 12—4 交线问题	138

第一章 绪 论

§ 1—1 学习画法几何的目的和方法

一、学习目的

画法几何是工程技术教育的一门基础课程。

学习画法几何的目的：（1）研究在二维的平面（如纸面）上表达三维空间形体的方法，即图示法；（2）研究在平面上解决空间几何问题的方法，即图解法；（3）培养空间想象力。

立体都具有三维，通常是指它的长、宽、高。而图纸上的图形却是二维的。因此要在图纸上用二维的图形准确而清楚地表达三维空间的形体，就需要研究解决一系列的问题。这是画法几何所要阐述的主要内容。它为绘制和阅读工程图样，提供了理论基础。另外，某些空间几何问题，如果它只要求一定的精度，则用图解法解决。因为图解法有时比分析算法更简便。由于画法几何是以二维图形研究三维空间的问题（如几何形状、大小、位置等），因而有助于培养与发展人的空间想象力，有助于从事创造性的工程技术设计工作。

二、学习方法

本教材是按几何体系——点、线、面、体——由浅入深编写的，系统性较严密，没有深奥难懂的理论 and 需要死记硬背的公式。学习的重点是要弄清各几何元素的空间关系，然后熟练运用投影规律，在投影图中解决几何元素本身及其相互间的定位问题和度量问题。学习时应注意下述各点：

1. 专心听课，及时复习

听课要专心，仔细，注意弄清基本概念。听课后要当天复习，加深理解。读书不要泛读而要精读，反复地读。例题可边看边作，注意发现问题。对于投影中的现象和问题，不要放过，要弄清“为什么”，促使自己去联想几何元素的空间关系，从而解决投影问题。只有把三维空间和二维平面的关系真正理解了，作题才能做到心中有数，避免出现“听得懂，看得懂，但不会作题”的情形。初学时，可用铁丝、硬纸板等，做一些简单的示意性模型，帮助理解“从空间到平面”的过程。

2. 准确画图，多作练习

对投影理论和作图方法是否真懂真会，可从是否会正确作题来检验。学习画法几何就要作图，基本上没有计算，因此不论练习、作业，都必须作图准确，就象计算时对数字要求非常准确一样。作图潦草，会给解题带来困难，一旦养成习惯，就很难改正。为了真正掌握课程的内容和熟悉投影法，必须多作练习。

§ 1—2 投 影 概 念

在日常生活中，常见到投影的现象。在图 1—1 a 中，在电灯（以 S 标记）与桌面（ P ）

之间，放一块三角板（ ABC ），在桌面上出现三角板的影子。在图 1—1 b 中，阳光照射电杆（ DF ），在地面上出现电杆的影子（ df ）。这些现象就叫做投影。在画法几何中，把光源（如灯泡 S ）叫做投影中心，光线照射的过程叫做投射，投射的光线（如灯光 SA 、 SB 、 SC 或阳光 Dd 、 Ee 等）叫做投射线，获得投影的平面（如桌面 P 、地面等）叫做投影面。通过投射线将物体（三角板或电杆）投射到投影面上得到的图形，就叫物体的投影。

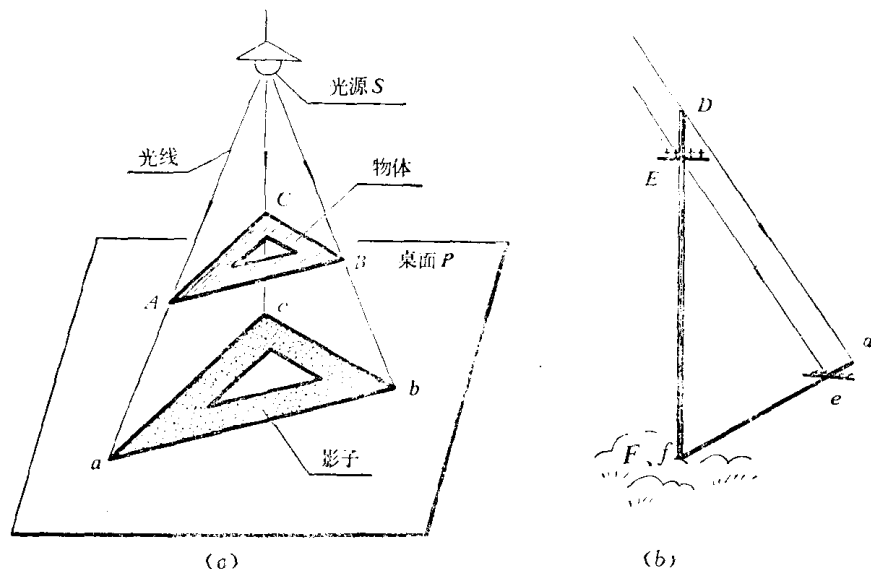


图 1—1 投影现象

投影分为两类：中心投影和平行投影。

一、中心投影

当光源（如电灯泡）距投影面为有限距离时，投射线集中于一点（投影中心 S ），这样得到的投影叫中心投影。图 1—1 a 所示即为中心投影之一例。照片所显示的形象，也属于中心投影的范畴。图 1—2 a 是一幅桥梁的照片。在拍摄这座桥时，照相机的镜头便是投影中心，桥梁上反射出来的光线都经过这个镜头投射到胶卷底片上，底片便是投影面；拍得的照相底片，即是中心投影图。洗出来以后，这座桥就看得很清楚了。在这幅照片中可以看到，一般的互相平行的直线，相交于远处一点，如桥梁的上、下弦似乎要在远处碰着了；同样大小的桥墩，近处的显得大，远处的显得小。这种现象，反映了中心投影的特点。

人的视觉，放映的电影，以及美术画（图 1—2 b ）等，都与照片类同，具有中心投影

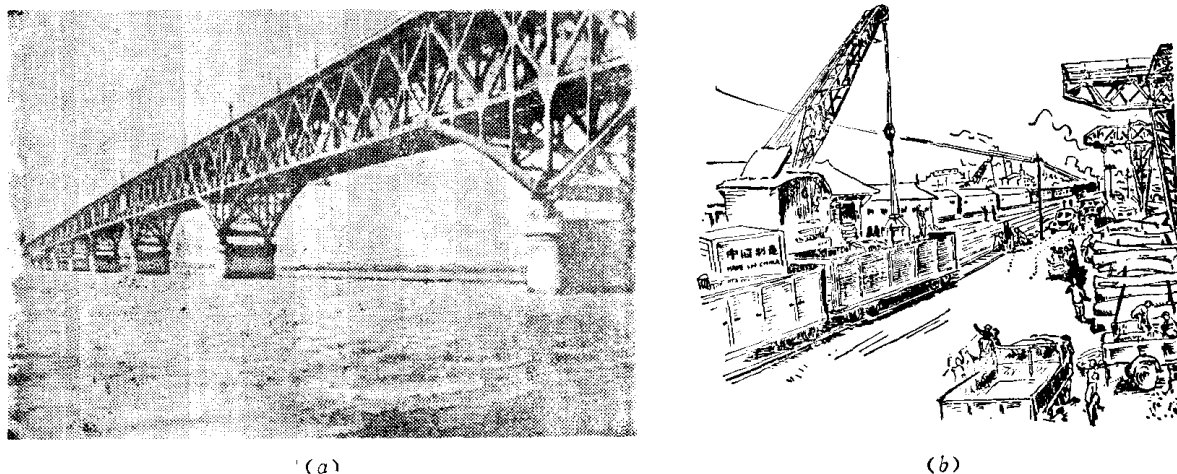


图 1—2 中心投影

的性质。

二、平行投影

当光源与投影面的距离为无穷远时，则投射线互相平行（如太阳光），平行投射得到的投影叫平行投影。平行投影又分为两种：

1. 正投影

互相平行的投射线垂直于投影面时，在该投影面上得到的投影称为正投影（图 1—3 a）。

2. 斜投影

互相平行的投射线与投影面斜交时，在该投影面上得到的投影称为斜投影（图 1—3 b）。

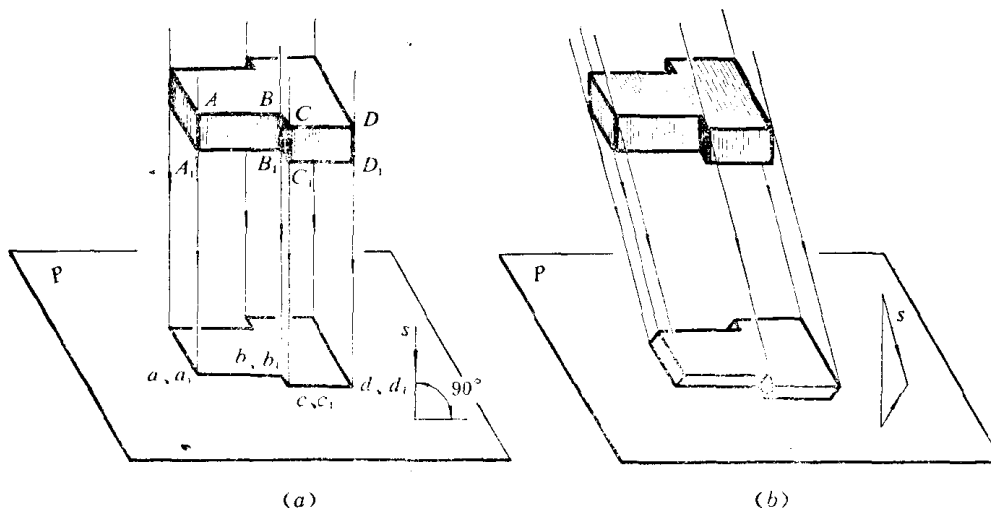


图 1—3 平行投影

在工程制图中，广泛采用正投影法。读者要区别正投影与斜投影，特别是与中心投影的异同。开始学习正投影法时，我们常用“‘观察’（或‘看’）这个物体”这种词句，来引导读者树立投射的观念。实际上人的视觉属于中心投影，但正投影是平行投影，两者投影性质不同，不能混为一谈。

学习投影理论，主要是研究空间形体的形状、大小与图的关系，掌握投影的特性，弄清有哪些可变性与不变性，从而解决怎样正确、完全、清楚地用图表达形体，并根据图想象实物的问题。

§ 1—3 工程上常用的几种投影图

工程上是用图样来表达各种物体的形状的。一般来说，对图样有两个要求：（1）图样的度量性，即根据图样能准确、清晰地判别出原来物体的形状和大小；（2）图样的直观性，即图样富于立体感，便于人们看懂，并有逼真的感觉。但由于所表达的对象不同（如土木建筑、机械零部件、地物地貌等），目的不同（如作为施工依据或只了解概貌），因此采用的图示法也不同。在工程中常用的图示法有四种：正投影法、轴测投影法、透视投影法和标高投影法。相应地有四种投影图。

一、多面正投影图

同一物体的几个正投影，按规则画在一起，就得到物体的多面正投影图。

例如图 1—4 所示为一幢房屋的三面投影图。它是用正投影法，从房屋的正面、顶面、侧面分别在三个互相垂直的投影面上作出正投影，然后按一定的规则展开，画在一张图纸上得到的。正投影法作图比较方便，而且便于度量，所以在工程中应用最广。缺点是直观性不强，缺乏投影知识的人不易看懂。

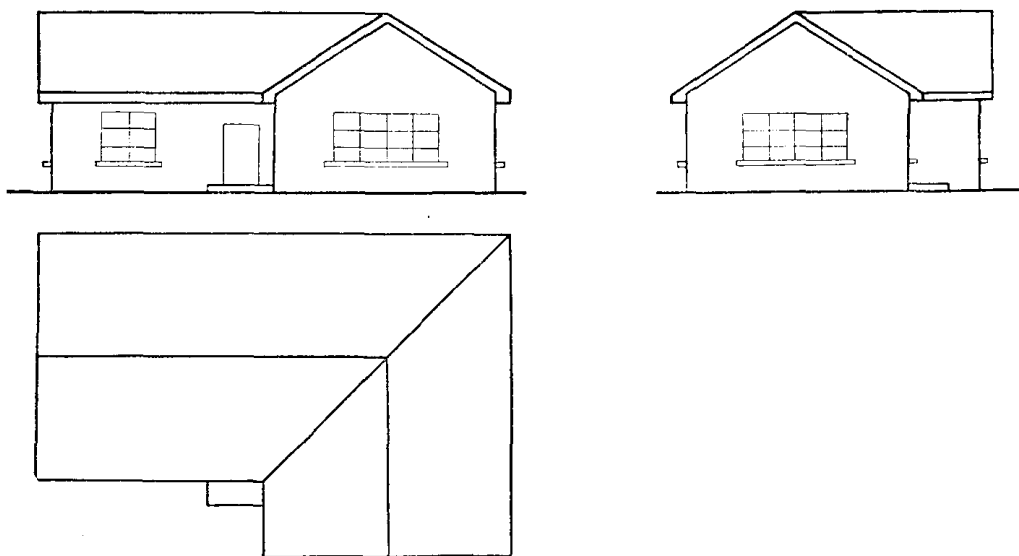


图 1—4 房屋的三面投影图

二、轴测图

轴测图（如图 1—5）是平行投影的一种。画图时只需一个投影面。所得的图形能同时反映空间物体的长、宽、高三维。这种图的优点是直观性强，物体形象表达得较清楚，在一定的条件下也能直接度量。缺点是绘制比较费时，表示物体的形状不完全，表面的形状在轴测图中往往失真（例如矩形成了平行四边形，圆形成了椭圆形），因此不能反映准确的形状，以满足按图加工的要求，一般只用作正投影图的辅助图样。

三、透视图

透视图是用中心投影法作出的图样，需要一个投影面，就象绘画时的画面一样。投射线集中于投影中心（一点），就等于人看物时的一个眼睛。图 1—6 是一建筑物的透视图。这

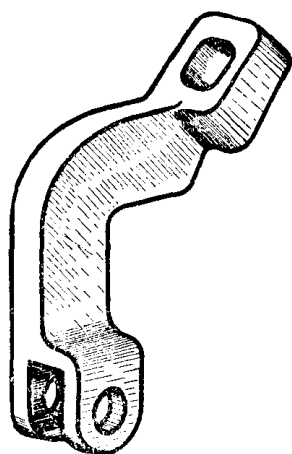


图 1—5 轴测图

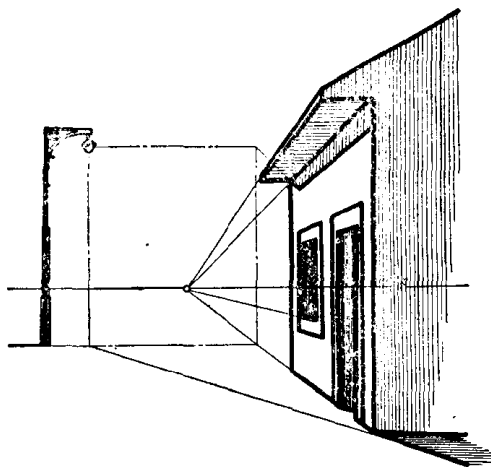


图 1—6 透视图

种图最适宜于画体积较大的物体。图形十分逼真，与一帧好的照片一样。但画起来比较复

杂。平行投影的一些重要特点，在透视图图中均不存在，基本上不能度量，故不能用作施工的依据。

以平面为投影面画出的叫线透视，在建筑中常用到。

四、标高投影图

标高投影是正投影的一种。以一个水平面作为投影面。主要用来表示地形（图1—7）。因为地形比较复杂，土地幅员辽阔，地势起伏不平，但高度差与幅员相比又极小，用前述多面正投影图、轴测图、透视图等均不能满足表示地形的要求。因此采用地面等高线的水平投影（正投影），并在上面标注出高度的图示法来表示地形，这就是标高投影图。公路、铁路选线和设计都需要这样的图。此外，有时也需要画出相应的断面图。地形图在土木建筑工程设计及军事上得到广泛使用。

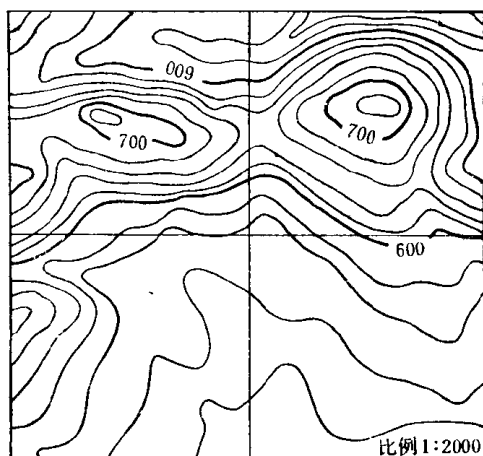


图 1—7 地形图

第二章 点

一般的物体，可看作是由基本形体（柱、锥、球、环等）构成的。这些基本形体，则由形体的表面、棱线和顶点等限定。因此画出物体的图形，实际上就是画出限定形体的点、线、面。现从点、直线、平面入手，介绍正投影（以下简称投影）的作法并研究其基本特性。

§ 2—1 点的二投影

一、点的投影

立体表面上棱线的交点，个别的顶点，在几何学中都作为一个没有大小的点看待。

点的投影还是点。图 2—1 a 中，已知空间一点 A 及投影面 P ，作 A 点的正投影的方法是：

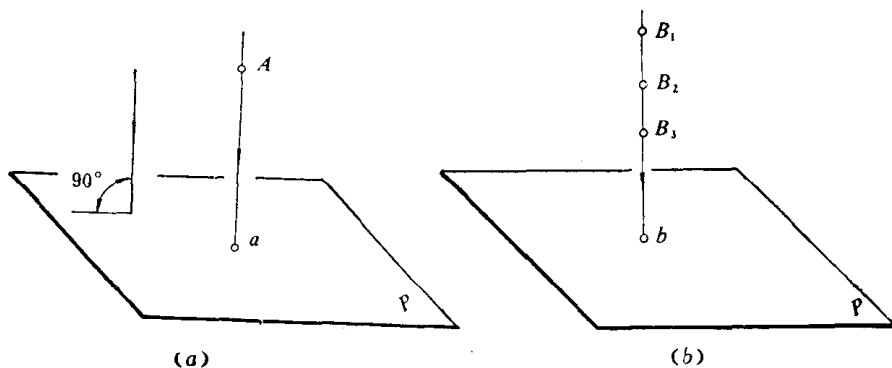


图 2—1 点的投影

(1) 过 A 点作投射线垂直于 P 面；

(2) 垂线与 P 面交于点 a ，此即为空间 A 点的正投影。

A 点在 P 面上的正投影是唯一的，因为经过 A 点的投射线与 P 面相交，只有唯一的一个交点。

但反过来，如果知道了点的一个投影（如图 2—1 b 投影面 P 上的点 b ），却不能确定该点的空间位置，因为自 b 点可作一直线垂直于 P 面，此直线上所有各点（如 B_1 、 B_2 、 B_3 、……）在 P 面上的投影都是 b 。因此要确定一个点的空间位置，只有一个投影是不够的。

二、二面投影

图 2—2 a 中设置了互相垂直的两个投影面（称二投影面体系）。一个处于面对制图者的正立位置，称为正立投影面，简称正面，以字母 V 标记；另一个投影面处于水平位置，称为水平投影面，简称水平面，以字母 H 标记。二投影面 V 和 H 的交线称为投影轴，以 OX 标记。

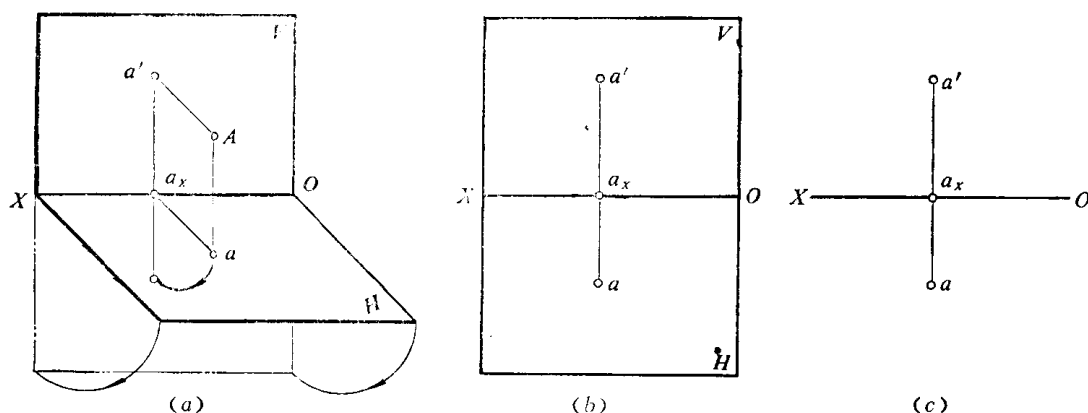


图 2—2 点的二面投影

有了两个投影面，自空间 A 点分别向两个投影面作垂线得垂足，就可得到 A 点的两个投影。 A 点在 V 面上的投影 a' 叫做 A 点的正面投影， A 点在 H 面上的投影 a 叫做 A 点的水平投影。

以上标出的一些符号是教材中规定使用的符号。规定空间点用大写字母（如 A 、 B 、 C 、……）标记，点的水平投影用相应的小写字母（如 a 、 b 、 c 、……）标记，点的正面投影用相应的小写字母并在右上角加一撇标记，（如 a' 、 b' 、 c' 、……）。

在实际作图中，需要把空间关系在一个平面（纸面）上表示出来，所以要展开这两个投影面使它们摊平在一个平面上。为此，使 V 面固定不动，而使 H 面以 OX 为轴向下旋转到与 V 面重合，得到如图 2—2b 的样子。这种两投影面重合后的图样叫做投影图。为了简便起见，投影图中不必画出投影面的边框，如图 2—2c 所示。

从点的两投影可以反过来想象点在投影面体系中的位置。我们设想把 H 面绕 OX 轴回转 90° 使垂直于 V 面，自 a' 和 a 分别作垂线垂直于两投影面，这两条垂线的交点，便是 A 点所在的空间位置。

点的相邻两投影有如下的投影规律：

1. 点的相邻两投影的连线垂直于投影轴。

在图 2—2b 中， $aa' \perp OX$ 轴。证明如下：从 A 点所作的二垂线 Aa' 和 Aa 决定一平面（图 2—2a），此平面与 V 面， H 面均相垂直，从立体几何学可知，三平面互相垂直时，它们的三条交线交于一点且互相垂直，所以 $a'a_x \perp OX$ ， $aa_x \perp OX$ 。当投影面展开后， $a'a_x$ 与 aa_x 连成一条垂直于 OX 的直线，亦即 $aa' \perp OX$ 。

2. 点的一个投影到投影轴的距离，反映该空间点到相邻投影面的距离。

如 $a'a_x$ 反映空间 A 点到 H 面的距离； aa_x 反映空间 A 点到 V 面的距离（图 2—2b）。

§ 2—2 点在二投影面体系中的各种位置

一、四个分角

把投影面 V 和 H 扩大，则两平面把空间分为四个部分，称为四个分角。在 H 面之上， V 面之前的这一部分，称第 I 分角。其他三个分角的排列见图 2—3a。

画投影图时，使 H 面的前半部向下旋转到与 V 面重合，后半部向上旋转到与 V 面重合。为了简便起见，投影图上不必再标注投影面的标记，也不用画出边框，只画出 OX 轴就行

了, 如图 2—3b。

二、各种位置的点的投影

点在二投影面体系中的位置, 有以下几种情况: (1) 点在各分角内, (2) 点在投影面内, (3) 点在投影轴内。

1. 在四个分角内的点 (图 2—4)

(1) A 点在第 I 分角内 (图 2—4a),

这种情况前面已经谈过。在投影图上 (图 2—4b), 其正面投影 a' 在 OX 轴的上方, 水平投影 a 在 OX 轴的下方。

(2) B 点在第 II 分角内, 即 B 点在 H 面之上, V 面之后。 B 点的正面投影 b' 在 V 面的上半部, 其水平投影 b 在 H 面的后半部。这两部分投影面展开后, 都在 OX 轴的上方, 所以 B 点的两个投影都在 OX 轴的上方。

(3) C 点在第 III 分角内。在投影图中, 其正面投影 c' 在 OX 轴的下方, 水平投影 c 在 OX 轴的上方。

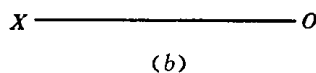
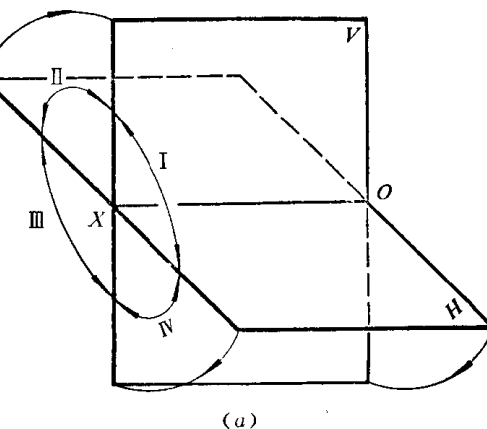
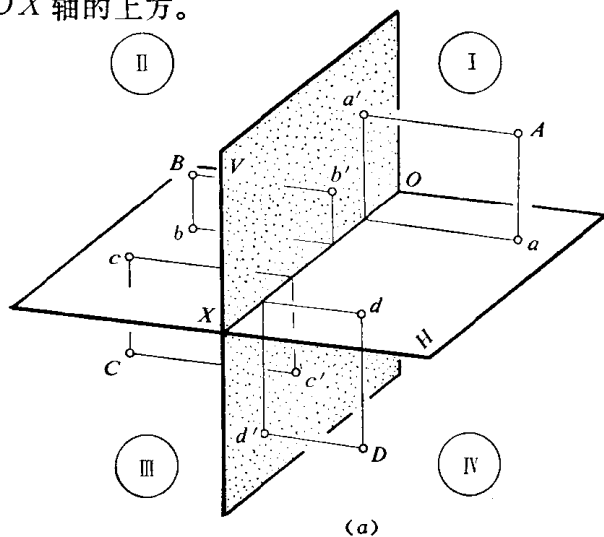


图 2—3 四个分角

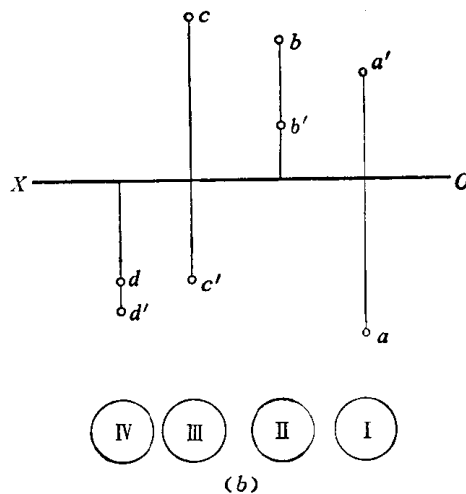


图 2—4 点在四个分角内

(4) D 点在第 IV 分角内。其二投影 d 和 d' 都在 OX 轴的下方。

2. 在投影面内的点 (图 2—5)

(1) E 点在 H 面的前半部平面内 (图 2—5a)。此时 E 点与 H 面的距离等于零, 所以在投影图中 (图 2—5b), E 点的水平投影 e 与 E 点本身重合, 位于 OX 轴的下方; 正面投影 e' 在 OX 轴内。

F 点在 H 面的后半部平面内。在投影图中, 点的水平投影 f 与 F 重合, 位于 OX 轴的上方; 正面投影 f' 在 OX 轴内。

(2) G 点在 V 面的上半部平面内, 即 G 点与 V 面的距离等于零。在投影图中, 其正面投影 g' 与 G 点重合, 位于 OX 轴的上方; 其水平投影 g 在 OX 轴内。

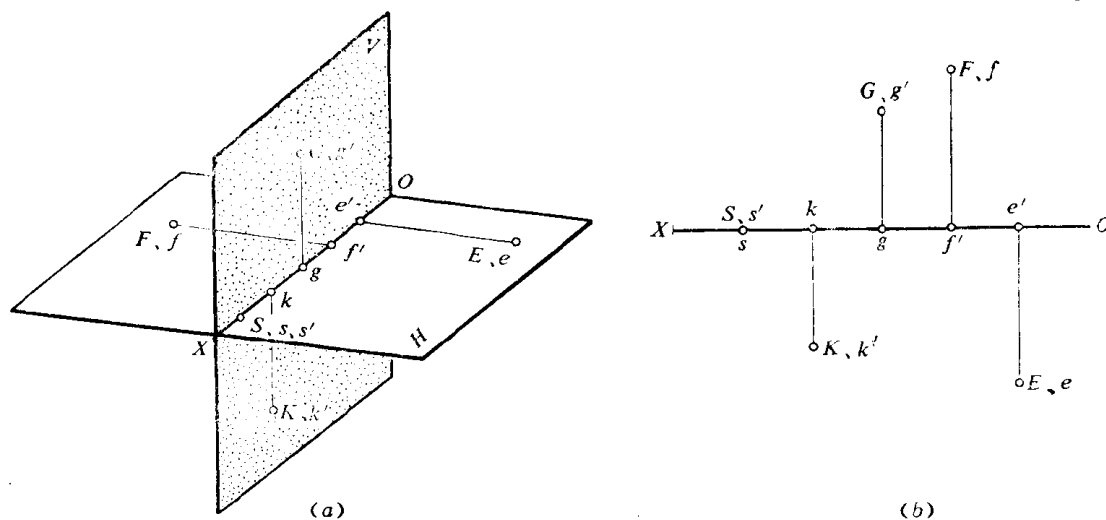


图 2-5 点在投影面和投影轴内

K 点在 V 面的下半部平面内，其正面投影 k' 与 K 点重合，位于 OX 轴的下方；其水平投影 k 在 OX 轴内。

3. 在投影轴内的点

S 点位于投影轴 OX 内（图 2—5a），即此点同时也在两个投影面内，与两投影面的距离均为零。在这种情况下，它的两投影 s 和 s' 都在 OX 轴内，且与 S 点本身重合（图 2—5b）。

4. 综上所述，从投影图中点的投影与 OX 轴的相对位置，可以判断空间点在投影面体系中所处的位置。

（1）在投影图中，如点的水平投影位于 OX 轴的下方，则空间点必位于 V 面之前，反之则在 V 面之后。

（2）如点的正面投影位于 OX 轴的上方，则空间点必位于 H 面之上，反之则在 H 面之下。

（3）如点有一个投影位于 OX 轴内，则该点一定在投影面内。

§ 2—3 三投影面体系及点的三投影

一、三投影面体系

点的两个投影已能确定点在空间的位置，但有时还需要设置第三个投影面，以获得第三个投影。

选择同时垂直于 H 面和 V 面的 W 面作为第三投影面，称为侧立投影面，简称侧面，如图 2—6 所示。 H 面与 W 面的交线标为投影轴 OY ， V 面与 W 面的交线标为投影轴 OZ 。三个投影轴的交点称为原点，以字母 O 标记。

画投影图时，需要把投影面展开，使 H 面和 W 面旋转到与 V 面重合的位置，旋转的方向如图 2—6b 所示。图 2—6c 表示三投影面重合后的情形，图上不必画出边框。请注意同一条 OY 轴，旋转后出现两次，在 H 面上的标为 OY_H ，在 W 面上的标为 OY_W 。

二、点的三投影

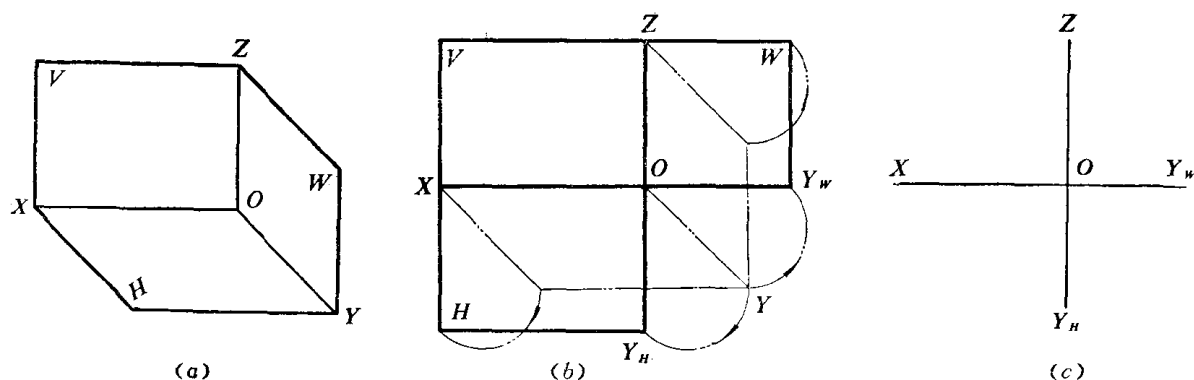


图 2—6 三投影面体系

在 H 、 V 、 W 三投影面体系中，设空间有一个 A 点（图 2—7a）， A 点在 H 、 V 面上的投影为 a 和 a' 。自 A 点向 W 面作垂线，得垂足 a'' ， a'' 就是 A 点的侧面投影（在 W 面上的正投影）。点的侧面投影规定用小写字母并在其右上角加两撇表示（如 a'' ）。

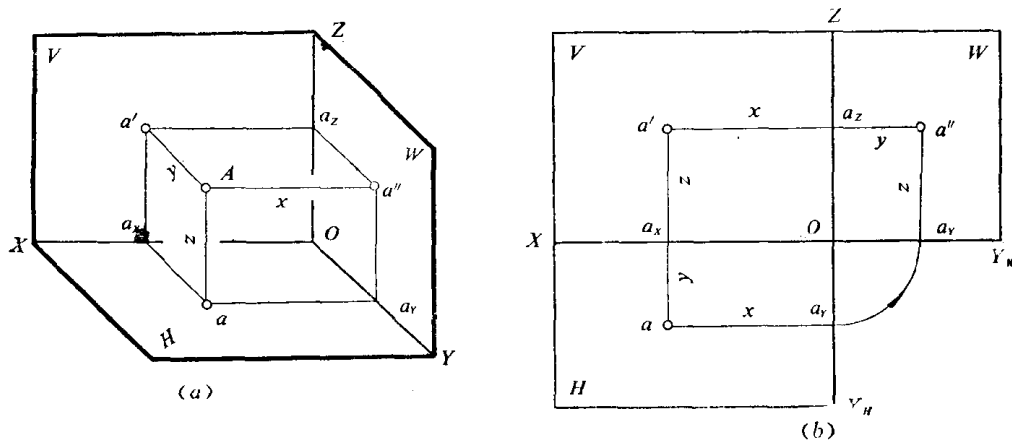


图 2—7 点的三投影

在 A 点的三面投影中（图 2—7b），象两面投影中已经证明的一样，可证得 $a'a'' \perp OZ$ 。这就是说，一个点的正面投影与侧面投影的连线应垂直于 OZ 轴。

把图 2—7 中的投影图与空间关系对照来看， $a'a_x = a''a_y$ ，都反映空间 A 点到 H 面的距离； $aa_x = a''a_z$ ，都反映空间 A 点到 V 面的距离； $a'a_z = aa_y$ ，都反映空间 A 点到 W 面的距离。

三、点的坐标

点的空间位置可以用数字来确定，方法是设置坐标系。把三个投影面（ H 、 V 、 W ）作为坐标面，三条投影轴（ OX 、 OY 、 OZ ）作为坐标轴，三轴的交点（ O ）作为坐标原点。

设坐标系以后，每一个点就有三个坐标： x 、 y 、 z 。当坐标用数字表示时，要表明其长度单位。

1. 第 I 分角内的坐标，以图 2—7 中的 A 点为例说明。

(1) x 坐标

x 坐标反映空间一点（ A ）到 W 面的距离（ Aa'' ）。也就是从原点（ O ）开始，沿投影轴 OX 向左方向量得的长度（ Oa_x ）。 x 坐标确定点在投影面体系中的左右位置。

(2) y 坐标

y 坐标反映空间一点（ A ）到 V 面的距离（ Aa' ）。也就是从原点（ O ）开始，沿投影