

高等学校教材

结构分析中的样条有限元法

合肥工业大学 沈鹏程 编



水利电力出版社

前 言

本世纪60年代,有限元法的诞生和兴起以及计算机科学的发展,使得工程力学和结构的分析与计算产生了重大突破。有限元法之所以受到工程界与科技界普遍的重视,除了它具有较强的解决复杂问题的能力之外,还在于易为科技人员学习和掌握,使他们能够应用有限元法软件在计算机上进行工程问题的分析与计算。70年代,在有限元法发展的基础上又出现了样条有限元法。近10多年来,样条有限元法取得了长足的进展。样条有限元法选择样条插值函数作为位移场函数,这是一种代数分段多项式,具有紧凑性、场未知量少、形成系统方程简捷、易于编制计算程序等优点,可在微型计算机上实施工程问题的计算,因此亦受到人们的重视。本书主要取材于作者从事科研所发表的一些论文、硕士研究生教学中所积累的一些教学内容,也参考了其它一些文献。本书从教学的角度,系统地介绍了样条有限元法及其在梁、平面体、板、壳等结构的弯曲、振动、稳定和动力响应问题中的应用。此外,还介绍了样条边界元法及其初步应用。

本书特别注意到能量原理包括混合能量原理的论述,根据能量原理和样条插值函数导出了样条有限元法的计算格式。书中安排了较多的例题与习题,其目的是使读者较为容易理解样条有限元法的概念、理论和掌握解题思路。此外,在有关的章末安排了计算程序,可供读者直接使用。

天津大学刘昭培教授审阅了本书初稿,提出了许多重要的宝贵意见和建议,在此向他表示衷心感谢。在本书的编写过程中,李永霞同志设计了本书全部底图;王建国、黄大德、何沛祥等同志参加了一些程序编制和例题的演算工作;此外,还得到国家自然科学基金委员会的支持,在此一并致谢。由于作者水平有限,书中难免有不妥之处,望读者多加指正。

沈鹏程

于合肥工业大学

1991年8月

780322

(京)新登字115号

高等学校教材
结构分析中的样条有限元法
合肥工业大学 沈鹏程 编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市京东印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 22.5印张 505千字

1992年11月第一版 1992年11月北京第一次印刷

印数 0001—1530 册

ISBN 7-120-01544-3/TV·564

定价5.80元

内 容 提 要

本书系统地论述了结构分析的样条有限元法。全书共十章，内容包括：能量原理、样条插值函数、样条有限元法、样条有限条法、级数样条元法、样条混合有限元法、样条子域法、样条高斯配点法和样条边界元法，以及它们在梁、平面体、板、壳及加肋板壳的弯曲、振动、稳定和动力响应问题中的应用。书中给出了大量数值结果，还安排了若干计算机程序，供读者直接使用。

本书可作为高等工科院校的水工建筑、工业与民用建筑、道桥工程、机械采矿、船舶、航空及工程力学等专业的高年级学生、研究生的教学参考书，也适合作为教师、工程技术人员自学用书。

目 录

前 言

第一章 能量法与样条函数 1

 第一节 线弹性理论基本方程的矩阵表达式 1

 第二节 最小总势能原理 3

 第三节 最小总余能原理 9

 第四节 混合能量原理 11

 第五节 混合能量法在梁问题中的应用 13

 第六节 样条函数概念 18

 第七节 样条有限元法概念 21

 第八节 B样条函数的构造 22

 第九节 B样条函数的数值计算 28

 第十节 三次、五次B样条函数的线性组合及其积分 34

 第十一节 边界条件的处理 43

 参考文献 45

 习题 46

第二章 直梁分析 48

 第一节 梁的基本方程和最小总势能原理 48

 第二节 样条有限元法分析梁的弯曲问题 50

 第三节 样条有限元法解直杆的稳定问题 56

 第四节 样条有限元法解梁的自由振动问题 59

 第五节 样条有限元法解弹性地基梁 60

 第六节 样条混合有限元法及其在梁弯曲问题中的应用 63

 第七节 样条混合有限元法在梁振动与稳定问题中的应用 65

 第八节 样条混合有限元法在弹性地基梁问题中的应用 67

 第九节 厚梁基本方程 69

 第十节 厚梁的最小总势能原理 71

 第十一节 厚梁的样条有限元法 74

 第十二节 厚梁的混合变分原理 75

 第十三节 样条混合有限元法解厚梁的弯曲问题 77

 第十四节 样条有限元法解厚梁的振动与稳定问题 78

 第十五节 厚梁分析的数值算例 79

 第十六节 计算机方法及其应用 81

 参考文献 94

 习题 95

第三章 弹性平面体问题	98
第一节 最小总势能原理	98
第二节 样条有限元法在弹性平面体中的应用	100
第三节 弹性平面体问题的混合能量原理	103
第四节 样条混合有限元法	104
第五节 样条有限条法在平面问题中的应用	106
第六节 级数样条元法	109
参考文献	113
习题	113
第四章 薄板分析	115
第一节 弹性矩形薄板弯曲问题的基本方程	115
第二节 薄板弯曲的最小总势能原理	120
第三节 样条有限元法分析薄板弯曲问题	122
第四节 数值算例	125
第五节 样条有限元法分析斜板弯曲	128
第六节 振动与稳定分析	131
第七节 样条有限元法分析弹性地基板	134
第八节 薄板的混合能量原理	137
第九节 薄板分析的样条混合有限元法	139
第十节 应用样条混合有限元法解板的振动与稳定问题	142
第十一节 薄板分析的样条有限条法	144
第十二节 级数样条元法分析薄板的弯曲问题	148
第十三节 级数样条元法分析薄板的振动与稳定问题	153
第十四节 计算机方法及其应用	156
参考文献	172
习题	174
第五章 中厚板分析	175
第一节 中厚板弯曲的基本方程	175
第二节 中厚板弯曲的最小总势能原理	178
第三节 弹性中厚板分析的样条有限元法	180
第四节 中厚板的混合能量原理	181
第五节 中厚板弯曲的样条混合有限元法	182
第六节 中厚板的振动与稳定	185
第七节 中厚板弯曲的级数样条元法	187
第八节 级数样条元法在中厚板振动与稳定问题中的应用	189
第九节 数值算例	191
参考文献	194
习题	195
第六章 弹性圆柱形薄壳与折板	197
第一节 轴对称荷载作用下的闭合圆柱形薄壳的基本方程	197

第二节	轴对称圆柱形薄壳弯曲的样条有限元法	199
第三节	圆柱形开口薄壳弯曲的基本方程	200
第四节	样条有限元法分析圆柱形薄壳的弯曲	202
第五节	样条有限元法分析圆柱形薄壳的振动	209
第六节	级数样条元法分析圆柱形薄壳的弯曲	210
第七节	级数样条元法分析圆柱形薄壳的振动	212
第八节	数值算例	214
第九节	样条子域法分析折板弯曲	215
第十节	样条子域法分析折板的自由振动	224
第十一节	样条子域法的数值算例	226
参考文献		226
习题		227
第七章	双曲扁壳	229
第一节	矩形底双曲扁壳的基本方程	229
第二节	样条有限元法分析双曲扁壳的弯曲	232
第三节	样条有限元法计算双曲扁壳的振动	235
第四节	级数样条元法解双曲扁壳的弯曲	236
第五节	级数样条元法解双曲扁壳的振动	238
第六节	数值算例	239
第七节	四边简支球形扁壳的弯曲与振动	243
参考文献		247
习题		248
第八章	加肋板壳	249
第一节	加肋薄板弯曲的样条有限元法	249
第二节	加肋板的振动与稳定	255
第三节	弹性地基上的加肋板	257
第四节	数值算例	258
第五节	加肋扁壳的弯曲	261
第六节	加肋扁壳的振动	269
第七节	加肋扁壳的数值算例	271
第八节	样条高斯配点法解板壳的弯曲、振动与稳定问题	273
第九节	样条有限元法分析叠层板壳	282
参考文献		289
第九章	结构的动力响应分析	291
第一节	结构动力学的基本方程	291
第二节	样条函数法求解结构的动力响应问题	294
第三节	薄板的动力响应分析	297
第四节	圆柱形薄壳的动力响应分析	303
第五节	双曲扁壳的动力响应分析	305
第六节	加肋板壳的动力响应分析	310

第七节 直接积分法	312
参考文献	313
习题	314
第十章 样条边界元法	315
第一节 位势场方程	315
第二节 位势问题的积分方程	316
第三节 位势问题的边界积分方程	320
第四节 边界元法	323
第五节 位势问题的样条边界元法	327
第六节 弹性力学的样条边界元法	330
第七节 薄板弯曲的基本解与积分方程	339
第八节 薄板分析的样条边界元法	343
参考文献	348

第一章 能量法与样条函数

样条有限元法的理论是建立在能量原理与B样条插值函数理论的基础上的。本章将较详细地叙述结构分析中的最小总势能原理、最小总余能原理、混合能量原理以及样条插值函数的一些基本知识。

第一节 线弹性理论基本方程的矩阵表达式

由弹性理论^[1]可知,对一般线弹性体,从静力学、几何学和物理学三方面规律来考虑,可获得15个基本方程,其中包括3个平衡方程、6个物理方程和6个几何方程;在位移边界问题中,位移分量在边界上还应满足位移边界条件,即 $u=\bar{u}$ 、 $v=\bar{v}$ 、 $w=\bar{w}$;在应力边界问题中,应力分量在边界上还应满足应力边界条件,即在边界上应满足应力与边界面力保持平衡的条件。为了便于后面各章中的应用,现将弹性理论中的15个基本方程表达成矩阵形式。

一、平衡方程式

对于平面问题,其平衡微分方程为
在域内,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-1)$$

在域的边界上,

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} &= \bar{p}_x \\ l\tau_{yx} + m\sigma_y &= \bar{p}_y \end{aligned} \right\} \quad (1-1-2)$$

上述式(1-1-1)和式(1-1-2)可以用矩阵形式来表达,即在域内,

$$[E(\nabla)]\{\sigma\} + \{f\} = \{0\} \quad (1-1-3)$$

在域的边界上,

$$[E(\nu)]\{\sigma\} = \{\bar{p}\} \quad (1-1-4)$$

在上两式中,矩阵微分算子和方向余弦矩阵分别为

$$[E(\nabla)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1-1-5)$$

$$[E(\nu)] = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \quad (1-1-6)$$

方向余弦为

$$l = \cos(x, N), \quad m = \cos(y, N) \quad (1-1-7)$$

应力向量为

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (1-1-8)$$

边界面力向量为

$$\{\bar{p}\} = [\bar{p}_x \quad \bar{p}_y]^T \quad (1-1-9)$$

体力向量为

$$\{f\} = [f_x \quad f_y]^T \quad (1-1-10)$$

对于空间问题, 有

$$[E(\nabla)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (1-1-11)$$

$$[E(\nu)] = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & m & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & n & m & l & 0 \end{bmatrix} \quad (1-1-12)$$

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (1-1-13)$$

$$\{\bar{p}\} = [\bar{p}_x \quad \bar{p}_y \quad \bar{p}_z]^T \quad (1-1-14)$$

$$\{f\} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \quad (1-1-15)$$

$$l = \cos(x, N)$$

$$m = \cos(y, N) \quad (1-1-16)$$

$$n = \cos(z, N)$$

二、几何方程式

平面问题的几何方程为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1-1-17)$$

将上式写成矩阵形式, 就有

$$\{\varepsilon\} = [E(\nabla)]^T \{d\} \quad (1-1-18)$$

其中, 应变向量为

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (1-1-19)$$

位移向量为

$$\{d\} = [u \quad v]^T \quad (1-1-20)$$

对于空间问题, 有

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \quad (1-1-21)$$

$$\{d\} = [u \ v \ w]^T \quad (1-1-22)$$

三、物理方程式

对平面应力问题, 其物理方程为

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \quad (1-1-23)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}$$

将上式用矩阵表达为

$$\{\sigma\} = [D_p] \{\varepsilon\} \quad (1-1-24)$$

式中, $[D_p]$ 为平面体的弹性矩阵, 即

$$[D_p] = D_p \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1-1-25)$$

其中, $D_p = \frac{E}{1-\mu^2}$.

对于空间问题, 弹性矩阵 $[D_s]$ 为

$$[D_s] = D_s \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ \hline & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \end{bmatrix} \quad (1-1-26)$$

对称

其中, $D_s = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$.

第二节 最小总势能原理

上节已把弹性理论基本方程全部列出, 其中包括三套方程, 即平衡方程、几何方程和物理方程。除了简单的问题外, 一般很难应用精确方法求解上述偏微分方程组的边值问

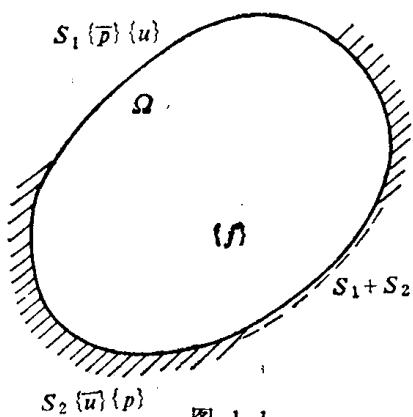


图 1-1

的应变能 $U^{[2]}$;

题。为了求得问题的近似解，可将微分方程的边值问题转换成一个变分问题，从而扩大解题的范围。

如图 1-1，若有一个弹性体在体力作用下，处于平衡状态。假设有两种边界条件，一部分为固支边界 S_2 ，其上有未知面力 $\{p\}$ 和已知位移分量 $\{\bar{u}\}$ ；另一部分为自由边界 S_1 ，其上有已知面力 $\{\bar{p}\}$ 和未知位移分量 $\{u\}$ ，带一杠的字母表示给定的位移和面力，如图 1-1 所示。

整个系统的势能包含两部分，一部分是弹性体

$$U = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D_s] \{\varepsilon\} d\Omega$$

式中， Ω 代表弹性体所占的空间； S 代表弹性体表面。

另一部分为外载的势能 $V^{[2]}$ ，其算式为

$$V = - \int_{\Omega} \{f\}^T \{u\} d\Omega - \int_{S_1} \{\bar{p}\}^T \{u\} dS$$

所以，整个系统的总势能为

$$\Pi_p = U + V = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D_s] \{\varepsilon\} d\Omega - \int_{\Omega} \{f\}^T \{u\} d\Omega - \int_{S_1} \{\bar{p}\}^T \{u\} dS \quad (1-2-1)$$

对式 (1-2-1) 进行位移变分，并令其变分为零，就有

$$\delta \Pi_p = \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \delta \{\varepsilon\} d\Omega - \int_{\Omega} \{f\}^T \delta \{u\} d\Omega - \int_{S_1} \{\bar{p}\}^T \delta \{u\} dS = 0 \quad (1-2-2)$$

对上式中的积分项 $\int_{\Omega} \{\sigma\}^T \delta \{\varepsilon\} d\Omega$ 进行分部积分，有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \delta \{\varepsilon\} d\Omega &= \int_{\Omega} \{\sigma\}^T [E(\nabla)]^T \delta \{u\} d\Omega \\ &= \int_{S_1+S_2} \delta \{u\}^T [E(\nu)] \{\sigma\} dS - \int_{\Omega} \delta \{u\}^T [E(\nabla)] \{\sigma\} d\Omega \end{aligned} \quad (1-2-3)$$

现将式 (1-2-3) 代入式 (1-2-2)，经过整理后，有

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} [[E(\nabla)] \{\sigma\} + \{f\}]^T \delta \{u\} d\Omega + \int_{S_1} [[E(\nu)] \{\sigma\} - \{\bar{p}\}]^T \delta \{u\} dS \\ & = 0 \end{aligned} \quad (1-2-4)$$

考虑到在域内位移变分是不为零的任意微小值，因而可以由式 (1-2-4) 得到如下的平衡方程式：

$$[E(\nabla)]\{\sigma\} + \{f\} = \{0\} \quad \text{在}\Omega\text{域内} \quad (1-2-5)$$

$$[E(\nu)]\{\sigma\} = \{p\} \quad \text{在}\Omega\text{域的边界}S_1\text{上} \quad (1-2-6)$$

由上述论证可知, 令系统总势能 Π_p 的变分为零, 即 $\delta\Pi_p = 0$, 就得到弹性体的平衡偏微分方程式(1-2-5)和相应的力的边界条件式(1-2-6)。这就表明弹性体的平衡微分方程的边值问题等价于其总势能变分为零的问题。由此可得到一个结论: 连续变形体的一切可能的位移状态中, 那些满足平衡条件的位移状态, 能使总势能有驻值, 即有 $\delta\Pi_p = 0$ 时的 Π_p 值, 此值一般既非极大值, 也非极小值, 称为驻值。当变形连续线弹性体处于稳定的平衡状态时, 总势能有极小值, 现论证如下。

设有一连续线弹性变形体, 在给定的荷载作用下, 处于稳定平衡状态。设此问题有一真解或正确解为 $\{u\}$ 和 $\{\varepsilon\}$, 它们应当满足弹性理论的全部微分方程和边界条件; 并设想, 若有另一组解答 $\{u'\}$ 和 $\{\varepsilon'\}$, 它们可写成: $\{u'\} = \{u\} + \delta\{u\}$, $\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon\} + \delta\{\varepsilon\}$ 。

根据泰勒级数, 有

$$\begin{aligned} \Pi_p(\{u'\}, \{\varepsilon'\}) &= \Pi_p(\{u\} + \delta\{u\}, \{\varepsilon\} + \delta\{\varepsilon\}) \\ &= \Pi_p(\{u\}, \{\varepsilon\}) + \delta\Pi_p + \delta^2\Pi_p \end{aligned}$$

若系统处于平衡状态, 则有 $\delta\Pi_p = 0$, 而 $\delta^2\Pi_p$ 为应变能增量, 为正定二次型, 故必有 $\delta^2\Pi_p > 0$ 。这样, 由上式可得

$$\Pi_p(\{u'\}, \{\varepsilon'\}) > \Pi_p(\{u\}, \{\varepsilon\}) \quad (1-2-7)$$

由式(1-2-7)可知, 若 $\{u\}$ 、 $\{\varepsilon\}$ 为问题的真解或正确解, 则总势能为极小值。因此, 最小总势能原理可叙述如下: 连续线弹性变形体处于稳定平衡状态的必要与充分条件是体系的总势能为极小值。

在结构分析中, 应用最小总势能原理求解问题的近似解答是十分有用的, 它提供了在结构的一切可能的变形状态中寻求其真实变形状态的一种有效方法。例如, 在梁板弯曲问题中, 先假设具有待定参数的协调性位移函数, 即梁板的弹性挠曲方程式; 而后计算此体系的总势能, 其总势能可表达成待定参数的二次型函数; 然后, 由总势能的极小条件来确定这些参数值, 问题即得到解决。最小总势能原理在结构分析中, 有重要的理论与实用价值。

【例题 1-1】 试用最小总势能原理求解图 1-2 所示悬臂梁承受均匀荷载的挠度和弯矩。

【解】 首先选择悬臂梁的挠曲线方程式, 并满足梁端的位移条件, 其方程为

$$w(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3$$

上式中, 容易验证此位移曲线能满足梁的支座位移的边界条件, 即 $w(0) = \frac{dw(0)}{dx} = 0$ 。将 $w(x)$ 代入梁的总势能式子中, 有

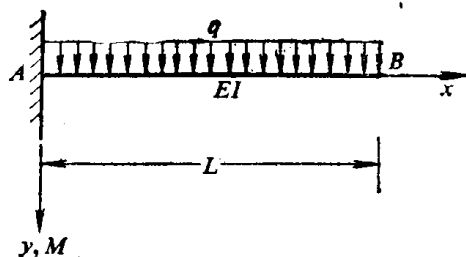


图 1-2

$$\begin{aligned}\Pi_p &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L q w dx \\ &= \frac{EI}{2} (4C_1^2 L + 12C_1 C_2 L^2 + 12C_2^2 L^3) - q \left(\frac{C_1 L^3}{3} + \frac{C_2 L^4}{4} \right)\end{aligned}$$

根据最小总势能原理, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_p}{\partial C_1} &= 0, \quad EI(4C_1 L + 6C_2 L^2) = \frac{qL^3}{3} \\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial C_2} &= 0, \quad EI(6C_1 L^2 + 12C_2 L^3) = \frac{qL^4}{4}\end{aligned}$$

联立解上两式, 得参数 C_1 、 C_2 :

$$C_1 = \frac{5qL^2}{24EI}, \quad C_2 = -\frac{qL}{12EI}$$

这样, 梁挠曲线方程为

$$w(x) = \frac{5qL^2}{24EI} x^2 - \frac{qL}{12EI} x^3$$

梁自由端挠度与转角分别为

$$w(L) = \frac{qL^4}{8EI} \quad (\text{与精确解相同})$$

$$\theta(L) = \frac{dw(L)}{dx} = \frac{qL^3}{6EI}$$

若选择 3 个待定参数, 其挠曲线方程为

$$w(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4$$

将挠曲线方程代入梁的总势能式子中, 并应用最小总势能原理, 有

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial C_2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial C_3} = 0$$

$$EI \begin{bmatrix} 4 & 6L & 8L^2 \\ 6L & 12L^2 & 18L^3 \\ 8L^2 & 18L^3 & \frac{144}{5}L^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL^2}{3} \\ \frac{qL^3}{4} \\ \frac{qL^4}{5} \end{bmatrix}$$

解上式, 有

$$[C_1 \ C_2 \ C_3]^T = \left[-\frac{qL^2}{4EI} \ -\frac{qL}{6EI} \ -\frac{q}{24EI} \right]^T$$

这样, 悬臂梁的挠曲线方程、转角方程和弯矩方程分别为

$$w(x) = \frac{qL^2}{4EI}x^2 - \frac{qL}{6EI}x^3 + \frac{q}{24EI}x^4$$

$$\theta(x) = \frac{qL^2}{2EI}x - \frac{qL}{2EI}x^2 + \frac{q}{6EI}x^3$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2w}{dx^2} = -q \frac{(L-x)^2}{2}$$

上面三式为悬臂梁承受均布荷载时的精确解。

【例题 1-2】 简支梁承受两个集中荷载，如图1-3所示，试用最小总势能原理求解挠度和弯矩。

【解】 选取简支梁的挠曲线方程，并满足梁端的位移条件，其方程为

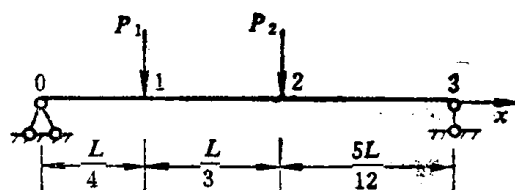


图 1-3

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}$$

由总势能式子得

$$\begin{aligned} \Pi_p &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx - P_1 w_1 - P_2 w_2 \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^L a_1^2 \left(-\frac{\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx - P_1 a_1 \sin \frac{\pi}{4} - P_2 a_1 \sin \frac{7\pi}{12} \\ &= EI a_1^2 \left(-\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{4} - 0.707 P_1 a_1 - 0.966 P_2 a_1 \end{aligned}$$

由最小总势能原理，得

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_1} = 0$$

解得

$$a_1 = \frac{L^3}{EI\pi^4} (1.4142P_1 + 1.9319P_2)$$

于是，梁的挠曲线方程为

$$w = \frac{L^3}{EI\pi^4} (1.4142P_1 + 1.9319P_2) \sin \frac{\pi x}{L}$$

若设梁的挠曲线方程有两个待定参数，如

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$$

容易检验，上述方程是满足位移边界条件的，

由总势能式子, 得

$$\begin{aligned}\Pi_p &= \int_0^L \frac{EI}{2} \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{2\pi x}{L} \right]^2 dx - P_1 w \left(\frac{L}{4} \right) \\ &\quad - P_2 w \left(\frac{7L}{12} \right) \\ &= \frac{EI}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} a_1^2 + \frac{EI}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} a_2^2 - P_1 \left(a_1 \sin \frac{\pi}{4} + a_2 \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad - P_2 \left(a_1 \sin \frac{7\pi}{12} + a_2 \sin \frac{7\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

由最小总势能原理知

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_2} = 0$$

得

$$\begin{aligned}\frac{EI\pi^4}{2L^3} a_1 &= 0.707P_1 + 0.966P_2, \\ \frac{8EI\pi^4}{L^3} a_2 &= P_1 - 0.5P_2,\end{aligned}$$

由上式解得

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{2L^3}{EI\pi^4} (0.707P_1 + 0.966P_2) \\ a_2 &= \frac{L^3}{8EI\pi^4} (P_1 - 0.5P_2)\end{aligned}$$

于是, 梁的挠曲线方程为

$$\begin{aligned}w &= \frac{L^3}{EI\pi^4} \left[(1.414P_1 + 1.932P_2) \sin \frac{\pi x}{L} + (0.125P_1 - 0.0625P_2) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{2\pi x}{L} \right]\end{aligned}$$

故梁上荷载作用处的挠度值为

$$\begin{aligned}w_1 \left(\frac{L}{4} \right) &= \frac{L^3}{EI} (0.01155P_1 + 0.0134P_2) \\ w_2 \left(\frac{7L}{12} \right) &= \frac{L^3}{EI} (0.01336P_1 + 0.0195P_2)\end{aligned}$$

精确解为

$$\begin{aligned}w_1 \left(\frac{L}{4} \right) &= \frac{L^3}{EI} (0.0117P_1 + 0.0133P_2) \\ w_2 \left(\frac{7L}{12} \right) &= \frac{L^3}{EI} (0.0133P_1 + 0.0197P_2)\end{aligned}$$

第三节 最小总余能原理

在结构分析中,有时选用力作为基本未知量,应用变形协调条件建立系统方程,由此求得力的基本未知量,这种方法称为力法。在有限元力法和杂交应力元法^[9]中,通常应用最小总余能原理来推导其基本方程。下面,首先论证最小总余能原理。

现仍考虑与上节相同的弹性体的平衡问题。系统的总余能包含有两个部分,一部分是余应变能^[1]:

$$U_e = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [D_e]^{-1} \{\sigma\} d\Omega$$

一部分是已知的边界位移的余能,它的式子见文献[9]:

$$V_e = - \int_{\Gamma_2} \{p\}^T \{\bar{u}\} dS$$

因此,整个系统的总余能为

$$\Pi_e = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [D_e]^{-1} \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \{p\}^T \{\bar{u}\} dS \quad (1-3-1)$$

现对式(1-3-1)关于应力进行变分,并令其为零,即有

$$\begin{aligned} \delta \Pi_e &= \int_{\Omega} \{\sigma\}^T [D_e]^{-1} \delta \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \{\bar{u}\}^T \delta \{p\} dS = \{0\} \\ &= \int_{\Omega} \{\epsilon\}^T \delta \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \{\bar{u}\}^T \delta \{p\} dS = \{0\} \end{aligned} \quad (1-3-2)$$

其次,在选择域内,任意一组应力变分应满足齐次平衡方程,任意一组边界面力变分应满足边界齐次平衡方程,即有

$$[E(\nabla)] \delta \{\sigma\} = \{0\} \quad (1-3-3)$$

$$[E(\nu)] \delta \{\sigma\} = \delta \{p\} = \{0\} \quad (1-3-4)$$

现将真实位移 $\{u\}$ 乘以式(1-3-3),并对整体进行积分,就有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{u\}^T [E(\nabla)] \delta \{\sigma\} d\Omega &= \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} ([E(\nu)] \delta \{\sigma\})^T \{u\} dS - \int_{\Omega} [E(\nabla)] \{u\} \delta \{\sigma\} d\Omega \\ &= \{0\} \end{aligned} \quad (1-3-5)$$

现比较式(1-3-2)和式(1-3-5),并考虑到式(1-3-4),就有

$$\left. \begin{aligned} \{\epsilon\} &= [E(\nabla)]^T \{u\} && \text{在 } \Omega \text{ 域内} \\ \{u\} &= \{\bar{u}\} && \text{在 } \Omega \text{ 域的 } S_2 \text{ 边界上} \end{aligned} \right\} \quad (1-3-6)$$