

结构力学教学参考丛书

高层建筑结构计算

包世华 编著

高等教育出版社

结构力学教学参考丛书

高层建筑结构计算

包世华 编著

高等教育出版社

本书是为加深与加宽高层建筑结构计算方面的知识而编写的教学用书。

全书内容分上、下两篇，共六章。上篇为高层建筑结构静力计算，内容包括框架-剪力墙-薄壁筒的弯扭耦连计算和剪力墙的应力集中、高层建筑筒体结构的计算和高层建筑结构的有限条分析法等三章。下篇为高层建筑结构抗震动力计算，内容包括高层建筑结构地震作用的反应谱分析法、高层建筑结构地震反应的时程分析法和高层建筑结构动力特性分析等三章。各章附有例题。

本书可供高等工业院校土建类专业学生、研究生作为学习高层建筑结构计算的教材或参考书，也可供有关工程设计、施工技术人员作为参考书。

本书责任编辑 余美茵

结构力学教学参考丛书

高层建筑结构计算

包世华 编著

中国建筑工业出版社

新华书店总店北京科技发行所发行

北京印刷一厂印刷

开本787×1092 1/16 印张17.5 字数400 000

1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷

印数0001—1 870

ISBN 7-04-002993-6/TU·41

定价6.70元

序

本书是为加深和加宽高层建筑结构计算方面的知识而编写的，可供高等工院校土建类专业学生、研究生作为学习高层建筑结构计算的教材，也可供从事高层建筑结构设计和施工的工程技术人员作为参考书。

全书内容分上、下两篇，共六章。上篇为高层建筑结构静力计算，内容包括框架-剪力墙-薄壁筒结构的弯扭耦连计算和剪力墙的应力集中、高层建筑筒体结构的计算和高层建筑结构的有限条分析法等三章。下篇为高层建筑结构抗震动力计算，内容包括高层建筑结构地震作用的反应谱分析法、高层建筑结构地震反应的时程分析法和高层建筑结构动力特性分析等三章。所有这些内容都是作者的另一本书（《高层建筑结构设计》，清华大学出版社，1985年）未曾包含的，其中许多是我们自己的研究成果。

近年来高层建筑结构发展的特点是：建筑高度增加，各种筒体型式结构增多，体型复杂的建筑增多。这些都对高层建筑结构计算提出了新的要求，也促进了计算方法的研究与发展。为了适应这些要求，故编写了本书的上篇。

第一章提供一种适合手算计算框架-剪力墙-薄壁筒结构弯扭耦连的计算方法，并将计算结果归结为框-剪结构同样的图表曲线，这为解决复杂体型的高层建筑结构提供了一种简便的算法。本章同时用分区混合有限元法介绍了框支剪力墙和开洞剪力墙的应力集中问题。分区混合有限元法是一种有广泛应用前景的方法，在应力集中等一系列问题中，它比单一的位移有限元法精度高，计算量少。

第二章介绍近年来国内外提出的筒体结构的各种计算方法。包括：等代角柱法、连续体-微分方程法、以及变截面筒中筒、多边形筒和多孔束筒等方法，不仅为矩形平面的框筒和筒中筒、也为复杂情况的筒体结构提供了简化分析方法。

第三章介绍高层建筑结构的有限条分析法，它是分析高层建筑结构的另一种通用算法，特别适用于筒体结构的静力和动力计算。国内已有根据此原理编制的电子计算机通用程序，可供应用。

现行标准《建筑抗震设计规范》和《钢筋混凝土高层建筑结构设计施工规程》均规定了多数高层建筑结构在地震作用下要用反应谱分析法计算，重要的高层建筑宜按时程分析法进行校核。为了适应这些要求，故专门编写了本书的下篇。

第四章简要地介绍了按地震反应谱计算地震作用的原理，多自由度体系地震作用的振型分解法，特别按新规范要求讨论了考虑扭转影响时的地震作用，并对规程中的有关内容作了介绍与解释。

第五章系统地介绍了地震反应的时程分析法的各个环节及其中的问题，通过它们可以对时程分析法有一个全面的了解。

目 录

上 篇 高层建筑结构静力计算

第一章 框架-剪力墙-薄壁筒结构的弯扭耦连计算和剪力墙的应力集中

- § 1-1 框架-剪力墙-薄壁筒结构的弯扭耦连计算 1
- § 1-2 用分区混合有限元法分析框支剪力墙 28
- § 1-3 用分区混合有限元法分析剪力墙角区应力集中 38

第二章 高层建筑筒体结构的计算

- § 2-1 概述 54
- § 2-2 框筒结构在水平荷载下的等代角柱法 54
- § 2-3 筒中筒结构在水平荷载下的连续体-微分方程法 63
- § 2-4 变截面筒中筒结构在水平荷载下的计算 77
- § 2-5 变截面筒中筒结构在扭转荷载下的计算 89
- § 2-6 多边形筒体结构在水平荷载下的计算 101
- § 2-7 多孔束筒结构在水平荷载下的计算 116
- § 2-8 框筒和筒中筒结构在扭转荷载下的微分方程解法 130

第三章 高层建筑结构的有限条分析法

- § 3-1 概述 135
- § 3-2 条元模型和等效连续体的弹性常数 136
- § 3-3 条元的位移函数 140
- § 3-4 筒体结构的条元分析 144
- § 3-5 筒体结构分析 147
- § 3-6 对称结构的计算和计算实例 150

下 篇 高层建筑结构抗震动力计算

第四章 高层建筑结构地震作用的反应谱分析法

- § 4-1 结构抗震动力计算概述 154
- § 4-2 地震反应谱及按反应谱计算地震作用原理 157
- § 4-3 多自由度体系地震作用的近似计算——底部剪力法 161
- § 4-4 多自由度体系的地震反应计算 164
- § 4-5 多自由度体系地震作用的计算公式及效应组合 170
- § 4-6 考虑扭转影响时的地震作用及其效应 172
- § 4-7 竖向地震作用计算 178

第五章 高层建筑结构地震反应的时程分析法

§ 5-1 概述	179
§ 5-2 输入地震波的选择	180
§ 5-3 结构的振动模型	181
§ 5-4 质量矩阵和阻尼矩阵	186
§ 5-5 结构和构件的恢复力特性	188
§ 5-6 结构振动方程的建立	192
§ 5-7 振动方程的积分方法	201
§ 5-8 计算结果示例	208

第六章 高层建筑结构动力特性分析

§ 6-1 概述	210
§ 6-2 框架结构	212
§ 6-3 剪力墙结构和框架-剪力墙共同工作体系	220
§ 6-4 框支剪力墙和落地剪力墙共同工作体系	225
§ 6-5 框支剪力墙、落地剪力墙和壁式框架共同工作体系	236
§ 6-6 高层建筑结构协同工作体系	244
§ 6-7 筒体结构	248
§ 6-8 框架-剪力墙-薄壁筒结构的弯扭耦连振动计算	259

参考文献	271
------	-----

上篇 高层建筑结构静力计算

第一章 框架-剪力墙-薄壁筒结构的弯扭 耦连计算和剪力墙的应力集中

§ 1-1 框架-剪力墙-薄壁筒结构的弯扭耦连计算

一、高层建筑结构体系概述

在高层建筑结构中,水平荷载(或称侧力)是控制结构设计的主要因素。按抗侧力结构的不同,常用的高层建筑结构体系有框架结构、剪力墙结构和框架-剪力墙结构。在这三大结构体系中,常有由墙体围成筒状的薄壁筒。这种薄壁筒的作用与平面框架、平面剪力墙是不同的,它不仅在两个方向都有相当的侧向刚度,即在两个方向能承受水平荷载;还有相当大的扭转刚度,能够承受相当大小的扭矩。这种框架、剪力墙和薄壁筒通过楼板组合在一起共同抵抗水平荷载的结构体系,称为框架-剪力墙-薄壁筒结构。这种结构体系实际上是由三种受力性能不同的构件通过刚性楼板连接在一起共同承担侧力的工作体系。这种框架-剪力墙-薄壁筒结构,在平面内可以是正交布置的(图 1-1 a),也可以是斜交布置的(图 1-1 b)。图中 Q_x 、 Q_y 和 M_x 分别表示楼层的剪力和扭矩。这种结构体系在水平荷载作用下,除结构和荷载都是对称的情况外,一般情况下结构会产生弯曲和扭转,而且弯扭是耦连的。

本节讨论这种框架-剪力墙-薄壁筒结构,当平面布置不对称(含斜交布置)时,在水平荷载作用下的计算方法。本节计算方法适用于沿竖向结构刚度为均匀的框架-剪力墙-薄壁筒结构。当沿竖向结构刚度不完全均匀时,可以采用平均值;但不适用于沿竖向结构刚度有巨大变化(如框支剪力墙)的情况,也不适用于框筒。本节方法把计算结果归结为与框架-剪力墙结构计算方法相似的图表曲线,计算时可以直接查用,使计算方便。

二、基本方程的建立

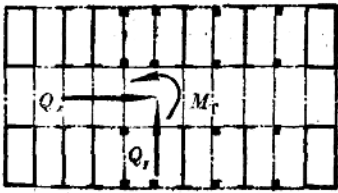
1. 基本假定与计算简图

在选取计算简图时,作如下的假设:

- (1) 楼板在自身平面内的刚度为无限大,出平面的刚度忽略不计。
- (2) 框架、剪力墙在其自身平面内有刚度,出平面的刚度忽略不计。

在此两基本假定下,此框架-剪力墙-薄壁筒结构,在水平荷载作用下,同一楼层标高处,框

(a)



(b)

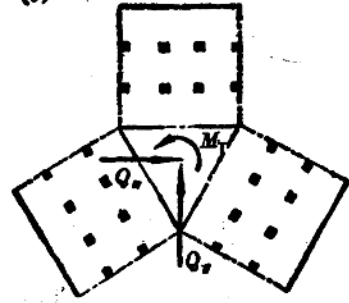


图 1-1 结构的平面图

架、剪力墙与薄壁筒有相同的侧移和转角。可以按以下计算简图进行计算。

本节把薄壁筒视为薄壁杆件，刚性楼板可以保证它在扭转时截面形状不变。薄壁筒和剪力墙合在一起成为一组悬臂杆（其作用有如框架-剪力墙结构中的剪力墙），平面框架可视为此组合悬臂杆的弹性地基。于是，问题变为弹性地基上的组合悬臂杆在水平荷载作用下的弯曲和扭转耦连计算。

下面为了建立微分方程，须进一步将每层处的楼板作用沿层高连续化。也就是，此框架-剪力墙-薄壁筒结构，在水平荷载作用下，同一水平标高处，框架、剪力墙与薄壁筒有相同的侧移和转角。

从上述基本假设与计算简图可以看出：本节计算方法属于高层建筑结构计算中的协同工作法；只考虑了各抗侧力结构间水平变形的协调，而没有考虑各抗侧力结构间竖向变形的协调，因而，对竖向协调要求高的结构（如框筒结构），本节方法不适用。

2. 力的平衡条件

为了便于表示各抗侧力结构间位移的协调关系和力的平衡条件，设置了两套坐标系：整体坐标系和局部坐标系（图 1-2）。它们均为右手坐标系，Z 轴向上，坐标原点取在底面处。整体坐标系为 $OXYZ$ 。第 i 个构件的局部坐标系为 $\bar{O}_i\bar{x}_i\bar{y}_i\bar{z}_i$ ， \bar{z}_i 轴为其剪切中心轴， $\bar{O}_i\bar{x}_i$ 、 $\bar{O}_i\bar{y}_i$ 轴为其截面主轴。 \bar{O}_i 在整体坐标系中的坐标为 X_i^0 、 Y_i^0 ， $\bar{O}_i\bar{x}_i$ 轴与 OX 轴的夹角为 α_i 。

设第 i ($i=1, 2, \dots, n_1$) 个薄壁筒（含剪力墙）上受有沿局部坐标系方向的横向剪力 \bar{Q}_{xi} 、 \bar{Q}_{yi} 和扭矩 \bar{M}_i ，称为薄壁筒 i 在局部坐标系中的内力分量向量，用 $\{\bar{Q}_i\}$ 表示。将其作用移至整体坐标系的原点，并用 Q_{xi} 、 Q_{yi} 和 M_i 表示，称为薄壁筒 i 在整体坐标系中的内力分量向量，用 $\{Q_i\}$ 表示。利用力的投影和取矩关系可以建立下述坐标变换关系：

$$\{Q_i\} = [N_i]\{\bar{Q}_i\} \quad (1-1-1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \{Q_i\} &= [Q_{xi} \quad Q_{yi} \quad M_i]^T \\ \{\bar{Q}_i\} &= [\bar{Q}_{xi} \quad \bar{Q}_{yi} \quad \bar{M}_i]^T \\ [N_i] &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ X_i^0 \sin \alpha_i - Y_i^0 \cos \alpha_i & X_i^0 \cos \alpha_i + Y_i^0 \sin \alpha_i & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-1a)$$

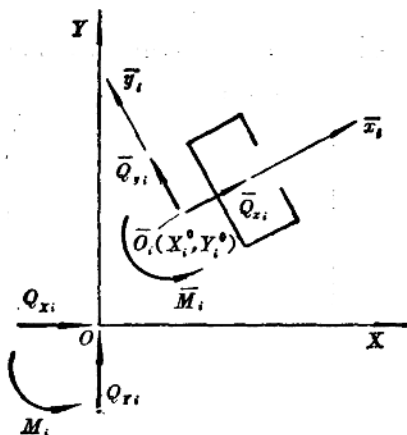


图 1-2

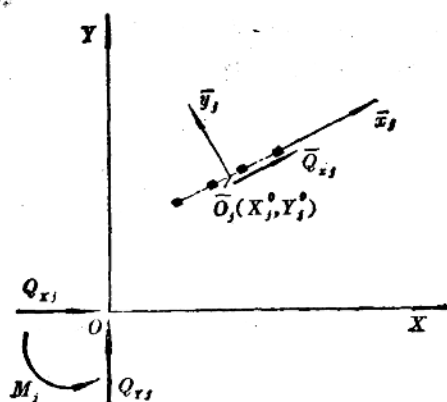


图 1-3

至于框架,因为框架平面外的刚度忽略不计,出平面方向没有横向力。设 \bar{x}_j 轴为框架平面内的主轴,则其上只受有横向力 \bar{Q}_{x_j} ,称为框架 j 在局部坐标系中的内力分量,用 $\{\bar{Q}_j\}$ 表示(图 1-3)。将其作用移至整体坐标系的原点,并用 Q_{x_j} 、 Q_{y_j} 和 M_j 表示,称为框架 j 在整体坐标系中的内力分量向量,用 $\{Q_j\}$ 表示。它们之间的坐标变换关系为

$$\{Q_j\} = [N_j] \{\bar{Q}_j\} \quad (1-1-2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \{Q_j\} &= [Q_{x_j} \quad Q_{y_j} \quad M_j]^T \\ \{\bar{Q}_j\} &= \bar{Q}_{x_j} \\ [N_j] &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_j \\ \sin \alpha_j \\ X_j^0 \sin \alpha_j - Y_j^0 \cos \alpha_j \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-2a)$$

设高度为 Z 的截面上沿整体坐标系的总内力分量为

$$\{Q\} = [Q_x \quad Q_y \quad M]^T$$

式中 Q_x 和 Q_y 分别为沿 X 和 Y 方向的总内力, M 为对坐标原点的总扭矩。

根据截面 z 的三个平衡条件,即所有薄壁筒(含剪力墙)和框架的内力分量之和应等于结构的总内力分量,则

$$\sum_{i=1}^{n_1} \{Q_i\} + \sum_{j=1}^{n_2} \{Q_j\} = \{Q\} \quad (1-1-3)$$

式中 n_1 ——薄壁筒(含剪力墙)的数目;

n_2 ——框架的数目。

将式(1-1-1)和式(1-1-2)代入式(1-1-3),得

$$\sum [N_i] \{\bar{Q}_i\} + \sum [N_j] \{\bar{Q}_j\} = \{Q\} \quad (1-1-4)$$

上式就是此结构的力的平衡条件。

3. 各构件力与位移的关系

首先讨论薄壁筒(含剪力墙)。薄壁筒为薄壁杆,有两个方向的弯曲和扭转^①。设薄壁杆*i*在局部坐标系中截面剪切中心处的三个位移分量分别为 \bar{u}_i 、 \bar{v}_i 、 $\bar{\theta}_i$,其中 \bar{u}_i 为 \bar{x}_i 方向的位移, \bar{v}_i 为 \bar{y}_i 方向的位移, $\bar{\theta}_i$ 为扭转角,则有下述力与位移的关系式:

$$\left. \begin{aligned} EI_{y_i} \frac{d^3 \bar{u}_i}{dz^3} &= -\bar{Q}_{x_i} \\ EI_{x_i} \frac{d^3 \bar{v}_i}{dz^3} &= -\bar{Q}_{y_i} \\ EI_{\omega_i} \frac{d^3 \bar{\theta}_i}{dz^3} - GI_{t_i} \frac{d \bar{\theta}_i}{dz} &= -\bar{M}_i \end{aligned} \right\} \quad (1-1-5)$$

式中 I_{y_i} 、 I_{x_i} ——杆*i*截面对 \bar{y}_i 轴和 \bar{x}_i 轴的惯性矩,

I_{ω_i} ——杆*i*截面的扇形惯性矩,

I_{t_i} ——杆*i*截面的抗(纯)扭惯性矩,

z ——纵坐标,因在局部坐标系中与整体坐标系中纵坐标是一样的,故上面没有加横线“—”,即 $\bar{z}=Z=z$ 。

式(1-1-5)中的前两式是两个方向弯曲时的力与位移关系式,后一式是约束扭转时的力与位移的关系。

式(1-1-5)可写成如下矩阵形式:

$$[D_{i1}]\{\bar{u}_i'''\} - [D_{i2}]\{\bar{u}_i'\} = -\{\bar{Q}_i\} \quad (1-1-6)$$

式中 撇“'”表示对 z 微分,

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{u}_i\} &= [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i]^T \\ [D_{i1}] &= \begin{bmatrix} EI_{y_i} & 0 & 0 \\ 0 & EI_{x_i} & 0 \\ 0 & 0 & EI_{\omega_i} \end{bmatrix} \\ [D_{i2}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GI_{t_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-6a)$$

其次讨论框架。设第*j*榀框架沿局部坐标系 \bar{x}_i 方向的位移为 \bar{u}_i ,框架的层剪切刚度为 c_{tj} ,则有

$$\bar{Q}_{x_i} = c_{tj} \frac{d\bar{u}_i}{dz}$$

或写成

$$\{\bar{Q}_i\} = [D_{Fj}]\{\bar{u}_i'\} \quad (1-1-7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{u}_i\} &= \bar{u}_i \\ [D_{Fj}] &= c_{tj} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-7a)$$

4. 用整体位移表示的平衡方程

^① 可参阅包世华、周坚编《薄壁杆件结构力学》,中国建筑工业出版社,1990年;或文献[1]的第一版第七章§7-2、7-3。本书将直接引用其结果。

设在整体坐标系中沿整体坐标轴 X 方向的位移为 u , 沿坐标轴 Y 方向的位移为 v , 绕 Z 轴的转角为 θ , 并用它们作为我们计算的基本未知量, 表为

$$\{u\} = [u \quad v \quad \theta]^T \quad (1-1-8)$$

因为在局部坐标系和整体坐标系两种坐标系的坐标变换关系中, 位移之间的变换关系与力之间的变换关系是完全一样的。所以, 用式(1-1-1)的类似关系, 可求出薄壁筒在局部坐标系和整体坐标系之间的位移变换关系为:

$$\{\bar{u}_i\} = [N_i]^T \{u\} \quad (1-1-9)$$

用式(1-1-2)的类似关系, 可求出框架在局部坐标系和整体坐标系间的位移变换关系为

$$\{\bar{u}_j\} = [N_j]^T \{u\} \quad (1-1-10)$$

将式(1-1-9)、式(1-1-10)分别代入式(1-1-6)、式(1-1-7), 可得整体坐标位移 $\{u\}$ 表示的内力分量 $\{\bar{Q}_i\}$ 、 $\{\bar{Q}_j\}$ 。再将此 $\{\bar{Q}_i\}$ 和 $\{\bar{Q}_j\}$ 代入式(1-1-4)的平衡条件, 经整理后, 可得整体位移 $\{u\}$ 表示的平衡方程如下:

$$[A]\{u'''\} - [B]\{u'\} = -\{Q\} \quad (1-1-11)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} [A] &= \sum_{i=1}^{n_1} [N_i][D_i][N_i]^T \\ [B] &= \sum_{i=1}^{n_1} [N_i][D_i][N_i]^T + \sum_{i=1}^{n_2} [N_i][D_{Fi}][N_i]^T \end{aligned} \right\} (1-1-11a)$$

矩阵 $[A]$ 和 $[B]$ 均为 3×3 阶的方阵, 其中的各元素如下:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= E \sum_{i=1}^{n_1} (I_{y_i} \cos^2 \alpha_i + I_{x_i} \sin^2 \alpha_i) \\ a_{12} = a_{21} &= E \sum_{i=1}^{n_1} (I_{y_i} - I_{x_i}) \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i \\ a_{13} = a_{31} &= E \sum_{i=1}^{n_1} [(X_i^0 \sin \alpha_i - Y_i^0 \cos \alpha_i) I_{y_i} \cos \alpha_i \\ &\quad - (X_i^0 \cos \alpha_i + Y_i^0 \sin \alpha_i) I_{x_i} \sin \alpha_i] \\ a_{22} &= E \sum_{i=1}^{n_1} (I_{y_i} \sin^2 \alpha_i + I_{x_i} \cos^2 \alpha_i) \\ a_{23} = a_{32} &= E \sum_{i=1}^{n_1} [(X_i^0 \sin \alpha_i - Y_i^0 \cos \alpha_i) I_{y_i} \sin \alpha_i \\ &\quad + (X_i^0 \cos \alpha_i + Y_i^0 \sin \alpha_i) I_{x_i} \cos \alpha_i] \\ a_{33} &= E \sum_{i=1}^{n_1} [(X_i^0 \sin \alpha_i - Y_i^0 \cos \alpha_i)^2 I_{y_i} \\ &\quad + (X_i^0 \cos \alpha_i + Y_i^0 \sin \alpha_i)^2 I_{x_i} + I_{\omega_i}] \end{aligned} \right\} (1-1-11b)$$

$$b_{11} = \sum_i c_{r_i} \cos^2 \alpha_i,$$

$$b_{12} = b_{21} = \sum_i c_{r_i} \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i,$$

$$b_{13} = b_{31} = \sum_i c_{r_i} (X_i \sin \alpha_i - Y_i \cos \alpha_i) \cos \alpha_i,$$

$$b_{22} = \sum_i c_{r_i} \sin^2 \alpha_i,$$

$$b_{23} = b_{32} = \sum_i c_{r_i} (X_i \sin \alpha_i - Y_i \cos \alpha_i) \sin \alpha_i,$$

$$b_{33} = \sum_i c_{r_i} (X_i \sin \alpha_i - Y_i \cos \alpha_i)^2 + \sum_i G I_{t_i}$$

将式(1-1-11)两边对 z 微分一次,并令

$$\{q\} = [q_x \quad q_r \quad m]^T = -[Q_x' \quad Q_r' \quad M']^T$$

得

$$[A]\{u''''\} - [B]\{u''\} = \{q\} \quad (1-1-12)$$

这就是用整体坐标位移 $\{u\}$ 表示的平衡方程。 $\{q\}$ 的三个分量, q_x, q_r 分别为沿 X, Y 方向的水平荷载, m 为绕 Z 轴的扭矩。

式(1-1-12)是一组三元四阶的常系数微分方程, 式中 $[A], [B]$ 均为对称矩阵。这就是框架-剪力墙-薄壁筒弯扭耦连协同工作的基本方程。

三、基本方程的解

直接求解式(1-1-12)的三元四阶微分方程组是很困难的。通过坐标变换, 使其正则化, 变为在正则坐标系下的三个独立的微分方程。这样就很容易求解。

由于矩阵 $[A]$ 和 $[B]$ 都是非负定的实对称矩阵, 广义特征值问题

$$|\mu[A] - [B]| = 0 \quad (1-1-13)$$

必有三个非负实特征值, 分别记为 $\mu_1^2 \geq 0, \mu_2^2 \geq 0, \mu_3^2 \geq 0$, 相应的三个特征向量记为 $\{C_1\}, \{C_2\}$ 和 $\{C_3\}$, 它们所构成的广义正交矩阵为 $[C]$, 即

$$[C] = [\{C_1\} \quad \{C_2\} \quad \{C_3\}]$$

令

$$\{u\} = [C]\{\bar{u}\} \quad (1-1-14)$$

将式(1-1-14)代入基本方程式(1-1-12), 然后在方程两边同时前乘矩阵 $[C]^T$, 可得

$$[P]\{\bar{u}''''\} - [Q]\{\bar{u}''\} = [C]^T\{q\} \quad (1-1-15)$$

式中

$$\begin{aligned} [P] &= [C]^T[A][C] \\ [Q] &= [C]^T[B][C] \end{aligned} \quad (1-1-15a)$$

这里 $[P]$ 和 $[Q]$ 都是对角矩阵。

将式(1-1-15)两边同时前乘 $[P]^{-1}$,得

$$\{\tilde{u}''''\} - [\mu^2]\{\tilde{u}''\} = \{\tilde{q}\} \quad (1-1-16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} [\mu^2] &= \begin{bmatrix} \mu_1^2 & & \\ & \mu_2^2 & \\ & & \mu_3^2 \end{bmatrix} = [P]^{-1}[Q] \\ \{\tilde{q}\} &= [P]^{-1}[C]^T\{q\} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-16a)$$

且 $\mu_l^2 (l=1,2,3)$ 为广义特征值问题即式(1-1-13)的三个特征值。

为了计算方便,引入无量纲坐标

$$\xi = \frac{z}{H} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (1-1-17)$$

式中 H ——结构的总高度。

并设

$$[\lambda^2] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = H^2[\mu^2] \quad (1-1-17a)$$

引用式(1-1-17)和式(1-1-17a)的关系后,式(1-1-16)可变为

$$\left\{ \frac{d^4 \tilde{u}(\xi)}{d\xi^4} \right\} - [\lambda^2] \left\{ \frac{d^2 \tilde{u}(\xi)}{d\xi^2} \right\} = H^4 \{\tilde{q}(\xi)\} \quad (1-1-18)$$

由于矩阵 $[\lambda^2]$ 为对角矩阵,所以式(1-1-18)表示三个相互独立的微分方程。

式(1-1-18)中第 $l(l=1,2,3)$ 个方程的一般解可表示为

$$\tilde{u}_l(\xi) = A_l \operatorname{sh} \lambda_l \xi + B_l \operatorname{ch} \lambda_l \xi + C_l \xi + D_l + \tilde{u}_l^*(\xi) \quad (1-1-19)$$

式中 $\tilde{u}_l^*(\xi)$ 为方程式(1-1-18)的特解, A_l, B_l, C_l, D_l 为任意常数,由边界条件来确定。

对于本问题,边界条件为

$$(1) \text{ 当 } \xi = 0 \text{ 时, } \left. \begin{aligned} \tilde{u}_l(\xi) &= 0 \\ \frac{d\tilde{u}_l(\xi)}{d\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-20)$$

(2) 当 $\xi = 1$ 时,

若顶部无集中荷载,则

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}_l(\xi)}{d\xi^2} &= 0 \\ \frac{d^3 \tilde{u}_l(\xi)}{d\xi^3} - \lambda_l^2 \frac{d\tilde{u}_l(\xi)}{d\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-21)$$

若顶部有集中荷载 \tilde{P}_l 时,则

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}_l(\xi)}{d\xi^2} &= 0 \\ \frac{d^3 \tilde{u}_l(\xi)}{d\xi^3} - \lambda_l^2 \frac{d\tilde{u}_l(\xi)}{d\xi} &= -H^3 \tilde{P}_l \end{aligned} \right\} \quad (1-1-22)$$

利用上述边界条件可求出四个任意常数,进而可由此求出薄壁筒和剪力墙的内力和框架

的内力。

四、三种典型荷载作用下的计算公式和图表

1. 顶部集中荷载

设结构在顶部沿整体坐标方向承受集中荷载 $\{P\} = [P_x, P_y, M]^T$ ，则在斜交正则坐标系下的荷载向量为

$$\{\tilde{P}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_3 \end{Bmatrix} = [P]^{-1} [C]^T \{P\}$$

注意到在集中荷载作用下，式(1-1-18)的第 l 个方程的特解为 $\tilde{u}_l^*(\xi) = 0$ 。由通解式(1-1-19)和边界条件式(1-1-20)和式(1-1-22)，可以求得第 l 个方程的解为

$$\tilde{u}_l(\xi) = \frac{\tilde{P}_l H^3}{\lambda_l^3} \left[\frac{\text{sh} \lambda_l}{\text{ch} \lambda_l} (\text{ch} \lambda_l \xi - 1) - \text{sh} \lambda_l \xi + \lambda_l \xi \right]$$

经整理后，方程式(1-1-18)的解可以写成

$$\{\tilde{u}(\xi)\} = [\tilde{u}(H)] \{F_u(\xi)\} \quad (1-1-23)$$

的形式。其中 $[\tilde{u}(H)]$ 为一对角矩阵，各对角元素表示单独由组合悬臂杆承受荷载时顶部的最大位移， $\{F_u(\xi)\}$ 为位移的计算系数向量。

对于顶部承受集中荷载的情况，

$$[\tilde{u}(H)] = \frac{H^3}{3} [\tilde{P}] \quad (1-1-24)$$

式中

$$[\tilde{P}] = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & & \\ & \tilde{P}_2 & \\ & & \tilde{P}_3 \end{bmatrix} \quad (1-1-24a)$$

$$\{F_u(\xi)\} = [F_{u1}(\xi) \quad F_{u2}(\xi) \quad F_{u3}(\xi)]^T \quad (1-1-25)$$

式中

$$F_{ui}(\xi) = \frac{3}{\lambda_i^3} \left[\frac{\text{sh} \lambda_i}{\text{ch} \lambda_i} (\text{ch} \lambda_i \xi - 1) - \text{sh} \lambda_i \xi + \lambda_i \xi \right] \quad (1-1-26)$$

求出 $\{\tilde{u}(\xi)\}$ 以后，可以由式(1-1-9)、式(1-1-10)所示的坐标变换关系求得在局部坐标系下各构件的相应位移，再由力与位移间的关系式求得内力。

(1) 位移计算公式

对第 i 个薄壁筒或剪力墙，由式(1-1-9)和式(1-1-14)可得

$$\{\tilde{u}_i\} = [N_i]^T [C] \{\tilde{u}\} = [\tilde{u}_i(H)] \{F_u(\xi)\} \quad (1-1-27)$$

式中

$$[\tilde{u}_i(H)] = \frac{H^3}{3} [N_i]^T [C] [\tilde{P}] \quad (1-1-27a)$$

这是一个 3×3 的矩阵，其中元素 $\tilde{u}_{i,kl}(H)$ 表示当荷载 \tilde{P}_l 单独由组合悬臂杆承担时，第 i 个构件沿 k 方向所产生的顶部位移。

对第 j 榀框架: 公式同上, 只需将其中下标 i 换成 j 即可。

这里求得的位移计算系数式(1-1-26)与文献[1]中框架-剪力墙中的位移系数公式是一样的。因此, 可用同样的图表曲线查得位移计算系数。根据式(1-1-26)绘制的图表曲线 $F_{\omega}(\xi)$ 见本节后面附的图表 1-1。

(2) 内力计算公式

对薄壁筒或剪力墙: 对第 i 个薄壁筒(或剪力墙), 按局部坐标所示的右手坐标系, 其弯矩、双力矩与位移之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{y_i} &= EI_{y_i} \bar{u}_i'' \\ \bar{M}_{x_i} &= -EI_{x_i} \bar{v}_i'' \\ \bar{B}_i &= -EI_{\omega_i} \bar{\theta}_i'' \end{aligned} \right\} \quad (1-1-28)$$

写成矩阵形式, 为

$$\{\bar{M}_i\} = [\bar{D}_i] \{\bar{u}_i''\} \quad (1-1-28 a)$$

式中

$$[\bar{D}_i] = \begin{bmatrix} EI_{y_i} & & \\ & -EI_{x_i} & \\ & & -EI_{\omega_i} \end{bmatrix}$$

将式(1-1-27)和式(1-1-25)代入式(1-1-28 a)后, 得

$$\{\bar{M}_i\} = [\bar{D}_i] [N_i]^T [C] \{\bar{u}''\} = [\bar{M}_i(0)] \{F_M(\xi)\} \quad (1-1-29)$$

式中

$$[\bar{M}_i(0)] = H [\bar{D}_i] [N_i]^T [C] [\tilde{P}] \quad (1-1-29 a)$$

这是一个 3×3 的矩阵, 其中元素 $\bar{M}_{i,kl}(0)$ 表示当荷载 \tilde{P}_i 单独由组合悬臂杆承担时, 第 i 个构件绕 k 轴在底面处所产生的弯矩或双力矩。

$\{F_M(\xi)\}$ 为力矩计算系数向量, 有 3 个元素, 其第 l 个元素为

$$F_{Ml}(\xi) = \frac{1}{\lambda_l} [\text{th } \lambda_l \text{ch } \lambda_l \xi - \text{sh } \lambda_l \xi] \quad (1-1-30)$$

这里求得的力矩计算系数式(1-1-30)与文献[1]中框架-剪力墙中的弯矩系数公式相同, 因此, 可用同样的图表曲线查得力矩计算系数。根据式(1-1-30)绘制的图表曲线 $F_M(\xi)$ 见本节后面附的图表 1-2。

剪力和扭矩可由式(1-1-6)求得

$$\begin{aligned} \{\bar{Q}_i\} &= -[D_{ii}] [N_i]^T [C] \{\bar{u}'''\} + [D_{ii}] [N_i]^T [C] \{\bar{u}'\} \\ &= -[\bar{Q}_i(0)] \{F_Q(\xi)\} + [\bar{Q}_i^*(0)] \{F_i(\xi)\} \end{aligned} \quad (1-1-31)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} [\bar{Q}_i(0)] &= [D_{ii}] [N_i]^T [C] [\tilde{P}] \\ [\bar{Q}_i^*(0)] &= [D_{ii}] [N_i]^T [C] [\tilde{P}] H^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-31 a)$$

$\{F_Q(\xi)\}$ 为剪力计算系数(应为弯曲和约束扭转产生的剪力、扭矩计算系数, 简称剪力计算系数)向量, 有 3 个元素, 其第 l 个元素为

$$F_{Q_i}(\xi) = \text{th} \lambda_i \text{sh} \lambda_i \xi - \text{ch} \lambda_i \xi \quad (1-1-32)$$

式(1-1-32)与文献[1]中框架-剪力墙中的剪力系数公式是相同的(只差一个正负号)。因此,可用同样的图表曲线查得剪力计算系数。根据式(1-1-32)绘制的图表曲线 $F_{Q_i}(\xi)$ 见本节后面附的图表 1-3。

$\{F_i(\xi)\}$ 为扭矩计算系数(应为纯扭转产生的剪力、扭转计算系数,简称扭转计算系数)向量,有 3 个元素,其第 l 个元素为

$$F_{i_l}(\xi) = \frac{1}{\lambda_l^2} (\text{th} \lambda_l \text{sh} \lambda_l \xi - \text{ch} \lambda_l \xi + 1) \quad (1-1-33)$$

扭矩计算系数在框架-剪力墙中是没有的。根据式(1-1-33)绘制出图表曲线 $F_i(\xi)$ 见本节后面附的图表 1-4。

对框架,对第 j 榀框架,由式(1-1-7)和式(1-1-27)可求得

$$\{\bar{Q}_j(\xi)\} = [\bar{Q}_j(0)] \{F_j(\xi)\} \quad (1-1-34)$$

式中

$$[\bar{Q}_j(0)] = [D_{F_j}] [N_j]^T [C] [\bar{P}] \quad (1-1-34 a)$$

应指出,框架用局部坐标系表示的内力分量实际上只有一项 \bar{Q}_{x_j} , 故上式求得的结果也只有此一项。

2. 均布荷载

均布荷载作用下各个构件的位移和内力计算公式可用与前面类似的方法求出。下面直接给出相应的结果。

设结构沿整体坐标系承受均布荷载:

$$\{q\} = [q_x \quad q_r \quad m]^T$$

在正则坐标系下的荷载分量为

$$\{\bar{q}\} = [\bar{q}_1 \quad \bar{q}_2 \quad \bar{q}_3]^T = [P]^{-1} [C]^T \{q\} \quad (1-1-35)$$

设

$$[\bar{q}] = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{bmatrix} \quad (1-1-35 a)$$

则第 i 个薄壁筒或剪力墙的位移计算公式为

$$\{\bar{u}_i\} = [\bar{u}_i(H)] \{F_u(\xi)\} \quad (1-1-36)$$

式中

$$[\bar{u}_i(H)] = \frac{H^4}{8} [N_i]^T [C] [\bar{q}], \text{简称单独组合悬臂杆受载时的顶部位移,}$$

$\{F_u(\xi)\}$ 为位移的计算系数向量,有 3 个元素,其第 l 个元素为

$$F_{u_l}(\xi) = \frac{8}{\lambda_l^4} \left[\frac{1 + \lambda_l \text{sh} \lambda_l}{\text{ch} \lambda_l} (\text{ch} \lambda_l \xi - 1) - \lambda_l \text{sh} \lambda_l \xi + \lambda_l^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) \right] \quad (1-1-36 a)$$

上式与文献[1]中的位移计算系数是相同的。根据式(1-1-36 a)绘制的图表曲线 $\bar{F}_M(\xi)$ 见本节后面附的图表 1-5。

第 i 个薄壁筒或剪力墙的弯矩和双力矩的计算公式为

$$\{\bar{M}_i\} = [\bar{M}_i(0)]\{F_M(\xi)\} \quad (1-1-37)$$

式中

$$[\bar{M}_i(0)] = \frac{H^2}{2} [\bar{D}_i][N_i]^T[C][\tilde{q}], \text{ 简称单独组合悬臂杆受载时的底部力矩;}$$

$\{F_M(\xi)\}$ 为力矩计算系数向量, 有 3 个元素, 其第 l 个元素为

$$F_{M_l}(\xi) = \frac{2}{\lambda_l^3} \left[\frac{1 + \lambda_l \operatorname{sh} \lambda_l}{\operatorname{ch} \lambda_l} \operatorname{ch} \lambda_l \xi - \lambda_l \operatorname{sh} \lambda_l \xi - 1 \right] \quad (1-1-38)$$

上式与文献[1]中弯矩计算系数是相同的。根据式(1-1-38)绘制的图表曲线 $F_M(\xi)$ 见本节后面附的图表 1-6。

第 i 个薄壁筒或剪力墙的剪力和扭矩的计算公式为

$$\{\bar{Q}_i\} = -[\bar{Q}_i(0)]\{F_Q(\xi)\} + [\bar{Q}_i^*(0)]\{F_T(\xi)\} \quad (1-1-39)$$

式中

$$[\bar{Q}_i(0)] = H[D_i][N_i]^T[C][\tilde{q}] \quad (1-1-39 a)$$

$\{F_Q(\xi)\}$ 为剪力计算系数向量, 有 3 个元素, 其第 l 个元素为

$$F_{Q_l}(\xi) = \frac{1}{\lambda_l} \left[\frac{1 + \lambda_l \operatorname{sh} \lambda_l}{\operatorname{ch} \lambda_l} \operatorname{sh} \lambda_l \xi - \lambda_l \operatorname{ch} \lambda_l \xi \right] \quad (1-1-40)$$

上式与文献[1]中剪力计算系数只差一个正负号。根据式(1-1-40)绘制的图表曲线 $F_Q(\xi)$ 见本节后面附的图表 1-7。

$$[\bar{Q}_i^*(0)] = H^3[D_{ii}][N_i]^T[C][\tilde{q}] \quad (1-1-41)$$

$\{F_T(\xi)\}$ 为扭矩计算系数向量, 有 3 个元素, 其第 l 个元素为

$$F_{T_l}(\xi) = \frac{1}{\lambda_l^3} \left[\frac{1 + \lambda_l \operatorname{sh} \lambda_l}{\operatorname{ch} \lambda_l} \operatorname{sh} \lambda_l \xi - \lambda_l \operatorname{ch} \lambda_l \xi + \lambda_l (1 - \xi) \right] \quad (1-1-42)$$

据此式绘制的图表曲线 $F_T(\xi)$, 见本节后面附的图表 1-8。

第 j 榀框架的剪力计算公式为

$$\{\bar{Q}_j(\xi)\} = [\bar{Q}_j(0)]\{F_j(\xi)\} \quad (1-1-43)$$

式中

$$[\bar{Q}_j(0)] = H^3[D_{jj}][N_j]^T[C][\tilde{q}] \quad (1-1-43 a)$$

3. 倒三角形分布荷载

计算方法与集中荷载类似, 下面直接给出相应的结果。

设结构沿整体坐标系承受倒三角形分布荷载:

$$\{\tilde{q}(\xi)\} = \frac{Z}{H} \{\tilde{q}^0\} = \xi \{\tilde{q}^0\}$$

式中

$$\{\tilde{q}^0\} = [\tilde{q}_1^0 \quad \tilde{q}_2^0 \quad \tilde{q}_3^0]^T = [P]^{-1}[C]^T\{q^0\} \quad (1-1-44)$$