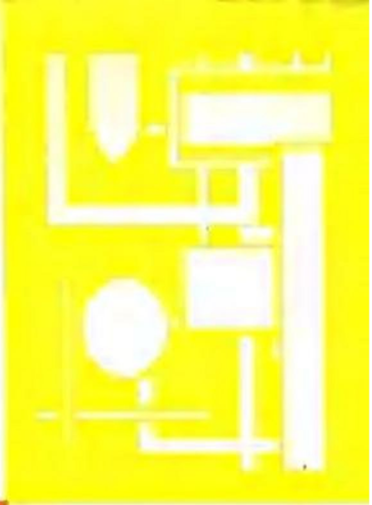
宏观经济模型的解析

潘介人 编



HONGGUAN JINGJI MOXING DE JIEXI

上海交通大学出版社

宏观经济模型的解析

潘介[illegible] 编

上海交通大学出版社

(沪)新登字205号

内 容 提 要

本书内容包括两部分，其一是非随机宏观经济模型的解析，就某些典型的宏观经济模型介绍其静态和动态的分析方法；另一部分是随机宏观经济分析的导论，因为目前这方面的解析还不像前者那样已形成一个完整的体系，故冠以"导论"两字。不管是随机的还是非随机的，本书的叙述着重从数学角度来阐明经济发展中诸关键性变量彼此之间所存在的联系，或变量未来之值基于当前和过去之值的预测。

本书是数理经济这门新兴学科的一部分，因此涉及多方面的数学基础，其中包括泛函分析的部分内容。故在书末有一章附录，供读者参考。

本书适于经济管理、决策和研究工作者之用，也可以作为硕士课程的教学用书。

宏观经济模型的解析

出版：上海交通大学出版社

（上海市华山路1954号　邮政编码：200030）

发行：新华书店上海发行所　　印刷：常熟文化印刷厂

开本：850×1168(毫米)1/32　　印张：9.5　字数：255000

版次：1995年9月　第1版　　印次：1995年10月　第1次

印数：1－800

ISBN 7-313-01525-9/F·098　　定　价：7.10元

序　言

模型是一个理论最终的体现，它能够把这个理论完善地表达出来。经典的牛顿运动定律也是一个模型，它只用一个简单的公式表述了这一理论的内涵，即 $F=ma$，其中F代表力，m是质量，a是加速度。可是经济现象要复杂得多，它牵涉到许许多多变量，有的是内生变量，有的是外生变量，因此它的模型决不是能够用一个公式来表达的，它往往包含一组方程，每个方程都表明某些关键性的变量之间的关系。而且，事物总是处于运动的过程中，甚至还带有随机性。因此本书的内容就要涉及随机的和非随机的两大部分。非随机的分析总比随机的简单得多，故在一定的意义上说，它的理论、方法和模型就比较完整。随机的分析则不然，所以它目前还处于发展的阶段。为此，在本书中关于随机的分析只能作一般性的概述。

上面讲到了内生变量和外生变量，它们究竟怎样来区分呢？所谓内生变量即是在理论中所阐述的变量，而外生变量则是那些影响理论中的内生变量但它本身却由理论外部的因素来决定的变量。举个例子来说，天气的好坏要影响谷物的供应，而供应的多寡要影响谷物的价格，但反过来，价格决不会影响气候。故在经济理论中，价格是一个内生变量，天气是一个外生变量。

本书是《宏观经济分析》的续编。在《宏观经济分析》一书中，我们没有计及时间的因素。例如在 $Y=C+I+G$ 等式中，我们只是简单地称Y为产出，C是消费，I为投资，G为政府采购。可是在本书中，Y、C、I、G 都是作为时间的函数而考虑的，它们要称之为单位时间的产出、消费、投资和政府采购。正是因为引进了时间概念，所以很多变量关于时间均非一个连续函数，尤其是物价p

更为明显。但是它们决不可能在一个瞬间出现“三级跳”之类的现象，因此它们的右导数是连续的，并假定它们在时轴上的任一点都有一阶甚至是高阶的右导数。为此，当我们研究非随机型宏观经济模型的解析时，必须对微分的某些概念，其运算的法则和某些定理有深刻的理解。为了使读者易于掌握，在本书中也常常以注释的形式出现。但是在分析随机宏观经济模型时还需要有更加深入的数学基础。

当前，我国正处于改革开放进一步深化的时期，关于建立具有中国特色的社会主义市场经济的体系也正在阔步前进。但什么是具有中国特色的社会主义市场经济体系?它的模式如何?这个问题当有待于广大经济工作者不断深入研究和实践，并最终确立其完整的模型。对此，作者拟先行未雨绸缪，收集发达国家的各种经济模型作为我国建模的借鉴和参考。这就是编写本书目的之所在。

本书基本上取材于THOMAS J. SARGENT的*Macroeconomic Theory*, Academic Press, New York, 1979。其他参考文献资料均以[ ]中的数码在书末加以说明。

考虑到学习《宏观经济模型的解析》必须具有良好的数学基础，而第Ⅱ篇中常用的线性算子和射影恐怕不为广大读者熟悉，故在书末增添一章附录:“泛函分析概要”以资参考。

笔者学识、经验均所欠缺，书中讹谬之处当可想见，敬祈读者不吝指正。

编者

1995年6月

目　录

序言……………………………………………………………… I
第 I 篇　非随机型宏观分析…………………………………… 1
第 1 章　经典模型…………………………………………… 5
§1.1　厂商……………………………………………………… 5
§1.2　家庭拥有的资产………………………………………10
§1.3　政府……………………………………………………15
§1.4　家庭……………………………………………………15
§1.5　劳动力的供应…………………………………………17
§1.6　完整的模型……………………………………………18
§1.7　稳定性…………………………………………………28
§1.8　$M+B\neq 0$ 的模型 ……………………………………31
§1.9　$\pi=\dot{p}/p$ 的模型 ………………………………………33
§1.10　可处理收入的另一种定义 ……………………………40
第 2 章　凯恩斯模型…………………………………………45
§2.1　一般分析………………………………………………45
§2.2　稳定性…………………………………………………53
§2.3　成本推动型及需求拉动型的通货膨胀………………58
§2.4　$(M+B)\pi\neq 0$ 的模型…………………………………61
§2.5　再论经典模型…………………………………………62
§2.6　在经典模型中关于财富、储蓄和利率等的枝节问题……………………………………………………65
§2.7　凯恩斯经济学和瓦腊斯定律…………………………68
第 3 章　托平的动态综合供应模型…………………………71
§3.1　厂商的最优化问题……………………………………72

§3.2　作为一个特殊的有两种成份的模型的解释…………81
§3.3　投资和储蓄……………………………………87
第 4 章　凯恩斯模型的动态分析……………………88
§4.1　具有适应性期望的模型…………………………89
§4.2　$\pi = Dp/p$ 的模型 ……………………………97
第 5 章　投资计划 ……………………………………104
§5.1　成本变动的模型 ………………………………104
§5.2　另一种推导 ……………………………………109
第 II 篇　随机宏观经济学导论 ……………………112
第 6 章　差分方程与滞后算子 ……………………112
§6.1　滞后算子 ………………………………………113
§6.2　二阶差分方程 …………………………………120
§6.3　二阶差分方程(等根) …………………………127
§6.4　n 阶差分方程(相异根) ………………………130
§6.5　n 阶差分方程(n 个等根)……………………132
§6.6　一阶系统的一个示例 …………………………133
§6.7　二阶系统的一个示例 …………………………136
§6.8　一个优化的示例：求解欧拉方程组……………138
第 7 章　线性最小二乘方射影(回归分析) ………144
§7.1　最小二乘方回归：正交性条件…………………144
§7.2　递归射影 ………………………………………147
§7.3　迭代射影定律 …………………………………150
§7.4　信号萃取问题 …………………………………151
第 8 章　线性随机差分方程 ………………………152
§8.1　初步概念 ………………………………………153
§8.2　交叉协方差函数 ………………………………159
§8.3　谱 ………………………………………………163
§8.4　交叉谱 …………………………………………171
§8.5　斯勒茨基效应与库兹涅茨变换 ………………178

§8.6 商业循环的另一个定义 ……………………………182
§8.7 表示理论 ……………………………………………186
§8.8 线性最小二乘方预测 ………………………………192
§8.9 推导一个移步平均表示 ……………………………197
§8.10 预测的连锁法则……………………………………199
§8.11 合理期望模型的应用………………………………200
§8.12 向量随机差分方程…………………………………203
§8.13 最优滤波公式………………………………………208
§8.14 多变量预测公式……………………………………210
第 9 章 消费函数 ………………………………………212
§9.1 关于哈维尔莫问题 …………………………………214
§9.2 层面分析 ……………………………………………216
§9.3 时间序列 ……………………………………………222
§9.4 模型的模拟 …………………………………………228
第 10 章 不确定情况下的投资……………………………231
§10.1 在二次型目标函数下的最优决策规则……………231
§10.2 最优线性政策………………………………………237
§10.3 投资…………………………………………………237
§10.4 关于均衡和最优性之间的关系……………………241
§10.5 在不确定情况下的投资……………………………242
§10.6 税收的作用…………………………………………243
第 11 章 最优金融政策……………………………………245
§11.1 卢卡斯模型…………………………………………247
§11.2 具有不变期望的最优控制…………………………253
§11.3 信息变量问题………………………………………260
§11.4 在合理期望下的最优控制…………………………263
§11.5 论据偏向于哪种观点？ ……………………………266
§11.6 金融当局该不该使用利率或货币作为它的
工具？ ………………………………………………267

第 12 章　附录:泛函分析概要 ……………………………270
§12.1　定义……………………………………………………270
§12.2　希尔伯特空间的基本性质………………………………272
§12.3　赋范线性空间上的线性算子……………………………283
参考文献 ……………………………………………………291

第Ⅰ篇　非随机型宏观分析

本篇对某些标准的宏观经济模型介绍其静态和动态的分析方法。所谓**静态分析**，是指发生在时轴上某一点的事件的分析。实际上，静态分析是研究时轴上各选定点的平衡值，即瞬时平衡值。它的内涵是一组内生变量使之与我们所考虑的那个特定时刻的外生变量诱发出来的各种可能的环境联系起来。内生变量是由该模型本身来确定的变量，而外生变量则是模型外部给定的变量。

动态分析的任务是要研究内生变量的时间历程，并且和外生变量可能的时间过程联系起来。因此在动态分析中，我们要随着时间的推移来研究模型的举止。和静态分析截然不同的是，在静态分析中，我们只注意瞬时发生的事件。

另有一种叫**固定状态**(stationary state)的分析，它是动态分析的一种限定形式，旨在建立某些内生变量(例如资金—产出比)随着时间无限推移，并随着某些临界的内生变量全程（指时间过程）保持不变的最终趋向。我们千万不要把固定状态的分析同静态分析混为一谈。

静态分析最显著的特点就是它能够确定内生变量的各种值，只要把在此时刻的外生变量之值取为已知即可。事实上，有些内生变量和外生变量的值在前阶段都已求得了，因此在目前就作为给定的或预先确定了的值。我们还将看到，有些模型做动态分析是简单可行的，但是做静态分析就不行了。为了要做静态试验，必须部分地把现在的事件跟将来的事件脱离开来，俾使将来发生的事件不影响目前发生的事件。

通常模型不外乎包含由 n 个内生变量，即 $y_i(t)$，$i=1, \cdots, n$，和 m 个外生变量 $x_i(t)$ $(i=1, \cdots, m)$ 所构成的 n 个**结构方程**

$$g_i(y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t), x_1(t), \cdots, x_m(t)) = 0,$$
$$i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

每个结构方程概括了模型的经济行为，它在平衡条件，并且构成了模型的一个“组块”。往往在任何一个给定的结构方程中不止一个，甚至可能是全部 n 个内生变量都会得出现．而且我们还认为方程组(1)在时轴 t 上的每一点都是成立的。

外生变量 $x_i(t)$ $(i=1, \cdots, m)$ 被认为是时间 t 的右连续函数，并且还进一步假定它在时轴的所有点上具有至少是一阶，有时甚至是高阶的右导数。所谓函数 $x_i(t)$ 的右连续是指

$$\lim_{t\to\bar{t},\, t>\bar{t}} x_i(t) = x_i(\bar{t}),$$

然而函数 $x_i(t)$ 可能在 $\bar{t}$ 点跳跃，因而我们并不要求

$$\lim_{t\to\bar{t},\, t<\bar{t}} x_i(t) = x_i(\bar{t})。$$

举个例来说，考虑函数(见图 1)

$$x_i(t) = \begin{cases} 0, & t<\bar{t}, \\ 1, & t\geqslant\bar{t}。\end{cases}$$

虽然它在 $\bar{t}$ 点跳跃(不连续)，但它在各点都是右连续的。

函数 $x_i(t)$ 对时间 t 的右导数假定它处处存在，并且定义为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i(t) = \lim_{t\to\bar{t},\, t>\bar{t}} \frac{x_i(t) - x_i(\bar{t})}{t-\bar{t}}。$$

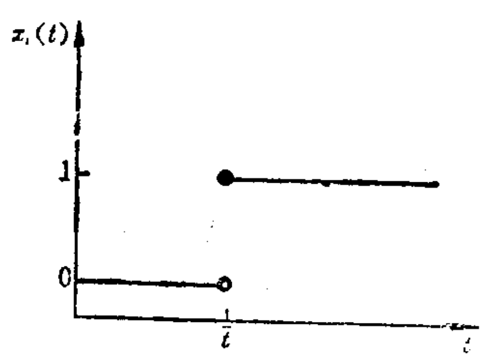


图 1　函数 $x_i(t)$ 的右连续

对图 1 中画出的函数来说，虽然函数在 $t=\bar{t}$ 跳跃，从而也就是不可微的，但是它的右导数处处都等于 0。

如果内生变量设定值能够保证方程(1)统统得到满足，那么我们就说，一个模型就在这一特定时刻处于静态平衡。要注意的是，平衡的这个定义并不含有内生

变量之值在时间过程中没有改变的意思。正好相反，因为外生变量之值通常都以单位时间内某个变率在改变着，故而内生变量也一直在变更。

静态分析的目标是要回答下述问题，假定一个外生变量 $x_i(t)$ 在时刻 $\bar{t}$ 有一个小的跳跃，从而使得

$$\lim_{t\to\bar{t}\ t<\bar{t}} x_i(t) \neq x_i(\bar{t}),$$

此时的问题就是要确定内生变量在时刻 $\bar{t}$ 的反响如何。内生变量显著的特征是：它们之中每一个都被认为能够在任何时刻作间断的跳跃，以便保证方程组(1)即使在面临 $x_i(t)$ 跳跃的情况下还是得到满足。因此就静态的观点来说，作为一个内生变量，它必须能作出瞬时的改变。请注意，虽然变量本身必须作连续的变化，但是它对时间的右导数却能够间断地跳跃，图2即直观地说明了这个问题。考察经典模型与凯恩斯模型之间的差异的一种方法，就是在经典模型中，货币工资是静态分析中的一个内生变量，而在凯恩斯模型中，货币工资对时间的右导数是一个内生变量，但货币工资的水平却是一个外生变量。

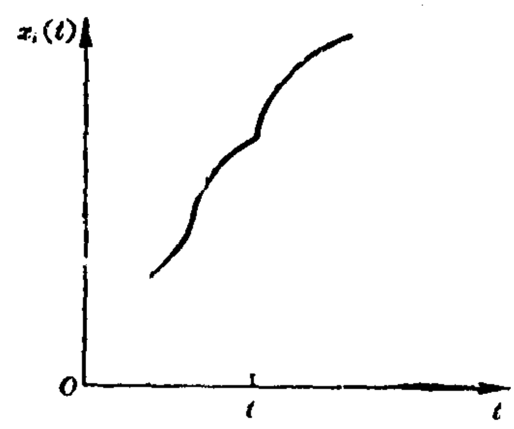


图2　$x_i(t)$连续，但其右导数在时刻 $\bar{t}$ 跳跃

为了回答静态分析中所提出的典型问题，我们一定要求得对应于方程组(1)的简化形式的方程。简化形式的方程也是一个方程组，每个方程都把一个$y_i(t)$表达成仅仅是$x_i(t)$的函数：

$$y_i(t) = h_i(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_m(t)) \qquad i=1,\ \cdots,\ n。 \tag{2}$$

通常我们总假设结构方程(1)中的函数 $g_i(\quad)$ 在各个方向都是连续可微的，几个方程在一切时刻（这里所称“一切时刻”是指“紧接着前一阶段的全部瞬间”）都得到满足，而且此时的雅可比行列式

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|=\begin{vmatrix}\partial g_1/\partial y_1 & \partial g_1/\partial y_2 & \cdots & \partial g_1/\partial y_n\\ \partial g_2/\partial y_1 & \partial g_2/\partial y_2 & \cdots & \partial g_2/\partial y_n\\ \vdots & & & \\ \partial g_n/\partial y_1 & \partial g_n/\partial y_2 & \cdots & \partial g_n/\partial y_n\end{vmatrix}$$

也不等于0。这就是说，隐函数定理的假设成立。在这些假设下，简化的形式(2)便存在连续可微的函数，当 $x_i(t)$ 充分接近它的初始值(即跳跃前之值)时，这一简化的形式是成立的。如果(2)式中的这些方程得到满足，那就保证了结构方程(1)得到满足。若在 $x_i(t)$ 点的跳跃充分小，亦即在隐函数定理认同的领域之中①，则方程(2)成立，并且可以用来回答静态分析中提出的特征问题。尤其是，简化形式的偏导数

$$\frac{\partial y_i(t)}{\partial x_j(t)}=\frac{\partial h_i}{\partial x_j(t)}(x_1(t),\ \cdots,\ x_m(t)) \tag{3}$$

就给出了 $y_i(t)$ 对 $x_j(t)$ 于时刻 t 发生跳跃的响应。通常我们对简化形式的偏导数的符号是非常感兴趣的。

除了将隐函数定理直接用来计算简化形式(2)的偏导数(3)之外，还可以很方便地用下面的方法来得到正确的答案。首先，对(1)式的各个方程微分，求得

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1+\cdots+\frac{\partial g_i}{\partial y_n}\mathrm{d}y_n+\frac{\partial g_i}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial g_i}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m=0,$$
$$i=1,\ \cdots,\ n \tag{4}$$

所有的偏导数都取 x_i 和 y_j 的初始值，然后逐次代入，从上述线性方程组(4)中消去 $\mathrm{d}y_2,\ \cdots,\ \mathrm{d}y_n$，从而便得到如同

$$\mathrm{d}y_1=f_1^1\mathrm{d}x_1+f_2^1\mathrm{d}x_2+\cdots+f_m^1\mathrm{d}x_m \tag{5}$$

这种形式的方程，其中 f_j^1 是在(4)式中出现的偏导数的函数。现在，方程(5)乃是简化形式(2)关于 y_1 的全微分。因为 $\mathrm{d}y_1$ 仅仅是 $\mathrm{d}x_1,\ \cdots,\ \mathrm{d}x_m$ 的一个函数。对(2)式的第一个方程取微分，则有

---

① 关于隐函数定理，可参阅，例如格·马·菲赫金哥尔茨著《数学分析原理》(中译本)，第二卷第一分册，P.184，§315 隐函数的存在及性质。人民教育出版社，1979

$$dy_1 = \frac{\partial h_1}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial h_1}{\partial x_m}dx_m。\tag{6}$$

因此由(5)式和(6)式便得到

$$f_j^1 = \frac{\partial h}{\partial x_{*j}}, \quad j=1, \cdots, n,$$

f_j^1 即是简化形式的偏导数。逐次代入方程组(4)中，于是就得到简化形式对其他内生变量的微分，从而使我们能够求得相应的简化形式的偏导数。在宏观经济分析中，这些偏导数就是我们经常用到的"乘子"。

第1章 经典模型

这一章叙述怎样来确定一个系统的产出率及其应用。假定该系统生产单一的商品，它在单位时间内的产出（即产出率）是 Y。这一产出率实际上就是消费率 C、投资率 I、政府的采购率 G、以及资本的折旧率 δK 的总和，

$$Y = C + I + G + \delta K。\tag{1}$$

方程(1)就是联系总产量及其构成的国民收入的恒等式。

一个系统由三部分组建而成：厂商用资本和劳动力来生产产品；国家征税并采购商品（当然，这里所指的商品也包括服务性项目在内）、发行货币及债券、并且进行公开市场买卖；家庭拥有政府货币与债券的负债以及厂商发行的股票，他们既能够作出存储的决定，也可以作出在债券、股票及货币之间分配他们的票面资产（有价证券）的决定。

§1.1 厂商

今假定经济系统由 n 个完全竞争的厂商组成，每个厂商生产同样的、单一的商品，并且受到同样的生产函数的约束。第 i 个厂商在任何时刻的产出率都用瞬时的生产函数来表述：

$$Y_i = F(K_i, N_i), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{2}$$

式中：Y_i 是第 i 个厂商单位时间内的产量；K_i 是该厂商使用的资本储备；N_i 是该厂商雇佣的职工数。每个变量 Y_i、K_i 和 N_i 都应当认为是时间的函数。这里我们略去了函数 F 右下角的脚标 i，这是因为假定所有厂商都承受同样的生产函数。生产函数的特征设想是正的，虽然资本和劳动力的边际产量受到递减的约束，而且资本(雇工)的边际产量直接依赖于雇工(资本)，即①：

$$F_K, F_N > 0, F_{KK}, F_{NN} < 0, F_{KN} > 0。$$

今假定生产函数 F 是 N_i 和 K_i 的线性齐次函数，因此

$$\lambda F(K_i, N_i) = F(\lambda K_i, \lambda N_i), \quad \lambda > 0。$$

根据齐次函数的欧拉定理，我们有

$$Y_i = \frac{\partial F}{\partial K_i}(K_i, N_i)K_i + \frac{\partial F}{\partial N_i}(K_i, N_i)N_i。$$

再由 F 的线性齐次性，有

$$\frac{\partial}{\partial K_i}F(K_i, N_i) = \frac{\partial F}{\partial(\lambda K_i)}(\lambda K_i, \lambda N_i);$$

令 $\lambda = 1/N_i$，则

$$\frac{\partial}{\partial K_i}F(K_i, N_i) = \frac{\partial}{\partial(K_i/N_i)}\left(\frac{K_i}{N_i}, 1\right)。$$

因此资本的边际产量仅取决于资本与劳动力之比。同样地，劳动力的边际产量也仅仅依赖于资本与劳动力之比。

在一个商品系统中，资本代表该商品积累起来的、有助于生产的储备(即股本)。今假定在任何时刻，无论对这个系统也好，还是对每个各别的厂商也好，资本储备固定不变。一个系统的资本固定不变，就等于说完完全全排除了外来的实质性的资金的赋予，并且也彻底排除了因天灾人祸而使资本储备减少。资本在各个时刻对每个厂商固定不变，就等于说排除了现有资金市场的存在，因为各个厂商都可以从这个市场中买卖资本(或者说放款和借贷)，从而引起他们的资本储备在某一时刻有非连续的(即离散的)变化。

① 式中 F_K、F_N、F_{KK}、F_{NN}、F_{KN} 是 F 对 K 和 N 的一阶和二阶偏导数。

不管这种假定的合理性如何，排除目前资本储备的交易乃是经典模型与凯恩斯模型的一个基本特征。这个特征使得川流不息的总需求起到一个十分重要的作用。正好相反，在托平的“动态综合模型”中(见第3章)却有一个完善的、厂商能在其中进行资本交易的市场，在决定某一时刻的产出水平中，川流不息的总需求则一点都不起作用。

当厂商在某一时刻无法进行资本交易时，我们就设想他们能够及时改变其招工计划。厂商总是在有竞争的劳务市场中运作的，在这个市场中，它们可以在任何时刻以当时的实值工资w(以元/人/单位时间来计算)雇用他们所需要的劳动力。商品在产品市场中也处于完全竞争的地位，每个厂商无论如何都可以随他自己的意愿以p的价格(以元/单位商品来计算)出售其产品。

厂商的利润Π_i定义如下：

$$\Pi_i = pF(K_i, N_i) - wN_i - (r+\delta-\pi)pK_i, \qquad (3)$$

式中：r为政府债券的即时利率，δ是资本当时的实际贬值率(即折旧率)，π是新生产出来的资本商品价格的期望增长率。在某种意义上，下面所定义的$r+\delta-\pi$就是用来界定厂商的利润恰如其份的资本成本。只要有一个资本的借贷市场存在，则$(r+\delta-\pi)p$就是以元/单位时间计算的借贷率。

每个厂商都要使他的单位时间的利润关于劳动力的雇佣成为极大，此时其股本暂时当作不变量。于是厂商的雇工便由(3)式的极大化一阶条件来表述：

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial N_i} = pF_{N_i}(K_i, N_i) - w = 0$$

即

$$F_{N_i}(K_i, N_i) = \frac{w}{p}。 \qquad (4)$$

此式说明该厂商使劳动力的边际产量与实值工资相等。公式(4)具有厂商对劳动力需求函数的性质。这个函数当给定K_i时就把厂商对雇工的需求使之与实值工资成反比的形式联系起来。对每

个厂商来说，(4)式确定了资金与劳动力之比，这个比值对所有厂商都是等同的，因为所有厂商都面临同一个实值工资。在任何时候，n 个厂商具备的资本分别是 $K_i(i=1, \cdots, n)$，不同的厂商可能有不同的 K_i。于是雇佣的劳动力就随着不同厂商的 K_i 成正比地变化。

关于各个厂商生产函数同一的假设，以及它们的产品和劳动力在完全竞争的市场面前使其利润极大化这一行为的假设都意味着存在一个综合生产函数这样一个有用的意识。在系统中一种商品总的产出率是 Y，它定义为

$$Y=\sum_{i=1}^{n} Y_i=\sum_{i=1}^{n} F(K_i, N_i)。$$

根据欧拉定理：

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i=\sum_{i=1}^{n}(F_{K_i}(K_i, N_i)K_i+F_{N_i}(K_i, N_i)N_i)。$$

但是因为资本和劳动力的边际产量仅依赖于资本对劳动力之比，并且由于这个比值对所有厂商都是一样的，故资本和劳动力的边际产量对所有厂商也分别是一样的。因此我们可以写作：

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i=F_K\left(\frac{K_i}{N_i}, 1\right)\sum_{i=1}^{n} K_i+F_N\left(\frac{K_i}{N_i}, 1\right)\sum_{i=1}^{n} N_i。$$

由于比值 K_i/N_i 对所有 n 个厂商都是一样的，所以它们必定等于系统的资本对雇工之比，即 $\sum_{i=1}^{n} K_i/\sum_{i=1}^{n} N_i$。因此有

$$Y=F_K\left(\frac{K}{N}, 1\right)K+F_N\left(\frac{K}{N}, 1\right)N,$$

式中 $K=\sum_{i=1}^{n} K_i$，$N=\sum_{i=1}^{n} N_i$。但是将欧拉定理用之于 F，上述 Y 的表达式可以写成综合生产函数

$$Y=F(K, N)。\tag{5}$$

另外，我们注意到 $\partial F/\partial N$ 等于每个厂商劳动力的边际产量，而 $\partial F/\partial K$ 则等于每个厂商资本的边际产量。这一点就使得今后的分析仅需通过综合生产函数以及实值工资和 $\partial Y/\partial N$ 之间的等式