[redacted]学物理方法解题分析

徐 世 良

江 苏 科 学 技 术 出 版 社

数学物理方法解题分析

徐 世 良

出版：江苏科学技术出版社

发行：江 苏 省 新 华 书 店

印刷：淮 阴 新 华 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 29.5 插页 2 字数 660,000

1983 年 7 月第 1 版 1983 年 7 月第 1 次印刷

印数 1-25,000 册

书号：13196·142 定价：2.85 元

责任编辑 王永发

序　言

数学物理方法，就其本质来说，是数学方法，但它所研究的内容又与弹性理论、流体力学、电动力学及量子力学等等物理问题紧密联系。它是理工科院校及师范院校中物理、力学、天文、数学、气象、地质、地理、无线电等系及工程技术等专业的学生的必修课程，也是这些部门中的生产、科研和教学人员学习的理论基础。只有学好了这门课程，才能在学习其它课程时或在生产、科研和教学中，取得更为理想的效果。

由于它既是数学课程，又是物理课程，因此学生学习时往往感到困难。本书通过约 400 个例题的分析，阐述了有关的定义、定理、公式和方法的应用，以及它们的相互联系，想给读者（特别是初学者）在学习该课程时，提供一些方便，灵活运用已学过的知识。

本书以梁昆淼教授编著的《数学物理方法》（1978 年 7 月第二版）一书为蓝本，所举例题力求结合该书的内容并稍加深化和推广，有些例题还是相当有趣的。本书附有约 300 个习题作为读者进一步练习之用。

梁昆淼教授亲自审阅了初稿并随时给编者以指导，徐俊明同志校核了部分习题答案，谨致谢意。

编者深感水平有限，错误和不妥之处一定不少，敬请者批评指正。

徐世良　　1982．6．于南京大学物理系

目　录

第一章　复变函数论

§1. 复变函数

1. 复数与复数运算

复数 $z=x+iy$（x 和 y 是实数）可与复平面上的点（x，y）一一对应（图 1.1），实部 x 记作 Rez，虚部 y 记作 Imz。称 $z^*=x-iy$ 为 z 的共轭复数。常把复平面上的无限远点看作一点，记作∞。复数还可以用来表示复平面上的矢量。复数也可用极坐标（ρ，φ）表示。两种坐标的关系为

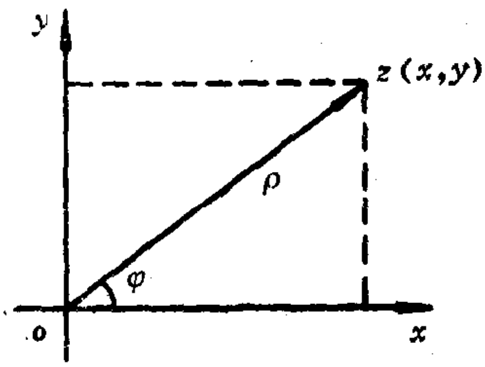

图 1.1

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right),\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\tag{1.1}$$

称 ρ 为 z 的模，记作 $|z|$；称 φ 为 z 的辐角，记作 arg$z$。φ 不能唯一地确定，它可以加减 2π 的整数倍。复数的三种表达形式是

代数式　$z=x+iy$

指数式　$z=\rho e^{i\varphi}$

三角式　$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

复数的基本运算规则如下：

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

或 $$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

或 $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=\rho^ne^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{n}}$$

实变数的和、差、积、商的极限的定理及实变数的极限是否存在的判据全都适用于复变数。

2．复变函数

记作 $w=f(z)$，称 w 为复变数的函数，z 叫作 w 的宗量。几个初等函数的定义式是

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y),$$

其中 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ 常称为欧勒（Euler）公式。

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),\qquad \cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$$

$$\mathrm{sh}z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}),\qquad \mathrm{ch}z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$$

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,\qquad z^s=e^{s\ln z}\quad(s\text{ 为复数})$$

3．多值函数

多值函数往往存在这样的点，宗量 z 绕它运行一周而回到原处，多值函数并不回复原值，这样的点叫作支点。如果

宗量z绕支点n周而回到原处，多值函数回复原值，就称这支点是$n-1$阶的。

若函数$z=f(w)$在区域B上除去它变成∞的点外是解析的，且在B内的不同点取不同值，则称该函数在区域B上是单叶的。如果在B内至少存在两个不同的点使得$f(w)$取同一值，则称该函数在B上是多叶的。这种多叶的z平面称为黎曼(Riemann)面。

4．导数与柯西(Cauchy)-黎曼方程

若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在z平面上某区域内是单值的，则$f(z)$的导数定义为

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

这个极限必须存在且与$\Delta z\to 0$的方式无关。可导函数必须满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\tag{1.2}$$

这是复变函数可导的必要条件．满足柯西-黎曼方程且偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$都连续，是复变函数$f(z)$可导的充分条件．

在极坐标系中，柯西-黎曼方程为

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}\tag{1.3}$$

实变函数论中关于导数的规则和公式可应用于复变函数。

5．解析函数、调和函数和平面标量场

在某区域上处处可导的复变函数称为该区域上的解析函数。

（1）根据柯西-黎曼方程，知道了解析函数的实部（或虚部），就能求出它的虚部（或实部）。

（2）u和v对x和y的二阶偏导数存在且连续，把柯西-黎曼方程微分，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{1.4}$$

故该函数的实部和虚部满足二维拉普拉斯(Laplace)方程。满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数。由于u和v是同一个复变函数的实部和虚部，所以又特别称为共轭调和函数。

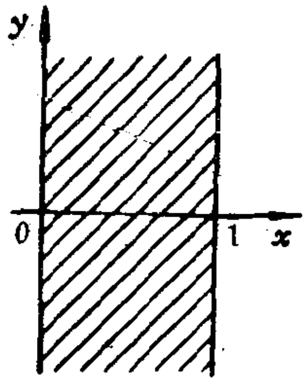

图 1.2

平面静电场中，在没有电荷的区域上的任一解析函数$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$的实部或虚部总可表示该区域上某种平面静电场的电势，这个解析函数叫作该平面静电场的复势。若u是电势，则v是通量函数，反之亦然。

例 1　$0\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant 1$在复数平面上具有怎样的意义？

解　因为$z=x+iy$，$\mathrm{Re}z=x$，所以$0\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant 1$即为$0\leqslant x\leqslant 1$。这在复平面上表示由直线$x=0$与$x=1$所构成的带状区域，并包括两直线在内(图1.2)。

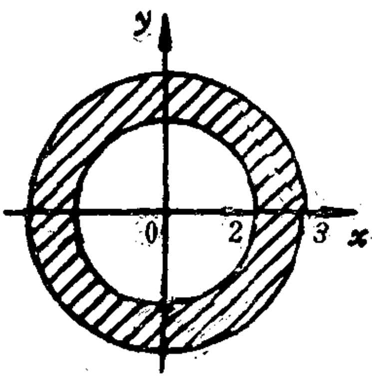

图 1.3

例 2　$2\leqslant |z|\leqslant 3$在复数平面上具有怎样的意义？

解　因为$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，所以$2\leqslant |z|\leqslant 3$即为$2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 3$，亦即$4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$。这在复平面上表示由圆周$x^2+y^2=4$和圆周$x^2+y^2=9$所围成的环形区域，并

包括圆周在内（图 1.3）。

例 3　$0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$在复数平面上具有怎样的意义？

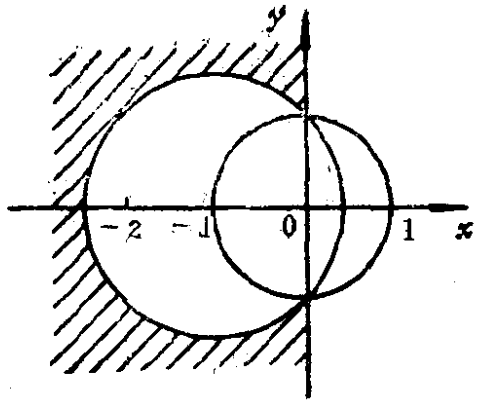

图 1.4

解　因为 $\frac{z-i}{z+i}$

$$=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$$

$$=\frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]}$$

$$=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

$$\equiv X+iY=Z$$

所以，原式即 $0<\arg Z<\frac{\pi}{4}$。如以X轴为实轴，Y轴为虚轴，上式在复平面Z上表示由射线 $\Phi=0$ 和 $\Phi=\frac{\pi}{4}$所围成的区域（不包括射线本身），这就意味着要求 $X>0$ 和 $Y>0$，即要求$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>0$ 和$\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0$，亦即

$$\begin{cases} x<0 \\ x^2+y^2-1>0 \end{cases} \qquad ①$$

上式表示复平面 z 上的左半平面 $x<0$，但除去单位圆及其内部。

又由 $0<\arg Z<\frac{\pi}{4}$得 $0<\operatorname{arc\,tg}(Y/X)<\frac{\pi}{4}$，即 $0<$

$\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}\right)<\dfrac{\pi}{4}$，亦即 $0<\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$，考虑到①，则

$$\begin{cases}-2x>0,\\ -2x<x^2+y^2-1,\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x<0\\ x^2+y^2+2x-1>0\end{cases} \qquad ②$$

在 $x<0$ 的条件下，凡满足 $x^2+y^2+2x-1>0$ 的点必定也满足 $x^2+y^2-1>0$。所以，①无需单独提出，而②表示复平面 z 上的左半平面 $x<0$，但除去圆周 $(x+1)^2+y^2=2$ 及其内部（图 1.4）。

注意　应排除 $\begin{cases}x>0\\ x^2+y^2-1<0\end{cases}$ 及 $(x+1)^2+y^2<2$（这相当于 $X<0$，$Y<0$，即 $\pi<\Phi<\dfrac{5\pi}{4}$，$\pi<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{5\pi}{4}$）这个解。

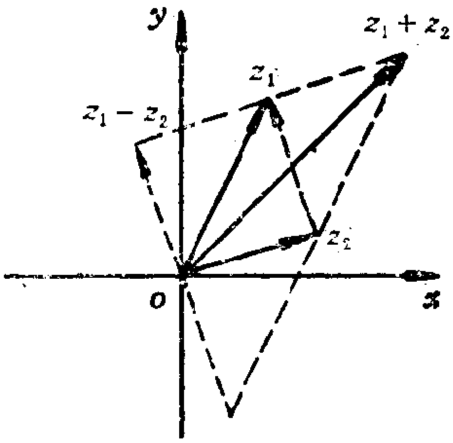

图 1.5

例 4　$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ 在复数平面上具有怎样的意义？

解　因为 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=2x_1^2+2x_2^2+2y_1^2+2y_2^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$，所以这是一个恒等式，对于复平面中任意的 z_1 和 z_2 都成立。它表示平行四边形对角线的平方和等于两邻边的平方和的两倍。

如把 z_1 和 z_2 表示成复平面上的矢量，那么 z_1 和 z_2 的加减运算与相应的矢量的加减运算（平行四边形法则）是相同的，这可由图 1.5 清楚地看出：它表示平行四边形对角线的平方和等于两邻边平方和的两倍。

例 5 把 $-1+i\sqrt{3}$ 用三角式和指数式表示出来。

解 原式为代数式．因其模 $\rho=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$，辐角 $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)=\frac{2\pi}{3}$，所以指数式为 $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$；三角式为 $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$。

例 6 把 $\frac{2i}{-1+i}$ 用代数式、三角式和指数式表示出来。

解 简化原式，$\frac{2i}{-1+i}=\frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=1-i$，此即代数式。因其模 $\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，辐角 $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-1}{1}\right)=\frac{7\pi}{4}$，所以，指数式为 $z=\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$，三角式为 $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$。

例 7 把 $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$（α是实常数）用代数式、三角式和指数式表示出来。

解 原式为代数式，其模 $\rho=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}=2\sin\frac{\alpha}{2}$．因为 $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)$

$=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$，$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$，所以辐角 $\varphi=\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\alpha}{2}$，

在主值范围内，$\varphi=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$。因此，其指数式

为 $z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2})}$ 或 $z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{1}{2}(\pi-\alpha)}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$；三角

式为 $z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

或 $z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$。

例 8 把 e^{1+i} 用代数式、三角式和指数式表示出来。

解 原式 $=e\times e^{i}$，此即为指数式。显然，其模 $\rho=e$，辐角 $\varphi=1$，所以其三角式为 $z=e(\cos 1+i\sin 1)$。再求其代数式，由(1.1)得

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}=e,\\ \operatorname{arc\,tg}(y/x)=1\end{cases}\quad 求出\quad \begin{cases}x=\dfrac{e}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 1}}=e\cos 1\\ y=\dfrac{e\operatorname{tg}^2 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 1}}=e\sin 1\end{cases}$$

因此 $z=e\cos 1+ie\sin 1$。

例 9 把 $\frac{(\cos 5\alpha+i\sin 5\alpha)^2}{(\cos 3\alpha-i\sin 3\alpha)^3}$ （α 是实常数）用代数式、三角式和指数式表示出来。

解法 1 原式 $=\frac{\cos 10\alpha+i\sin 10\alpha}{\cos(-9\alpha)+i\sin(-9\alpha)}=\cos[10\alpha-(-9\alpha)]+i\sin[10\alpha-(-9\alpha)]=\cos 19\alpha+i\sin 19\alpha$，此即为三角式。显然，其模 $\rho=1$，辐角 $\varphi=19\alpha$，所以，其指数式为 $z=e^{i19\alpha}$，代数式为 $z=\cos 19\alpha+i\sin 19\alpha$。

解法 2 原式$=\dfrac{e^{i10\alpha}}{e^{-i9\alpha}}=e^{i19\alpha}$，此即为指数式。显然，其模 $\rho=1$，辐角 $\varphi=19\alpha$，所以，其三角式和代数式为 $z=\cos 19\alpha+i\sin 19\alpha$。

例 10 计算 $(-1+i\sqrt{3})^{10}$。

解 由例 5 及乘方定义，可得

$$(-1+i\sqrt{3})^{10}=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}$$

$$=2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$=1024\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=-512+i512\sqrt{3}.$$

例 11 计算 $[2(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)][5(\cos 110^\circ+i\sin 110^\circ)]$。

解 由复数的积的公式，可得

$$\text{原式}=10[\cos(25^\circ+110^\circ)+i\sin(25^\circ+110^\circ)]$$

$$=10(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$$

$$=10\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-5\sqrt{2}+i5\sqrt{2}$$

例 12 计算 i^i。

解法1 因为 $i=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=\left[\cos\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi+i\sin\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right]=e^{i(2n+\frac{1}{2})\pi}$，所以

$$i^i = [e^{i(2\pi+\frac{1}{2})\pi}]^i = e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi}$$

解法 2 令 $z = i^i$,则 $\ln z = i\ln i$.因为 $\ln i = \ln|i| + i\arg i$ $= i\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$，所以 $\ln z = i\left[i\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right] = -\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$，从而有

$$z = i^i = e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi}$$

例 13 计算 $\cos n\varphi$（φ 为实常数）.

解 $\cos n\varphi = \mathrm{Re}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$，约定结果取实部. 由乘方的定义，$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

应用二项式定理 $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}b^k + \cdots$，把上式展开，有

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + in\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi$$

$$-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi$$

$$-i\frac{(n-2)(n-1)n}{3!}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi$$

$$+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{4!}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \cdots$$

$$-(i)^k\frac{n!}{(n-k)!k!}\cos^{n-k}\varphi\sin^k\varphi + \cdots$$

只取上式的实部，得

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{(n-1)n}{2!}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi$$

$$+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{4!}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi$$

$$+\cdots+(-1)^m\frac{n!}{(n-2m)!(2m)!}\cos^{n-2m}\varphi\sin^{2m}\varphi+\cdots$$

例14 计算 $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$（$\varphi$ 为实常数）。

解法 1 原式 $=\mathrm{Re}(e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+e^{i3\varphi}+\cdots+e^{in\varphi})$ 上式右边括号里是一个等比级数，其公比为 $e^{i\varphi}$。当 $|e^{i\varphi}|<1$ 时，根据等比级数前 n 项和的公式求出

$$S_n=e^{i\varphi}\frac{1-e^{in\varphi}}{1-e^{i\varphi}}=e^{i\frac{\varphi}{2}}\frac{1-e^{in\varphi}}{e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2}}$$

$$=\frac{e^{i\left(n\varphi+\frac{\varphi}{2}\right)}-e^{i\frac{\varphi}{2}}}{2i\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{-ie^{i\left(n\varphi+\frac{\varphi}{2}\right)}+ie^{i\frac{\varphi}{2}}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left[-i\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right.$$

$$\left.+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\right]$$

只取上式的实部，得

$$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}\right]$$

解法 2 上面的 $S_n=e^{i\varphi}\dfrac{e^{in\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}=e^{i\varphi}\dfrac{e^{i\frac{n\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{n\varphi}{2}}-e^{-i\frac{n\varphi}{2}}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)}$