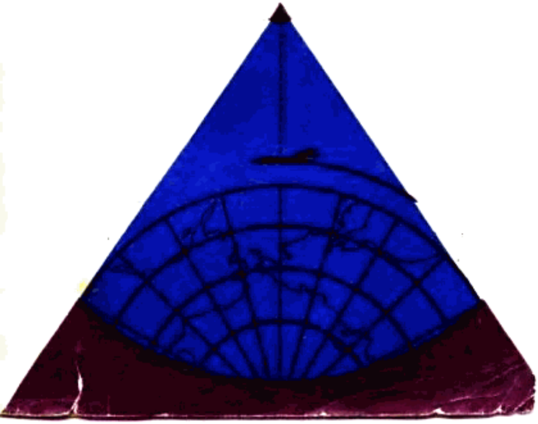
定位导航与制导

DINGWEI DAOHANG YU ZHIDAO

孙仲康 陈辉煌 编著



前　言

空间定位技术广泛地应用于导航、雷达、侦察、测控、救援、大地测量等各个领域，涉及到陆海空交通运输、油井地质勘探、海上遇难救援、火控系统对目标的定位跟踪、电子侦察定位、空间飞行器的测控、卫星定位等国民经济和国防的各个重要领域。

本书主要涉及空间定位定态（运动状态）的原理、方法及系统，对各类系统的定位精度及其几何分布作了较细致的分析。本书还着重介绍了无源被动定位原理和系统，专门介绍了多个固定观测站及单个运动观测站对运动辐射源的定位与跟踪问题。在电子对抗日益严重的条件下，这种定位技术具有显著的反电子对抗的性能。本书还介绍了图像匹配定位及利用地球物理信息的组合式辅助导航制导系统，这些技术在飞行器进行低空潜入突防、地形跟随、地形回避等方面有着明显的优越性和很大的应用潜力。

本书是在授课讲义的基础上，经编著者多次讲授、修改、补充后形成的。其中的第一章是一些介绍性预备知识，使读者便于阅读以后各章的内容。书中的第七章是由陈辉煌同志在科研及研究生教学工作的基础上写成的，其余各章是孙仲康同志在科研教学的基础上写成的。

本书的编写出版受到沈振康、傅诚忠、戴乐平、经一平、张朋、吉明等同志的支持以及编辑同志的关心和努力，作者对此深表感谢。

编著者

1985.6.

目　录

第一章　空间定态的一些数学物理基础

§1-1　空间直角坐标系，点、线、面

1.1.1　直角坐标系

在空间任意取定一点 O 为原点，从 O 点画出三条互相垂直的直线，组成坐标轴。由两根坐标轴构成的平面称之为坐标平面，即 xy 平面，yz 平面，zx 平面。这种直角坐标系相对位置的顺序如右手大姆指、食指、中指互相垂直形成的相对位置，故称之为右手坐标系，如图1-1所示。

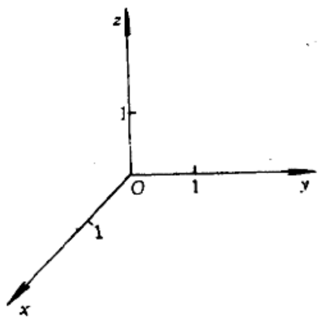


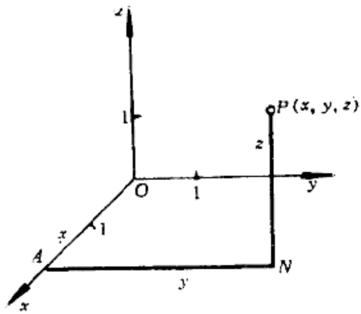
图 1-1　直角坐标系

1.1.2　空间的点

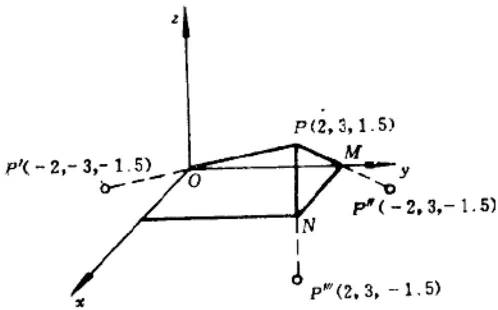
在直角坐标系内空间任一点 P，它与三个坐标平面yz、zx、xy的垂直距离确定了P点在空间中的位置。P点的坐标，记之为 $P(x、y、z)$。如图 1-2(a) 所示。

对称点　空间存在着各种对称的点，如图1-2(b)所示，有对称于原点的点，如P及 P'。有对称于坐标轴的点，如P及P''。还有对称坐标平面的点，如P及P'''。

两点间距离　空间若有两个点，分别为 $P_1(x_1y_1z_1)$ 及



(a)



(b)

图 1-2 空间的点

(a) 空间点；(b) 对称点。

$P_2(x_2 y_2 z_2)$那末它们之间的距离，可以用下式表达，即

$$d=|P_2-P_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1-1-1}$$

而任意一点$P(x、y、z)$与原点间的距离 d 为

$$d=|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

1.1.3 矢量

矢量 矢量又称向量，它是一个既有大小,又有方向的量，例如 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{CD}$，矢量AB可以用 $\boldsymbol{a}$ 表示，其长度为$|\boldsymbol{a}|$，如图1-3所示。

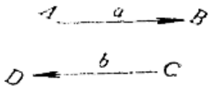


图 1-3 矢量

零矢、么矢 始点与终点重合的矢量叫做零矢，其长度为零，但方向不定。任何长度为1的矢量叫做么矢或单位矢量。

自由矢量 若规定两个方向相同、长度一样的矢量称为相等矢量，即两个矢量通过平行移动能使它们重合，就认为两个矢量相等。这样规定下的矢量叫做自由矢量，自由矢量的始点是可以任意选取的。

平行矢量 方向相同或相反的矢量叫做平行矢量。若矢量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则另一矢量$\boldsymbol{r}$平行于$\boldsymbol{a}$的充要条件为$\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{a}$，这里$m$为被$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{a}$唯一确定的数量，由于这里讨论的都是自由矢量，因此，平行矢量又称共线矢量。

共面矢量 若有一些自由矢量，当它们的始点放在同一点时，它们都在同一个平面上，或它们都是平行于同一个平面的矢量，这些矢量称之为共面矢量。若矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不平行，则另一矢量$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共面的充要条件是

$$\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b} \tag{1-1-2}$$

式中m、n是数量，它们被$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{r}$唯一地确定。

矢量的线性关系 给定n个矢量（$n\geqslant 1$），$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，若存在着一组不都等于零的数量λ_1，λ_2，…，λ_n使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=0 \tag{1-1-3}$$

则所有n个矢量是线性相关的，否则是线性无关的，这也就是说矢量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 线性相关的一个充要条件是矢量中的

一个是其余$(n-1)$个的线性组合。因此，两个矢量共线，三个矢量共面的充要条件是：矢量之间是线性相关的。

1.1.4 空间点的表示法

在直角坐标系内，空间一点P的坐标$(x、y、z)$是$x=OA$、$y=OB$、$z=OC$，如图1-4所示。这里OA、OB、OC都是有向线段在x、y、z轴上的代数长度。做矢量$\boldsymbol{OP}$，P点在坐标系中的径矢$\boldsymbol{r}$，即为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OP}$$

可以把$\boldsymbol{OP}$与$\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$各矢量联系起来，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC} \tag{1-1-4}$$

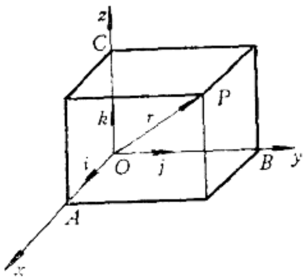


图 1-4 空间点的表示

设$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$是依次与Ox、Oy、Oz轴同方向的么矢，而又知$x=OA$、$y=OB$、$z=OC$，故得

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1-5}$$

这就是说P点的径矢$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OP}$是$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$么矢的线性组合，有时使用$P(\boldsymbol{r})$表示其径矢为$\boldsymbol{r}$的点，或直接用$\boldsymbol{r}$来表示$P$点，即

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

空间点的方向表示法 空间P点的径矢分别与x轴、y轴及z轴依次形成三个夹角α、β、γ，这三个角确定了从原点O到P点的方向，叫做径矢$\boldsymbol{r}$的方向角，如图1-5所示。由P点到xyz轴上的投影为

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha$$
$$y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta$$

$$z = |\boldsymbol{r}|\cos\gamma$$

故 $$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}|\boldsymbol{r}|\cos\alpha + \boldsymbol{j}|\boldsymbol{r}|\cos\beta + \boldsymbol{k}|\boldsymbol{r}|\cos\gamma \qquad (1\text{-}1\text{-}6)$$

方向角 α、β、γ 的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 叫做方向余弦。这说明一个非零矢的分量等于矢量长度和它们的方向余弦之积。

当径矢 $\boldsymbol{r}$ 为一单位矢量即 $|\boldsymbol{r}| = 1$ 时

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma = \boldsymbol{i}x_0 + \boldsymbol{j}y_0 + \boldsymbol{k}z_0 \qquad (1\text{-}1\text{-}7)$$

这说明一个么矢的分量就是它们的方向余弦，而么矢的长度公式如下

$$1^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

这样单位径矢方向余弦的恒等式为

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (1\text{-}1\text{-}8)$$

方向余弦（$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$）有时用符号（l、m、n）来表达。

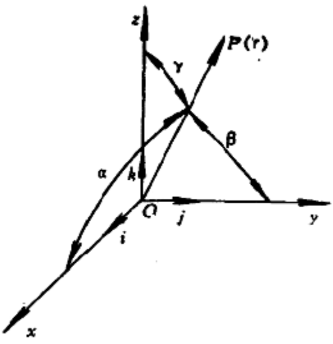


图 1-5 空间点的方向表示

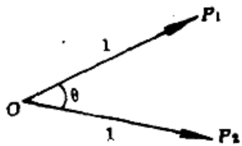


图 1-6 矢量间的夹角

1.1.5 矢量的平行与共面

两径矢之间的夹角 若一个径矢的方向为（l_1、m_1、n_1），另

一个径矢的方向为(l_2、m_2、n_2)，把这两组方向余弦看作为两个么矢终点$P_1(x_1y_1z_1)$、$P_2(x_2y_2z_2)$的坐标，那么θ就是OP_1及OP_2之间的夹角，如图1-6所示。根据余弦定律：

$$|P_1P_2|^2=1+1-2\cos\theta \qquad (1\text{-}1\text{-}9)$$

由两点间的距离公式可知

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\\&=(l_1-l_2)^2+(m_1-m_2)^2+(n_1-n_2)^2\\&=(l_1^2+m_1^2+n_1^2)+(l_2^2+m_2^2+n_2^2)-2(l_1l_2\\&\quad+m_1m_2+n_1n_2)=2-2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)\end{aligned} \qquad (1\text{-}1\text{-}10)$$

所以由上述两公式可得到两个方向间夹角的余弦为

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 \qquad (1\text{-}1\text{-}11)$$

当两个径矢方向相互垂直$\theta=90°$，有

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}12)$$

矢量的分量表示　建立一个原点为O，么矢为i、j、k的直角坐标系$[O;\ i、j、k]$。设$\boldsymbol{v}$为一任意矢量，其始点为$P_1(x_1y_1z_1)$，终点为$P_2(x_2y_2z_2)$，它们的径矢为

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{OP}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{OP}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

故矢量$\boldsymbol{v}=P_1P_2=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$

这里的(x_2-x_1)、(y_2-y_1)、(z_2-z_1)就是矢量$\boldsymbol{v}$的分量，可以表达为

$$\boldsymbol{v}=\{(x_2-x_1),\ (y_2-y_1),\ (z_2-z_1)\} \qquad (1\text{-}1\text{-}13)$$

矢量平行及共面的条件　若矢量$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$、$\boldsymbol{v}_3$分别由下式表达

$$\boldsymbol{v}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$$

已知两矢量平行的充要条件是两矢量线性相关，即

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = 0$$

也即

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\boldsymbol{i} + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\boldsymbol{j} + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)\boldsymbol{k} = 0$$

因此得

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 = z_1 : z_2 = \lambda_2 : -\lambda_1 \tag{1-1-14}$$

或得

$$x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2 \tag{1-1-15}$$

这就是说两个矢量平行的充要条件是它们的各个分量互成比例。

又知三个矢量共面的充要条件也是它们之间线性相关，即

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 = 0$$

因此可以写出

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$$

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0$$

在λ_1、λ_2、λ_3不同而这个三元线性齐次方程组为零时，有解的充要条件是下述的行列式成立，即

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1-1-16}$$

所以三个矢量共面的充要条件可记为

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = 0 \tag{1-1-17}$$

1.1.6 空间的直线

矢量方程 给定径矢为$\boldsymbol{r}_0$的空间一点P_0和一个非零矢量

$\boldsymbol{v}$，就有一条平行于$\boldsymbol{v}$的直线，它可用下式表达

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v} \qquad (1-1-18)$$

这里$\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}$是已知矢量，直线a上的点P唯一地决定标量t的大小。这个表达直线a的方程，称之为a的矢量方程，如图1-7所示。

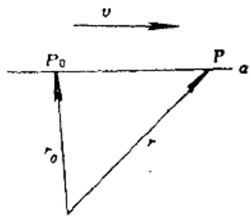


图 1-7　直线的矢量表达

对称方程　设决定空间直线的矢量$\boldsymbol{r}_0$及$\boldsymbol{v}$分别为

$$\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

则对应公式：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}$$

可得

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x_0+v_xt)\boldsymbol{i}+(y_0+v_yt)\boldsymbol{j}+(z_0+v_zt)\boldsymbol{k}$$

上式等号两边的各个分量应当依次相等。

故得

$$\begin{aligned}x&=x_0+v_xt\\y&=y_0+v_yt\\z&=z_0+v_zt\end{aligned} \qquad (1-1-19)$$

消去参数t，可得

$$(x-x_0):(y-y_0):(z-z_0)=v_x:v_y:v_z \qquad (1-1-20)$$

当v_x、v_y、v_z都不等于零时可得

$$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z} \qquad (1-1-21)$$

这叫做直线的对称方程。

两点式方程　给定直线a上的两个不重合点$P_1(\boldsymbol{r}_1)$，$P_2(\boldsymbol{r}_2)$，如图1-8所示，只要取$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$为定向矢量，则得直

线方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$$

由于

$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

故得与这个直线矢量方程等价的数量方程组：

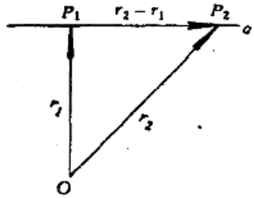


图 1-8 直线的两点表达

$$x=x_1+t(x_2-x_1)$$

$$y=y_1+t(y_2-y_1)$$

$$z=z_1+t(z_2-z_1)$$

消去参数 t，可得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (1\text{-}1\text{-}22)$$

这个方程叫做直线的两点式方程。

空间两直线共面的条件 设两直线的矢量方程为

$$a_1: \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t_1\boldsymbol{v}_1$$

$$a_2: \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+t_2\boldsymbol{v}_2$$

若两直线共面，其充要条件 $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 三矢量是共面矢量，这时可利用三个矢量的共面条件，即下列行列式为零

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ v_{x_1} & v_{y_1} & v_{z_1} \\ v_{x_2} & v_{y_2} & v_{z_2} \end{vmatrix}=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}23)$$

若上述行列式不等于零，则a_1、a_2不共面而相错，如图 1-9 所示。

共面的两条直线可能相交、平行或重合，其条件分别为

相交：$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=0$； $v_{x_1}:v_{y_1}:v_{z_1}\neq v_{x_2}:v_{y_2}:v_{z_2}$

$$(1\text{-}1\text{-}24)$$

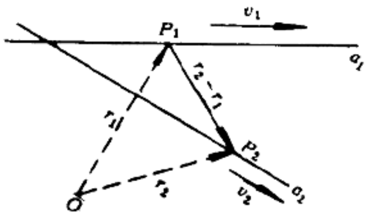


图 1-9 两直线的共面

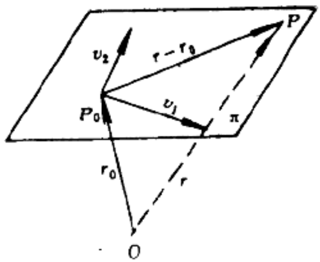


图 1-10 空间的平面

平行而不重合： $v_{x_1}:v_{y_1}:v_{z_1}=v_{x_2}:v_{y_2}:v_{z_2}$ (1-1-25)

重合： $v_{x_1}:v_{y_1}:v_{z_1}=v_{x_2}:v_{y_2}:v_{z_2}=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$ (1-1-26)

1.1.7 空间的平面

参数方程 给定一点$P_0(\boldsymbol{r}_0)$和两个不平行的矢量$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$，就有一个唯一的平面π经过P_0而与$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$平行。设$P(\boldsymbol{r})$为平面上的任意一点，则矢量$\boldsymbol{P_0P}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$和$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$共面。因此根据共面的充要条件可得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t_1\boldsymbol{v}_1+t_2\boldsymbol{v}_2 \tag{1-1-27}$$

这就是平面π的参数矢量方程，其中t_1、t_2为参数组。若点P_0及P的坐标分别为(x_0,y_0,z_0)、(x,y,z)，而矢量$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$的分量组为$(v_{x_1},v_{y_1},v_{z_1})$、$(v_{x_2},v_{y_2},v_{z_2})$，则平面的参数矢量方程与下列方程组等价。

$$\begin{aligned}x&=x_0+t_1v_{x_1}+t_2v_{x_2}\\y&=y_0+t_1v_{y_1}+t_2v_{y_2}\\z&=z_0+t_1v_{z_1}+t_2v_{z_2}\end{aligned} \tag{1-1-28}$$

若给定三个不共线的点$P_0(\boldsymbol{r}_0)$、$P_1(\boldsymbol{r}_1)$、$P_2(\boldsymbol{r}_2)$，也可以唯一确定一个平面，令

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$$

$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0$$

则$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$是在π平面上且又互不平行的矢量，这样把$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$代入平面的参数矢量方程，可得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t_1(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)+t_2(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0) \qquad (1\text{-}1\text{-}29)$$

一般方程 三个矢量$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$、$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$共面，也即位于同一平面$\pi$上，其充要条件是

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}30)$$

即

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ v_{x_1} & v_{y_1} & v_{z_1} \\ v_{x_2} & v_{y_2} & v_{z_2} \end{vmatrix}=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}31)$$

展开上式，并令

$$A=\begin{vmatrix} v_{y_1} & v_{z_1} \\ v_{y_2} & v_{z_2} \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} v_{z_1} & v_{x_1} \\ v_{z_2} & v_{x_2} \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} v_{x_1} & v_{y_1} \\ v_{x_2} & v_{y_2} \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}1\text{-}32)$$

及

$$D=-\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ v_{x_1} & v_{y_1} & v_{z_1} \\ v_{x_2} & v_{y_2} & v_{z_2} \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}1\text{-}33)$$

则可得平面π的一般表达式如下

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}34)$$

这叫做平面π的一般方程或普遍方程。若P_0点取在坐标原点，则系数D为零，故通过原点的平面公式为$Ax+By+Cz=0$。由于$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$不平行，故它们的分量不成比例，因此，系数A、B、C一般都不等于零，故每个平面可以用含有x、y、z的三元一次（线性）方程来表达。

与矢量平行的平面 设定π是平行于不共线矢量$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$的

平面，则矢量 $\boldsymbol{v}$ 平行于平面 π 的充要条件显然是 $\boldsymbol{v}$ 和 v_1、$\boldsymbol{v}_2$ 共面，即

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}35)$$

或

$$\begin{vmatrix} v_x & v_y & x_z \\ v_{x_1} & v_{y_1} & v_{z_1} \\ v_{x_2} & v_{y_2} & v_{z_2} \end{vmatrix}=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}36)$$

因此矢量 $\boldsymbol{v}$ 与平面 π 平行的充要条件如下：

$$Av_x+Bv_y+Cv_z=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}37)$$

上述的充要条件是一条直线与一个平面平行的条件。例如 $P_1(x_1、y_1、z_1)$、$P_2(x_2、y_2、z_2)$ 两点所确定的直线与平面 π 平行的充要条件为

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}38)$$

由上式可见，若 $A=0$，则 π 平面平行于 x 轴，若 $B=0$，则 π 平面平行于 y 轴，而 $C=0$ 时，则 π 平面平行于 z 轴。

若平面经过原点，则系数 $D=0$。因此通过原点并包含有 x 轴、y 轴、z 轴的平面方程式中，分别有 $A=D=0$，$B=D=0$ 及 $C=D=0$ 的条件。例如，等 β 角的平面 π，如图1-11所示，含有原点及 z 轴，故系数

$$C=D=0$$

则 π 平面的方程式为

$$Ax+By=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}39)$$

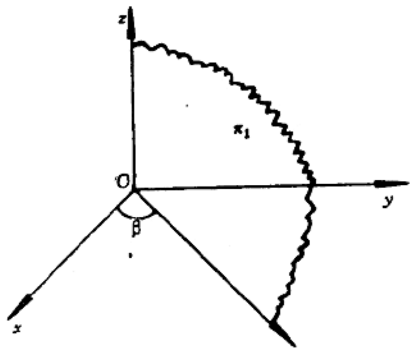


图 1-11 等方位角（β）平面