数学奥林匹克竞赛丛书

曹鸿德 徐洪泉

周期数列

中国科学技术大学出版社

[皖]新登字 08 号

周 期 数 列

曹鸿德　徐洪泉

*

中国科学技术大学出版社出版
(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)
上海市印刷三厂排版
黄山市印刷总厂印刷
安徽省新华书店发行

*

开本 787×1092/32　印张 3.625　字数 78 千
1992 年 3 月第 1 版　1992 年 3 月第 1 次印刷
印数:1—8000 册
ISBN7—312—00318—4/G · 42

前　言

由于纯数学与应用数学的推动，对周期数列的研究在不断地深入. 这在数学竞赛中也有所反映，书中的大部分例题便取自各类竞赛.

本书在写作过程中，得到了单墫和严镇军两位先生的支持，单先生仔细审阅了本书的一、二两稿，对于写作（特别是一些证明）给予了许多指导。借此机会，谨向两位先生表示衷心的感谢.

由于才疏学浅，书中难免存在缺点和错误，敬请读者指正.

曹鸿德

1990年冬

目　　次

第一章　周期数列

第二章　模周期数列

第一章 周期数列

1 预备知识

周期数列较多地涉及递推数列及其通项公式，因此在讲正文之前，先给出求递推数列通项公式的一些方法.

1° 先求 S_n，再求 a_n

例 1 设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n，且 $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)(n\geqslant1)$，试求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 因为

$$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2),$$

所以

$$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)\ (n\geqslant2).$$

去分母，整理得

$$S_n^2=S_{n-1}^2+1\ (n\geqslant2),$$

所以

$$S_n^2=S_1^2+(n-1)\ (n\geqslant2).$$

又从 $S_1=\frac{1}{2}\left(S_1+\frac{1}{S_1}\right)\ (S_1>0)$，解得$S_1=1$，故有

$$S_n^2=n\ (n\geqslant2).$$

因为 $S_1=1$ 适合上式，所以

$$S_n^2=n \ (n\geqslant 1).$$

因为 $\{a_n\}$ 是正项数列，$S_n>0(n\in\mathrm{N})$，所以

$$S_n=\sqrt{n},$$

所以

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \ (n\geqslant 2).$$

因为 $a_1=S_1=1$ 适合上式，所以

$$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \ (n\geqslant 1).$$

2° 商联乘相约原则和差叠加相消原则

例 2 数列$\{a_n\}$满足关系；$a_n=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-2})$ $(n>2)$，并且 $a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{2}$. 求证

$$a_n=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!} \ (n\geqslant 2).$$

证 由已知

$$na_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-2} \ (n\geqslant 3), \tag{1}$$

$$(n-1)a_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-3} \ (n\geqslant 4), \tag{2}$$

(1)-(2)(将相邻两个递推式作差，我们称为差分法)，得

$$na_n-(n-1)a_{n-1}=a_{n-2} \ (n\geqslant 4),$$

整理得

$$n(a_n-a_{n-1})=-(a_{n-1}-a_{n-2}). \tag{3}$$

如果存在自然数 $n\geqslant 4$，使 $a_n-a_{n-1}=0$，则可通过(3)式，经过有限次倒退，得$a_3-a_2=0$. 但通过计算得 $a_3=\dfrac{1}{3}$，$a_3-a_2=-\dfrac{1}{6}\neq 0$，矛盾，故对一切 $n\geqslant 4$ 的自然数 n，a_{n-1}

$-a_{n-2}\neq 0$. 这样就可从(3)式得

$$\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}=-\frac{1}{n}\quad(n\geqslant 4). \tag{4}$$

由(4)式，根据商联乘相约原则，得

$$a_n-a_{n-1}=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{a_{n-2}-a_{n-3}}\cdot\cdots$$

$$\cdot\frac{a_4-a_3}{a_3-a_2}\cdot(a_3-a_2)$$

$$=\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\quad(n\geqslant 4).$$

因为 $n=3$ 时上式也成立，所以

$$a_n-a_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}\quad(n\geqslant 3). \tag{5}$$

由(5)式，根据差叠加相消原则，得

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+a_2$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\quad(n\geqslant 3),$$

显然 $n=2$ 时，上式也成立，故求证的等式成立.

3° 数学归纳法

数学归纳法是求递推数列通项公式的最基本的方法.

例 3 实数列$\{a_n\}$定义如下：$a_0=a_1=1$，且

$$\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}=2^na_n\quad(n\geqslant 0). \tag{1}$$

(i)求通项公式a_n；

(ii)证明集合$\left\{b_n\,|\,b_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\quad n\geqslant 0\right\}$是有界的；

(iii)求出和 $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)a_k$.

解 (i)从(1)容易解得 $a_2=\frac{1}{2!}$，$a_3=\frac{1}{3!}$，我们猜想 $a_n=\frac{1}{n!}\ (n\geqslant 0)$. 下面用数学归纳法证明.

归纳法的奠基成立；

假设 $n\leqslant k$ 时，等式都成立，则当 $n=k+1$ 时，由(1)式得

$$\sum_{i=1}^{k}a_ia_{k+1-i}=(2^{k+1}-2)a_{k+1},$$

上式变形为

$$\frac{1}{(k+1)!}(C_{k+1}^1+C_{k+1}^2+\cdots+C_{k+1}^k)=(2^{k+1}-2)\cdot a_{k+1}.$$

因为

$$C_{k+1}^1+C_{k+1}^2+\cdots+C_{k+1}^k=2^{k+1}-2,$$

所以

$$a_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!},$$

即 $n=k+1$ 时，等式也成立. 故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n!}\ (n\geqslant 0)$.

我们顺便说一下本题的来源，从等式

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}=2^n\cdot\frac{1}{n!}.$$

令 $a_k=\dfrac{1}{k!}$得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}=2^n a_n \quad ,$$

这就是问题中的递推公式.

(ii)因为

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&\leqslant 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=3-\frac{1}{n}<3.\end{aligned}$$

又 $b_n\geqslant 1$，所以$\{b_n\}$是有界集合.

(iii)因为

$$(k-1)a_k=\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!},$$

所以

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right]\\&=1-\frac{1}{n!}\quad .\end{aligned}$$

4° 不动点

定义 1 设一元函数$f(x)$的定义域为D,且对每一$x\in D$,都有$f(x)\in D$. 若$x_1\in D$, $x_n=f(x_{n-1})(n\geqslant 2)$，则称$\{x_n\}$为由$f(x)$导出的递推数列，$f(x)$称为数列$\{x_n\}$的递推函数.

定义 2 在定义1的条件下，若存在点$x_0\in D$,使$f(x_0)$

$=x_0$，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的不动点．不动点的代数意义是方程 $f(x)=x$ 在定义域 D 中的解，其几何意义是直线 $y=x$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象交点的横坐标．

$$\text{显然} f(x)=x \Rightarrow f(f(x))=f(x)=x \Rightarrow \cdots$$
$$\Rightarrow f(f(\cdots(f(x))))=x,$$

即 $f(x)$ 的不动点是 $f(f(\cdots(f(x))))$ 的不动点．

定理 1.1 一阶递性递推数列 $a_n=pa_{n-1}+q$（$p\neq 1$，$q\neq 0$，$n\geqslant 2$）的通项公式为

$$a_n=x_0+(a_1-x_0)p^{n-1}\ (n\geqslant 1),$$

其中 x_0 是递推函数 $f(x)=px+q$ 的不动点，即 $f(x)=px+q=x$ 的解 $x_0=\dfrac{q}{1-p}$．

特别地，当 $a_1=x_0=\dfrac{q}{1-p}$ 时，$a_n=\dfrac{q}{1-p}$（$n\geqslant 1$），即 $\{a_n\}$ 是常数列．

例 4 设数列 a_1，a_2，…，a_n，…的前 n 项的和为 S_n，S_n 与 a_n 满足关系式 $S_n=-ba_n+1-\dfrac{1}{(1+b)^n}$，其中 b 是与 n 无关的常数，且 $b\neq -1$．

（i）求 a_n 与 a_{n-1} 的关系式；（ii）写出用 n 和 b 表示的 a_n 的表达式；（iii）当 $0<b<1$ 时，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$．

解

（i）由已知

$$S_n=-ba_n+1-\frac{1}{(1+b)^n}\ (n\geqslant 1), \qquad (1)$$

$$S_{n-1}=-ba_{n-1}+1-\frac{1}{(1+b)^{n-1}}\ (n\geqslant 2), \qquad (2)$$

（1）－（2），整理得 a_n 和 a_{n-1} 的关系式

$$(1+b)a_n=ba_{n-1}+\frac{b}{(1+b)^n}. \qquad (3)$$

(ii) $(3)\times(1+b)^{n-1}$，并设 $x_n=(1+b)^n a_n$，得

$$x_n=bx_{n-1}+\frac{b}{1+b}. \qquad (4)$$

如果 $b=1$，则由(4)，得

$$x_n=x_{n-1}+\frac{1}{2},$$

$$x_n=x_1+\frac{1}{2}\cdot(n-1),$$

再由(1)解得 $a_1=\frac{1}{4}$，从而 $x_1=(1+b)a_1=\frac{1}{2}$，故有

$$x_n=\frac{n}{2},\quad a_n=\frac{n}{2^{n+1}}.$$

如果 $b\neq1$，则(4)的递推函数 $f(x)=bx+\frac{b}{1+b}$，令 $f(x)=x$，解得不动点 $x_0=\frac{b}{1-b^2}$.由定理1得

$$x_n=\frac{b}{1-b^2}+\left(x_1-\frac{b}{1-b^2}\right)\cdot b^{n-1}.$$

因为

$$a_1=\frac{b}{(1+b)^2},\quad x_1=(1+b)a_1=\frac{b}{1+b}.$$

所以

$$a_n=\frac{1}{(1+b)^n}\cdot x_n=\frac{b-b^{n+1}}{(1-b)(1+b)^{n+1}}.$$

所以

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{b-b^{n+1}}{(1-b)(1+b)^{n+1}}, & b\neq 1\\[2mm] \dfrac{n}{2^{n+1}}, & b=1.\end{cases}\qquad(5)$$

(iii) 由(1)和(5)，得

$$S_n=-\frac{b(b-b^{n+1})}{1-b}\cdot\frac{1}{(1+b)^{n+1}}+1-\frac{1}{(1+b)^n},$$

因为

$$0<b<1,\ 0<\frac{1}{1+b}<1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

例 5 某粮站把一桶油的$\dfrac{q}{p}$又加$\dfrac{q}{p}$斤卖给第一个顾客，然后又把余下的油的$\dfrac{q}{p}$又加上$\dfrac{q}{p}$斤卖给第二个顾客，一直按这样的顺序卖下去，卖至第n个顾客正好全部卖完．若$\dfrac{q}{p}$是一个既约分数，且每个顾客所买到的油均为整数斤，那么(i)p、q满足什么关系式？(ii)这桶油的总重量为多少？

解 设这桶油的总重量为a_0，卖给第i个顾客a_i斤，余下b_i斤，($i=0, 1, 2, \cdots, n$)，这里的a_i和b_i都是整数，且$a_0=b_0$，$b_n=0$.

根据题意，我们有

$$a_k=\frac{q}{p}b_{k-1}+\frac{q}{p}\quad(1\leqslant k\leqslant n),\qquad(1)$$

$$b_{k-1}=a_k+b_k\qquad(1\leqslant k\leqslant n),\qquad(2)$$

(2)代入(1)，整理得

$$b_k=\frac{p-q}{p}b_{k-1}-\frac{q}{p},$$

它的递推函数为 $f(x)=\frac{p-q}{p}x-\frac{q}{p}$，令 $f(x)=x$，解得不动点 $x_0=-1$，从而由定理 1

$$b_n=-1+(b_0+1)\left(\frac{p-q}{p}\right)^n.$$

因为

$$b_n=0,$$

所以

$$a_0=b_0=\left(\frac{p}{p-q}\right)^n-1. \tag{3}$$

因为

$$a_0\in \mathrm{N},$$

所以

$$\frac{p}{p-q}=m\in \mathrm{N}.$$

从上式解得 $\frac{q}{p}=\frac{m-1}{m}$. 因为 $(p,\ q)=1$，$(m,\ m-1)=1$，所以 $q=m-1$，$p=m$，从而得 p，q 的关系式

$$p-q=1.$$

(ii)由(3)得这桶油的总重量为

$$a_0=p^n-1.$$

定理 1.2 设线性分式递推数列

$$a_{n+1}=\frac{Aa_{n-1}+B}{Ca_{n-1}+D}\ (A,\ B,\ C,\ D\in \mathrm{R},\ ABC\neq 0)$$

的递推函数 $f(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D}$ 的两不动点为 x_1，x_2，且 $a_1\neq x_1$

或 x_2.

（i）若 $x_1\neq x_2$，则 $\dfrac{a_n-x_1}{a_n-x_2}=q\cdot\dfrac{a_{n-1}-x_1}{a_{n-1}-x_2}$；

（ii）若 $x_1=x_2$，则 $\dfrac{1}{a_n-x_1}=\dfrac{1}{a_{n-1}-x_1}+d$，

其中 $q=\dfrac{Cx_2+D}{Cx_1+D}$，$d=\dfrac{1}{Cx_1+D}$.

当 $a_1=x_1$ 或 $a_1=x_2$ 时，$a_n=x_1$ 或 $a_n=x_2(n\geqslant1)$，即$\{a_n\}$是常数列.

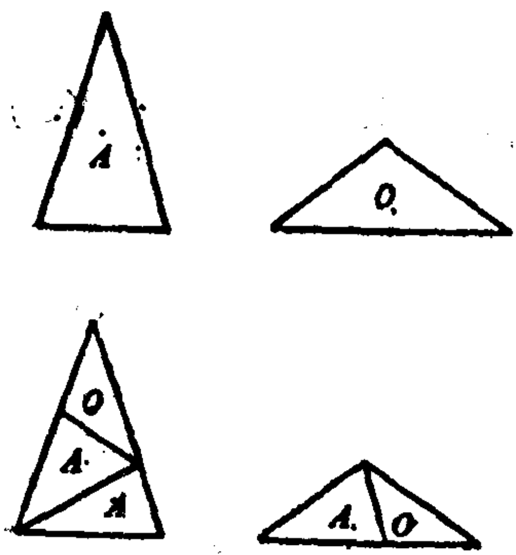

图 1

例 6 在平面上生活着两种生物：锐角三角形（A）和钝角三角形（O），它们都是等腰三角形. 锐角三角形的顶角为36°，钝角三角形的顶角为108°。

在每年的“大分日”，它们都分裂成小块：每个 A 分成两个小 A 和一个小 O；每个 O 分成一个小 A 和一个小 O. 在一年里，它们分别长大至成年. 很久之前，平面上仅有一个生物 O，而且在此平面上的生物是不会死亡的.

问：很久之后，锐角三角形 A 和钝角三角形 O 的数目的比率是否有一个极限？如果有，试确定此极限.

解 设第 n 年后锐角三角形（A）有a_n 个，钝角三角形（O）有b_n 个，它们的比率 $f_n=\dfrac{a_n}{b_n}$. 由已知 $a_0=0$，$b_0=1$，$f_0=0$，且

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1}+b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1}+b_{n-1} \end{aligned} \qquad (n\geqslant 1),$$

从而有

$$f_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2a_{n-1}+b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}=\frac{2f_{n-1}+1}{f_{n-1}+1},$$

它的递推函数为 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$，令 $f(x)=x$，解得不动点 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.根据定理 2，易得

$$\frac{f_n-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{f_n-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\dfrac{2f_{n-1}+1}{f_{n-1}+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{2f_{n-1}+1}{f_{n-1}+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2\cdot\frac{f_{n-1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{f_{n-1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^{2^n}.$$

因为

$$0<\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+2}<1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{f_n-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} f_n=\frac{1+\sqrt{5}}{1}.$$

5° 特征方程和特征根

定义 3 如果数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+r}=C_1a_{n+r-1}+C_2a_{n+r-2}+\cdots+C_ra_n \quad (n\geqslant 0),$$

其中C_1，C_2，…，C_r为常数，$C_r\neq 0$，则称$\{a_n\}$为r阶线性递推数列，并称方程

$$x^r=C_1x^{r-1}+C_2x^{r-2}+\cdots+C_{r-1}x+C_r$$

为它的特征方程，这个方程的r个根称为这个数列的特征根.

定理 1.3 对于r阶线性递推数列

$$a_{n+r}=C_1a_{n+r-1}+C_2a_{n+r-2}+\cdots+C_{r-1}x+C_r$$
$$(C_r\neq 0,\ n\geqslant 0),$$

(i)如果它的特征方程有r个不同的特征根x_1，x_2，…，x_r，则

$$a_n=\lambda_1x_1^n+\lambda_2x_2^n+\cdots+\lambda_rx_r^n \quad (n\geqslant 0),$$

其中λ_1，λ_2，…，λ_r由数列的前r项a_0，a_1，…，a_{r-1}所待定；

(ii)如果它的特征方程有$S(S<r)$个不同的根$x_1,x_2,\cdots,x_S$，它们的重数分别是t_1，t_2，…，t_S，这里$t_1+t_2+\cdots+t_S=r$，则

$$a_n=P_1(n)x_1^n+P_2(n)x_2^n+\cdots+P_S(n)x_S^n \quad (n\geqslant 0),$$

其中$P_i(n)$分别是n的次数不超过t_i-1的多项式$(1\leqslant i\leqslant S)$，它们由数列的前$r$项所待定.

例 7 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=0$，

$$a_{n+1}=5a_n+\sqrt{24a_n^2+1} \quad (n\geqslant 1). \tag{1}$$

试求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 将(1)式平方，整理得

$$a_{n+1}^2-10a_n\cdot a_{n+1}+(a_n^2-1)=0. \quad (2)$$

调换(2)式的下标，整理得

$$a_{n-1}^2-10a_n\cdot a_{n-1}+(a_n^2-1)=0. \quad (3)$$

从(2)、(3)两式看出，a_{n+1}和a_{n-1}是方程

$$t^2-10a_nt+(a_n^2-1)=0.$$

的两根，从而有

$$a_{n+1}=10a_n-a_{n-1} \quad (n\geqslant 2) \quad (4)$$

(4)的特征方程是$x^2-10x+1=0$，两特征根为$x=5\pm 2\sqrt{6}$，故可设

$$a_n=\lambda_1(5+2\sqrt{6})^n+\lambda_2(5-2\sqrt{6})^n.$$

因为

$$a_1=0,\ a_2=1,$$

所以

$$\lambda_1(5+2\sqrt{6})+\lambda_2(5-2\sqrt{6})=0,$$

$$\lambda_1(5+2\sqrt{6})^2+\lambda_2(5-2\sqrt{6})^2=1,$$

解得

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{6}}{24}(5-2\sqrt{6}),\quad \lambda_2=-\frac{\sqrt{6}}{24}(5+2\sqrt{6}).$$

所以

$$a_n=\frac{\sqrt{6}}{24}[(5+2\sqrt{6})^{n-1}-(5-2\sqrt{6})^{n-1}].$$

此外，从(4)式出发，我们可以用数学归纳法证明：对一切自然数n，a_n是整数.