动力气象学引论习题解

田永祥 编著

科学出版社

动力气象学引论习题解

田永祥 编著

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

《动力气象学引论习题解》是在求解了美国华盛顿大学霍尔顿（J. R. Holton）教授著的《动力气象学引论》一书中全部习题的基础上编写的一本习题解答。本《题解》主要包含有地转风、梯度风、热成风、温度平流、散度、涡度、环流等物理量的计算，大气中各种能量的产生、消耗及其相互转换所需时间的计算；平均动能、涡动动能方程和平均有效位能、涡动有效位能方程的推导，考虑摩擦作用的和由于流体深度随纬度变化而产生的罗斯贝波相速公式的推导；正压、斜压不稳定性的分析；典型龙卷和台风尺度扰动的运动方程的尺度分析，以及天气尺度运动的涡度方程和散度方程的尺度分析等内容。

本《题解》可供气象业务工作者、大专院校气象专业和有关专业的师生参考。

动力气象学引论习题解

田永祥 编著

责任编辑 杨玉梅

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982年 7月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1982年 7月第一次印刷　　印张：5 1/4

印数：0001—4,500　　字数：151,000

统一书号：13031·1938

本社书号：2635·13—15

定价： 0.85 元

前　言

《动力气象学引论》(简称《引论》)是美国华盛顿大学霍尔顿（J. R. Holton）教授一九七二年著的、世界气象组织推荐的一本以准地转理论为核心的动力气象学教科书。这本书概念清楚、系统性逻辑性强，深受我国气象界读者的欢迎。

《动力气象学引论习题解》(简称《题解》)是在求解了《引论》中全部习题的基础上编写的一本习题解答。《题解》中主要包含有天气预报业务和科研工作中常用的各种物理量的计算；各种形式的能量方程和波动运动相速公式的推导；正压、斜压不稳定性的分析；以及适用于大尺度、中小尺度天气系统的运动方程、涡度方程和散度方程的尺度分析等内容。我们期望这本《题解》在加深理解动力气象学的基本原理方面、以及在提高分析和解决动力气象学问题的能力方面起到一定的作用。

在编写《题解》时，力求突出解题的思路和方法；计算题注重量纲的分析运算；证明题尽可能详细地给出中间推导过程；以便于理解和掌握。

在《题解》中，凡需引用《引论》中的公式，都将该式重写，以保持《题解》的完整性和独立性。在《引论》中，公式和图表的序号是分章编列的。在《题解》中，公式的序号分章、题编列[例如，公式(7.3.6)系指第七章习题三第六式]，而图表的序号则通篇连续编列，以便与《引论》中的序号编列方法相区别。

在解题和编写《题解》的过程中，得到我院顾钧禧教授、谭丁副教授，北京大学杨大升副教授，南京大学伍荣生、余志豪

副教授，葛晓真老师，中国人民解放军空军气象学院翟子航、沈春康老师，以及我院刘桂馥、吴林馥、蒋修武、唐东升、徐文金、葛玲、陈久康、彭永清、沈桐立、陈寅生、何金海等老师和雷兆崇同志的热情指导和帮助。朱云同志帮助描绘了全部插图。《题解》完成后，由顾钧禧教授，以及陈久康、彭永清老师审校定稿。这里，谨一并向他们表示深切的感谢！

由于本人水平所限，在《题解》中一定还有不少缺点和错误，希望读者随时提出指正。

目　　录

第一章　绪　言

1.设地球为球形，试计算地面上地球引力方向和作为纬度的函数的有效重力方向之间的夹角。这个夹角的最大值是多少？

设静止在地面上一单位质量质点 p 的地球引力和有效重力之间的夹角为 α。从图 1 中看出

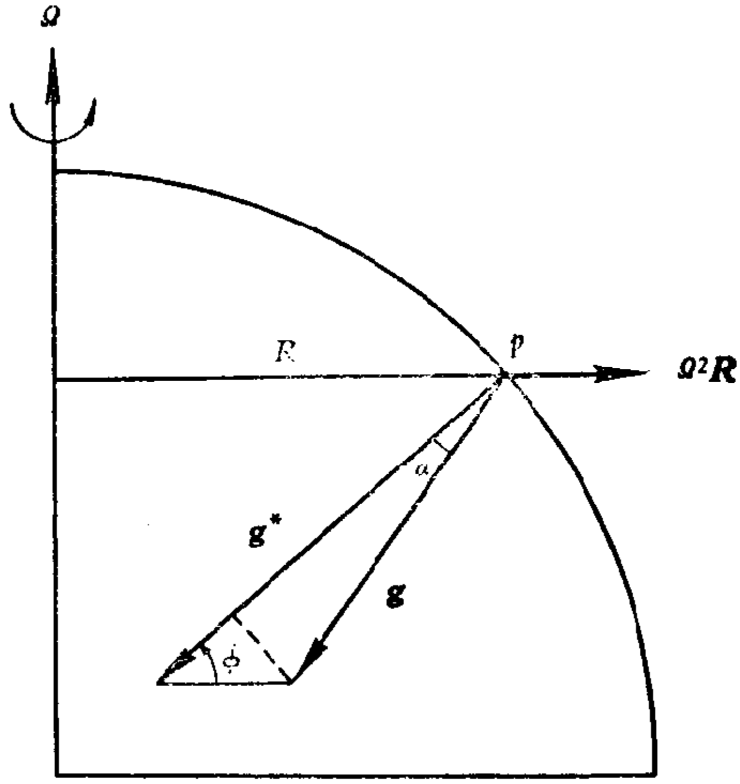

图 1　地球引力和有效重力间的夹角

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Omega^2 R\sin\phi}{g^* - \Omega^2 R\cos\phi} = \frac{\Omega^2 a\sin\phi\cdot\cos\phi}{g^* - \Omega^2 a\cos^2\phi} \qquad (1.1.1)$$

式中 ϕ 为纬度，g^* 为地球引力 $\boldsymbol{g}^*$ 的大小，$\Omega^2 R$ 为离心力 $\Omega^2\boldsymbol{R}$ 的大小，R 为 p 点到转动轴的距离 ($R = a\cos\phi$)，a 为地球平均半径。(1.1.1)式即为计算地球引力和有效重力之间夹角的公式。该式表明，$\mathrm{tg}\alpha$（或 α）随纬度变化。在赤道处，因 $\sin\phi = 0$，则有 $\mathrm{tg}\alpha = 0$ 或 $\alpha = 0$；在极地处；因 $\cos\phi = 0$，则有 $\mathrm{tg}\alpha = 0$ 或 $\alpha = 0$。即在极地和赤道

地球引力和有效重力均在同一方向。由于离心力大小和地球引力方向的变化，在极地和赤道之间的某纬度处角 α 会有极值存在。

下面就来求角 α 的极值所在的纬度。将(1.1.1)式对纬度 ϕ 微分，得

$$\frac{\partial \mathrm{tg}\alpha}{\partial \phi}=\frac{\Omega^2 a(g^*-\Omega^2 a\cos^2\phi)(\cos^2\phi-\sin^2\phi)-2\Omega^4 a^2\sin^2\phi\cdot\cos^2\phi}{(g^*-\Omega^2 a\cos^2\phi)^2}$$

令上式等于零，即等式右端分式的分子为零：

$$(g^*-\Omega^2 a\cos^2\phi)(\cos^2\phi-\sin^2\phi)-2\Omega^2 a\sin^2\phi\cdot\cos^2\phi=0$$

展开并整理上式，得到

$$(\Omega^2 a-2g^*)\sin^2\phi-(\Omega^2 a-g^*)=0$$

因纬度 ϕ 变化于 0°—90° 之间，$\sin\phi$ 为正值，所以，由上式解出 $\sin\phi$，得

$$\sin\phi=\sqrt{\frac{\Omega^2 a-g^*}{\Omega^2 a-2g^*}} \tag{1.1.2}$$

由 (1.1.2) 式所确定的 ϕ 即为角 α 的极值所在的纬度。为求出这一纬度值，由(1.3)*式

$$g^*=-\frac{GM}{r^2}\left(\frac{r}{r}\right)$$

得到在球形的地球表面上 ($z=0, r=a+z=a$) 地球引力的大小为

$$g^*=\frac{GM}{a^2}$$

用厘米克秒制，将引力常数 $G=6.668\times10^{-8}$ 达因厘米²克⁻²、地球质量 $M=5.976\times10^{27}$ 克和地球平均半径 $a=6.371\times10^8$ 厘米等各物理量的数值代入上式，得到

$$g^*=\frac{6.668\times10^{-8}\times5.976\times10^{27}}{(6.371\times10^8)^2}\left[\frac{\text{厘米}^3\text{秒}^{-2}\text{克}^{-1}\cdot\text{克}}{\text{厘米}^2}\right]$$

$$=981.73\ [\text{厘米秒}^{-2}]$$

已知地球自转角速度的大小 $\Omega=7.292\times10^{-5}$ 秒⁻¹，于是求得 $\Omega^2 a$ 的数值为

$$\Omega^2 a=(7.292\times10^{-5})^2\times6.371\times10^8\ [\text{秒}^{-2}\cdot\text{厘米}]$$

* 凡两个数的公式编号均指《动力气象学引论》一书中的公式。——编者注

$$=3.39\ [\text{厘米秒}^{-2}]$$

将 g^* 和 $\Omega^2 a$ 的数值代入 (1.1.2) 式，得到

$$\sin\phi=\sqrt{\left(\frac{3.39-981.73}{3.39-2\times 981.73}\right)\left[\frac{\text{厘米秒}^{-2}}{\text{厘米秒}^{-2}}\right]}$$

$$=0.7065$$

而

$$\phi=44°57'$$

即在纬度 $\phi=44°57'$ 处，$\mathrm{tg}\alpha$（或 α）有极值。

地球引力和有效重力之间的夹角为正角。在极地或赤道处 $\alpha=0$，而在极地到赤道之间仅有一个纬度使角 α 有极值。因此，这一极值必然是极大值。将 $\phi=44°57'$ 和其它各物理量的数值代入(1.1.1)式，得到

$$\mathrm{tg}\alpha=\left[\frac{3.39\times 0.7065\times 0.7077}{981.73-3.39\times(0.7077)^2}\right]\left[\frac{\text{厘米}^2\text{秒}^{-2}}{\text{厘米}^2\text{秒}^{-2}}\right]$$

$$=0.0017$$

而

$$\alpha=6'$$

即在球形的地球表面上，地球引力方向和有效重力方向之间的夹角的最大值为 $6'$。

2. 计算赤道上空有效重力等于零的高度。一地球卫星进入那个高度的轨道中，其旋转周期是多少？

由(1.7)式

$$\boldsymbol{g}\equiv\boldsymbol{g}^*+\Omega^2\boldsymbol{R}$$

可知，在赤道上空有效重力等于零的高度上，地球引力和离心力刚好大小相等而方向相反，即

$$\boldsymbol{g}^*=-\Omega^2\boldsymbol{R}$$

取上式两端各矢量的模，得到

$$g^*=\Omega^2 R \tag{1.2.1}$$

式中 g^* 为地球引力的大小，

$$g^*=\frac{GM}{r^2} \tag{1.2.2}$$

而 R 为地心到赤道上空有效重力为零的高度的距离，

$$R = r = a + z \tag{1.2.3}$$

将(1.2.2)，(1.2.3)两式代入(1.2.1)式并解出高度 z，得

$$z = \sqrt[3]{\frac{GM}{\Omega^2}} - a \tag{1.2.4}$$

用厘米克秒制，将各物理量的数值代入(1.2.4)式，得到

$$z = \sqrt[3]{\frac{6.668\times10^{-8}\times5.976\times10^{27}}{(7.292\times10^{-5})^2}\left[\frac{\text{厘米}^3\text{秒}^{-2}\text{克}^{-1}\cdot\text{克}}{\text{秒}^{-2}}\right]}$$
$$-6.371\times10^8[\text{厘米}]=3.5789\times10^9[\text{厘米}]$$
$$=35789[\text{公里}]$$

即在赤道上空 35789 公里的高度上有效重力为零。

一地球卫星进入该高度的轨道运行，为了保持有效重力为零，其旋转角速度的大小 ω 必须与地球自转角速度的大小 Ω 相等。由此，求得卫星的旋转周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \tag{1.2.5}$$

将各物理量的数值代入(1.2.5)式，得到

$$T \simeq \frac{2\times3.1416}{7.292\times10^{-5}}\left[\frac{1}{\text{秒}^{-1}}\right]$$
$$\simeq 86166[\text{秒}]$$

即在赤道上空有效重力为零的高度上运行的卫星的旋转周期也是一天(一恒日)，它是与地球同步的。

3.如果一个垒球运动员在纬度 30° 处扔出一球，4 秒钟内飞出的水平距离为 100 米，问由于地球自转，其水平偏离是多少?

由(1.11)式和(1.9)式可知，在只考虑水平运动的情形下 $(w=0)$，由于科里奥利力而产生的加速度为

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{c_0} = 2\Omega v\sin\phi$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{c_0} = -2\Omega u\cos\phi$$

或写成矢量形式

$$\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)_{c_0} = -2\Omega\sin\phi\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} \tag{1.3.1}$$

上式表明，在北半球水平面上，运动的物体(例如一垒球)因科里奥利力将偏向运动方向的右方。

取(1.3.1)式两端各矢量的模，得

$$\left|\left(\frac{dV}{dt}\right)_{c_0}\right| = 2\Omega V\sin\phi \tag{1.3.2}$$

式中 V 为垒球运行的速率。由上面的讨论可知，扔出的垒球将偏向运动方向的右方。在这个方向上，垒球加速度的大小即为其侧向速率 V_L 的变率 dV_L/dt。于是，(1.3.2)式可改写为

$$\frac{dV_L}{dt} = 2\Omega V\sin\phi \tag{1.3.3}$$

设 $V=V_0$ 为常数，且垒球运行经过的纬度也为常数。将(1.3.3)式对时间积分，得

$$V_L = 2\Omega V_0 t\sin\phi \tag{1.3.4}$$

求垒球的水平偏离必须对时间积分(1.3.4)式

$$\int_0^{t_0} V_L dt = \int_{s_0}^{s_0+\delta s} ds = 2\Omega V_0\sin\phi\int_0^{t_0}$$

于是，垒球的水平偏离为

$$\begin{aligned}\delta s &= \Omega V_0 t_0^2\sin\phi\\ &= 7.292\times10^{-5}\times\frac{100}{4}\times4^2\times0.5[\text{秒}^{-1}\cdot\text{米秒}^{-1}\cdot\text{秒}^2]\\ &\simeq 1.5\times10^{-2}\ [\text{米}]\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

即垒球偏离其运动方向的右方约1.5厘米。

4.在 43°N 处无摩擦的水平面上，放置直径为 4 厘米的两球，相离 100 米。 如果两球受到冲击以相等的速率对准相向运动，问必须以多大的速率移动它们才能恰好相擦而过?

首先对本题作些分析。参见图 2，设在 43°N 处无摩擦的水平面上，放置直径为 4 厘米的 A，B 两小球。如果两球受到冲击对准相向运动，由于地球的自转，向东运动的小球 A 将向南偏离，而向西运动的小球 B 将向北偏离。当它们接近于 C 点时，若 A，B 两小球分别向南、向北偏离 2 厘米(即它们的直径的一半长度)，则刚好会相擦而过。 假设两小球都作匀速运动，且其速率相等。当它们接近于 C 点时，各自移动的距离为 50 米。根据这些条件，便可以求出小球移动的速率。

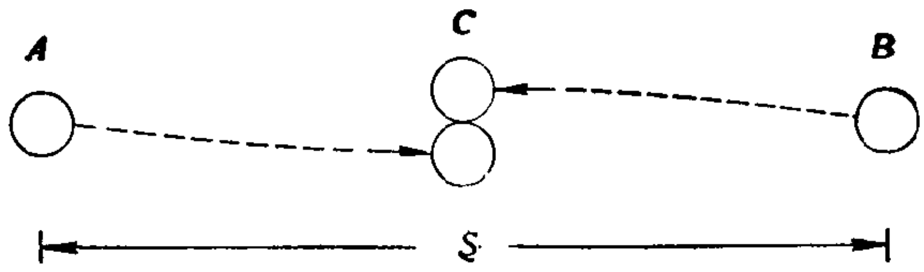

图 2

下面就来具体计算本题。以向东移动的小球 A 为例，设其水平偏离足够小，因而可令它的移动速度 $u=u_0$ 为常数，它所经过的纬度也为常数。于是，将(1.9)式

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{c_0}=-2\Omega u\sin\phi$$

对时间积分，得

$$v=-2\Omega u_0 t\sin\phi \tag{1.4.1}$$

将(1.4.1)式再对时间积分，得

$$\int_0^{t_0} v\,dt=\int_{y_0}^{y_0+\delta y} dy=-2\Omega u_0\sin\phi\int_0^{t_0} t\,dt$$

积分结果为

$$\delta y=-\Omega u_0 t_0^2\sin\phi \tag{1.4.2}$$

因小球作匀速运动，故 $t_0=(S/2)/u_0$（S 为 A，B 两小球间的距离）。于是，(1.4.2)式可改写为

$$\delta y=-\Omega u_0\left(\frac{S/2}{u_0}\right)^2\sin\phi$$

由上式解出 u_0，得

$$u_0=-\frac{\Omega(S/2)^2\sin\phi}{\delta y} \tag{1.4.3}$$

用米千克秒制，将 $\delta y=-0.02$ 米（因小球 A 向南水平偏离，故 δy 为负值）和其它各物理量的数值代入(1.4.3)式，得到小球 A 的速率为

$$u_0=-\frac{7.292\times10^{-5}\times(100/2)^2\times0.682}{-0.02}\left[\frac{秒^{-1}\cdot米^2}{米}\right]$$

$$=6.22[米秒^{-1}]$$

由于 A，B 两小球移动的速率相等，所以，受到冲击的两小球皆以 6.22

米秒$^{-1}$的速率对准相向运动，在 C 点恰好会相擦而过。

5.在 $43°N$ 处有一质量为 2×10^8 克的机车以 50 米秒$^{-1}$的速率沿一水平直线轨道行驶。问作用于铁轨的侧向力多大？当机车分别向东和向西行驶时，对于这两种情况，比较铁轨所作用的向上的反作用力。

由于地球的自转，作水平直线运动的质量为 m 的机车作用于铁轨的侧向力为

$$\boldsymbol{F}_L = m\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)_{c_o} \qquad (1.5.1)$$

将习题 3 中的(1.3.1)式代入(1.5.1)式，得

$$\boldsymbol{F}_L = -2m\Omega\sin\phi\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V} \qquad (1.5.2)$$

上式表明，侧向力指向机车运动方向的右方。取(1.5.2)式两端各矢量的模，得

$$F_L = 2m\Omega V\sin\phi \qquad (1.5.3)$$

式中 V 为机车行驶的速率。用米千克秒制，将各物理量的数值代入(1.5.3)式，得到

$$\begin{aligned} F_L &= 2\times2\times10^5\times7.292\times10^{-5}\times50\times0.682[\text{千克·秒}^{-1}\text{·米秒}^{-1}] \\ &= 9.9463\times10^2[\text{牛顿}] \\ &= 1.0139\times10^2[\text{千克重}] \end{aligned}$$

即机车向右方作用于铁轨的侧向力为 1.0139×10^2 千克重。

机车沿东西方向行驶时，它对铁轨向下的作用力等于机车本身的重力与机车所受到的垂直方向上的科里奥利力（它造成机车视重的微小变化）之代数和，即

$$F_A = -mg + m\left(\frac{dw}{dt}\right)_{c_o} \qquad (1.5.4)$$

将(1.10)式

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{c_o} = 2\Omega u\cos\phi$$

代入(1.5.4)式，得

$$F_A = -mg + 2m\Omega u\cos\phi \qquad (1.5.5)$$

当机车向东行驶时，则有 $u = 50$ 米秒$^{-1}$。将有效重力 $g = 9.81$ 米秒$^{-2}$和其它各物理量的数值代入(1.5.5)式，得到机车对铁轨向下的作用力

为

$$F_{A_1}=(-2\times10^5\times9.81+2\times2\times10^5\times7.292\times10^{-5}\times50\times0.7314)$$

$$\cdot[千克\cdot米秒^{-2}]$$

$$=(-1.9620\times10^6+1.0667\times10^3)[牛顿]$$

$$=-1.9609\times10^6[牛顿]$$

$$=-1.9989\times10^5[千克重]$$

根据牛顿第三定律，铁轨对机车所作用的向上的反作用力 F'_{A1} 与机车对铁轨向下的作用力 F_{A1} 大小相等方向相反。因此有

$$F'_{A1}=-F_{A1}=1.9989\times10^5\,[千克重] \tag{1.5.6}$$

当机车向西行驶时，则有 $u=-50$ 米秒$^{-1}$。将各物理量的数值代入(1.5.5)式，得到机车对铁轨向下的作用力为

$$F_{A_2}=[-2\times10^5\times9.81+2\times2\times10^5\times7.292\times10^{-5}\times(-50)$$

$$\times0.7314]\,[千克\cdot米秒^{-2}]$$

$$=(-1.9620\times10^6-1.0667\times10^3)\,[牛顿]$$

$$=-1.9631\times10^6\,[牛顿]$$

$$=-2.0011\times10^5\,[千克重]$$

而铁轨对机车所作用的向上的反作用力为

$$F'_{A2}=-F_{A2}=2.0011\times10^5\,[千克重] \tag{1.5.7}$$

比较(1.5.6)式和(1.5.7)式可知，机车向西行驶时，铁轨对机车所作用的向上的反作用力比向东行驶时为大。

6.不计空气阻力的影响，求赤道处从高度为 h 的一固定平台上下落物体的水平位移。若 $h=5$ 公里，其位移数值是多少？

在只考虑垂直运动的情形下 $(u=v=0)$，由(1.11)式

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{c_o}=2\Omega v\sin\phi-2\Omega w\cos\phi$$

得到由于科里奥利力而产生的加速度为

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{c_o}=-2\Omega w\cos\phi \tag{1.6.1}$$

若不计空气阻力的影响，则从平台上下落的物体作自由落体运动，其下落速度为

$$w=-gt$$

将上式代入(1.6.1)式，得到

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{e_0} = 2\Omega gt\cos\phi \tag{1.6.2}$$

将(1.6.2)式对时间积分，得

$$u = \Omega g t^2 \cos\phi \tag{1.6.3}$$

求物体的水平位移必须对时间积分(1.6.3)式

$$\int_0^{t_0} u dt = \int_{x_0}^{x_0+\delta x} dx = \Omega g\cos\phi\int_0^{t_0} t^2 dt$$

积分结果为

$$\delta x = \frac{1}{3}\Omega g t_0^3 \cos\phi \tag{1.6.4}$$

式中 t_0 为物体从高度为 h 的平台上自由下落到地面所需要的时间，

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

将上式代入(1.6.4)式中，得到下落物体的水平位移为

$$\delta x = \frac{1}{3}\ \Omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\cos\phi \tag{1.6.5}$$

用米千克秒制，将各物理量的数值代入(1.6.5)式，得到

$$\delta x = \frac{1}{3}\times 7.292\times 10^{-5}\times 9.81\times\left(\frac{2\times 5000}{9.81}\right)^{3/2}\times 1[秒^{-1}\cdot米秒^{-2}\cdot秒^{3}]$$

$$= 7.76[米]$$

上式表明，下落物体向东位移了 7.76 米。

7.在纬度 φ 处，一枪弹以初速 w_0 垂直向上发射。忽略空气的阻力，当返回地面时，它水平位移了多大距离？（在垂直运动方程中，与 g 相比，$2\Omega u\cos\phi$ 可忽略不计。）

首先对本题作些分析。参见图 3，设枪弹以初速 w_0 垂直向上发射。在上升过程中，由于地球的自转，枪弹将向西偏离。根据已知的条件，可计算枪弹垂直向上发射达到最大高度时向西的水平位移 δx_1。枪弹达到最大高度后，便立即向下作自由落体运动。在下落过程中，因枪弹已具有一向西的运动速度，故它将继续向西位移；另一方面，由于地球的自转，它将向东偏离。根据已知的条件，可计算枪弹由最大高度返回地面时的水平位移 δx_2。而枪弹垂直向上发射返回地面的总水平

位移便是 δx_1 与 δx_2 的代数和。

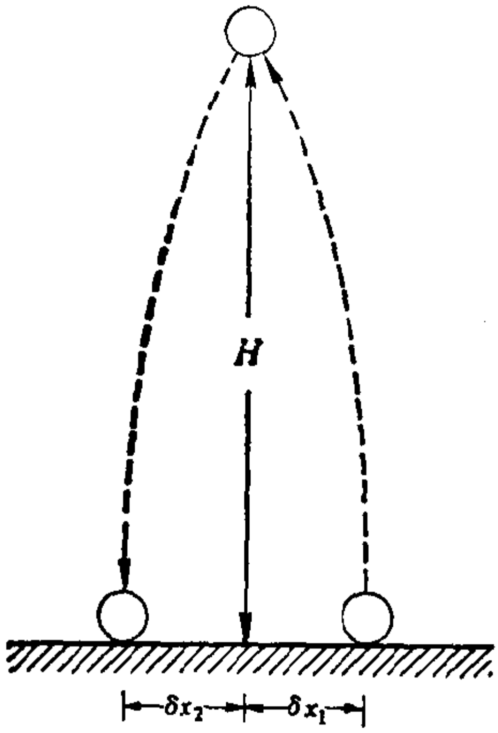

图 3

下面就来具体计算本题。若忽略空气的阻力并略去 $2\Omega u\cos\phi$ 项，则垂直运动方程可写成

$$\frac{dw}{dt}=-g$$

对时间积分上式，便得到任一时刻枪弹的上升速度

$$w_1=w_0-gt$$

式中 w_0 即为枪弹垂直向上发射的初速。将上式代入习题 6 中的(1.6.1)式，得

$$\left(\frac{du_1}{dt}\right)_{c_0}=-2\Omega(w_0-gt)\cos\phi \tag{1.7.1}$$

将(1.7.1)式对时间积分，得

$$u_1=-2\Omega\left(w_0t-\frac{1}{2}gt^2\right)\cos\phi \tag{1.7.2}$$

求枪弹达到最大高度时向西的水平位移必须对时间积分(1.7.2)式

$$\int_0^{t_1}u_1dt=\int_{x_0}^{x_0+\delta x_1}dx=-2\Omega\cos\phi\int_0^{t_1}\left(w_0t-\frac{1}{2}gt^2\right)dt$$

积分结果为

$$\delta x_1=-2\Omega\left(\frac{1}{2}w_0t_1^2-\frac{1}{6}gt_1^3\right)\cos\phi \tag{1.7.3}$$

式中 t_1 为枪弹达到最大高度所需要的时间，

$$t_1=\frac{w_0}{g} \tag{1.7.4}$$

将(1.7.4)式代入(1.7.3)式，得到

$$\delta x_1=-\frac{2}{3}\frac{\Omega w_0^3}{g^2}\cos\phi \tag{1.7.5}$$

上式表明，枪弹垂直向上发射达到最大高度时向西水平位移了 $\frac{2}{3}\frac{\Omega w_0^3}{g^2}\cos\phi$ 的距离。

枪弹达到最大高度后，若忽略空气阻力的影响，便立即向下作自由落体运动。其任一时刻的下落速度为

$$w_2 = -gt$$

将上式代入习题 6 中的(1.6.1)式，得

$$\left(\frac{du_2}{dt}\right)_{c_0} = 2\Omega gt\cos\phi \tag{1.7.6}$$

将(1.7.6)式对时间积分，得

$$u_2 = \Omega gt^2\cos\phi + u_H \tag{1.7.7}$$

式中 u_H 为在最大高度 H 处枪弹向西的运动速度。将(1.7.4)式代入(1.7.2)式，得到

$$u_H = -\frac{\Omega w_0^2}{g}\cos\phi$$

于是，(1.7.7)式可改写成

$$u_2 = \Omega gt^2\cos\phi - \frac{\Omega w_0^2}{g}\cos\phi \tag{1.7.8}$$

求枪弹下落到地面时的水平位移必须对时间积分(1.7.8)式

$$\int_0^{t_2} u_2 dt = \int_{x_1}^{x_1+\delta x_2} dx = \Omega g\cos\phi\int_0^{t_2} t^2 dt - \frac{\Omega w_0^2}{g}\cos\phi\int_0^{t_2} dt$$

积分结果为

$$\delta x_2 = \frac{1}{3}\Omega g t_2^3\cos\phi - \frac{\Omega w_0^2}{g}t_2\cos\phi \tag{1.7.9}$$

式中 t_2 为枪弹下落到地面所需要的时间，

$$t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

而枪弹达到的最大高度可由下式确定

$$H = \frac{w_0^2}{2g}$$

于是求得

$$t_2 = \frac{w_0}{g}$$

将上式代入(1.7.9)式，得到枪弹由最大高度返回地面时的水平位移为

$$\delta x_2 = -\frac{2}{3}\frac{\Omega w_0^3}{g^2}\cos\phi \tag{1.7.10}$$