

实变函数与泛函分析

郭大钧 黄春朝 梁方豪 编

山东大学出版社

实变函数与泛函分析

郭大钧 黄春朝 梁方豪 编

*

山东大学出版社出版

山东省新华书店发行

济南历下印刷二厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 18.25 字数 470千字

1986年10月第1版 1986年10月 第1次印刷

印数: 1—5,000

书号: 13336·9 定价: 3.70元

内 容 提 要

本书共分十四章。第一章至第六章是实变函数的内容，包括集合与点集、测度、可测函数与 Lebesgue 积分、Riemann-Stieltjes 积分和 Lebesgue-Stieltjes 积分等，并且对抽象测度和积分作了介绍；第七章至第十四章是泛函分析的内容，包括距离空间与 Banach 空间、Hilbert 空间、线性算子与线性泛函、全连续算子、自共轭算子等，并且对抽象函数与 Banach 代数、凸锥理论、广义函数作了介绍。每章末尾附有相当数量的习题。

本书把以上内容分为基本的、非基本的两个方面。对基本内容写得较为细致详尽，特别注意做到深入浅出、直观易懂；对非基本内容，标题前加了*号，供选读。

本书可作为综合性大学和师范学院数学系《实变函数》、《泛函分析》两门课的教材或教学参考书，也可供数学爱好者自学这两门课之用。

1984/53/106

序

本书是根据我们在山东大学数学系多次讲授《实变函数》和《泛函分析》两门课的讲义合并、修改而成的。全书共分十四章。第一章至第六章是实变函数的内容,包括集合与点集、测度、可测函数与 Lebesgue 积分、有界变差函数与 Riemann-Stieltjes 积分等,其中以 Lebesgue 积分为重点;第七章至第十四章是泛函分析的内容,包括距离空间与 Banach 空间、Hilbert 空间、线性算子与线性泛函、全连续算子、自共轭算子等。每章末尾附有相当数量的习题供选用。

据我们的实践,除去打*的内容外,实变函数部分可用72学时讲完,泛函分析部分可用54学时讲完。打*的内容包括抽象测度与抽象积分、抽象函数与 Banach 代数、凸锥理论、广义函数等,这些内容可以不讲或选讲或让优秀学生自学。

《实变函数》和《泛函分析》是数学系两门重要的专业基础课,它对于数学、计算数学、控制理论等专业都是必需的工具。

《实变函数》课较之《数学分析》课,在观点和思想方法上有所飞跃,学生常感到困难。因此,我们在编写过程中注意了贯彻由浅入深、由特殊到一般、仔细分析来龙去脉等符合认识规律的原则。由于我们水平所限,书中错误和缺点在所难免,敬请同志们和读者们批评指正。

郭大钧

1984年12月于济南

目 录

第一章 集合	1
§ 1 集合·集合的运算	1
§ 2 映射·集合的对等	8
§ 3 可列集与不可列集·集合的基数	13
§ 4 可列集的判定	17
§ 5 连续势集的判定	22
习题	27
第二章 点集	31
§ 1 R^N 空间·区间·距离	31
§ 2 内点与开集	34
§ 3 聚点与闭集	36
§ 4 开集和闭集的构造	39
§ 5 点集间的距离·有界闭集的性质	44
§ 6 完备集·Cantor集	47
习题	50
第三章 测度	53
§ 1 引言	53
§ 2 Lebesgue外测度	59
§ 3 有界Lebesgue可测集	66
§ 4 无界Lebesgue可测集	74
§ 5 不可测集的例	81
§ 6 集合的乘积· R^p 、 R^q 与 R^{p+q} 中可测集间的关系	84
* § 7 Lebesgue-Stieltjes测度	87

* § 8 抽象测度理论初步	92
习题	120
第四章 可测函数	124
§ 1 广义实函数及相关的集合	124
§ 2 Lebesgue 可测函数的定义	129
§ 3 可测函数与简单函数	131
§ 4 可测函数的某些性质	135
§ 5 Egorov 定理	139
§ 6 可测函数列的依测度收敛	142
§ 7 可测函数与连续函数	147
习题	155
第五章 可测函数的积分	160
§ 1 Lebesgue 积分的定义及初等性质	161
§ 2 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系	172
§ 3 逐项积分定理	178
§ 4 Fubini 定理	186
§ 5 p 幂可积函数	194
* § 6 Lebesgue-Stieltjes 积分 · 抽象可测函数的积分	198
习题	202
第六章 微分与 Lebesgue 不定积分 ·	
Riemann-Stieltjes 积分	209
§ 1 单调函数的微分性质	209
§ 2 有界变差函数	220
§ 3 绝对连续函数与 Lebesgue 不定积分	227
§ 4 Riemann-Stieltjes 积分	237
习题	246
第七章 距离空间 · 赋范线性空间	251
§ 1 距离空间的定义及例	251

§ 2	赋范线性空间的定义及例	255
§ 3	距离空间中的若干概念·连续映射	265
§ 4	压缩映象原理及其应用	269
§ 5	距离空间的完备化	275
§ 6	可分距离空间	281
§ 7	距离空间中集合的列紧性	283
§ 8	关于赋范线性空间的若干概念	293
§ 9	无限维赋范线性空间的特征	299
	习题	301
第八章	线性算子	307
§ 1	线性算子的基本性质	307
§ 2	有界线性算子空间	313
§ 3	共鸣定理及其应用	318
§ 4	开映射定理与逆算子定理·闭图象定理	325
	习题	329
第九章	线性泛函	332
§ 1	线性泛函的基本性质	332
§ 2	有界线性泛函的延拓	333
§ 3	某些空间上有界线性泛函的表示	340
§ 4	共轭算子	349
§ 5	弱*收敛与弱收敛·自反空间	351
* § 6	凸集分离定理	357
	习题	361
第十章	全连续线性算子	364
§ 1	全连续算子的定义和性质	364
§ 2	全连续线性算子方程的 Riesz-Schauder 理论	370
§ 3	全连续线性算子的谱	382
* § 4	全连续线性算子的分解	385

习题	391
第十一章 Hilbert 空间上的线性算子	395
§ 1 Hilbert 空间	395
§ 2 Riesz 表示定理	410
§ 3 自共轭算子的谱	412
§ 4 自共轭全连续算子的谱分解	421
§ 5 投影算子	426
§ 6 非负算子	431
§ 7 自共轭算子的谱分解	436
* § 8 双线性泛函	451
* § 9 保范算子	459
* § 10 正常算子	467
习题	471
* 第十二章 抽象函数 · Banach 代数	476
§ 1 抽象函数	476
§ 2 Banach 代数	484
* 第十三章 凸锥理论	496
§ 1 线性半群与锥	496
§ 2 正线性泛函	504
§ 3 正线性算子	513
* 第十四章 广义函数	527
§ 1 基本函数空间与广义函数	528
§ 2 广义函数的微分	538
§ 3 广义函数的卷积	547
§ 4 广义函数的 Fourier 变换	556
§ 5 广义微分方程	564
习题	569
参考书目	571

第一章 集合

集合论创始自德国数学家Cantor,从十九世纪末叶逐渐发展到今天,它不仅成为数学的一个分支,而且是全部数学的基础。本章讲述集合论的初步知识,作为实变函数论的基础。

§ 1 集合 · 集合的运算

1.1 集合

集合是数学中的一个基本概念,要把这个概念加以严格的规定并不是一件容易的事情。正象几何学中“点”、“直线”、“平面”一样,“集合”这个概念必须用若干公理组成的公理系来规定。目前,对“集合”这个概念有两种不同的规定,一种是Zermelo等人作出的ZFC公理系,另一种是Bernays等人作出的BNG公理系。我们这里不准备纠缠“集合”这个概念的严格规定,而只给出如下朴素的说法:一定范围内的所有个体事物,当把它们看作一个整体时,这个整体称为一个**集合**(或**集**),而其中的每一个个体事物称为这个集合的**元素**(或**元**)。一个集合的各个元素必须是彼此相异的;哪些个体事物是给定集合的元素必须是确定无疑的。下面我们举出集合的几个例子。

例 1 自然数的全体(称为**自然数集**,通常记作 N)。

例 2 实数的全体(称为**实数集**,即 R^1)。

例 3 小于1的正数的全体(即开区间 $(0, 1)$)。

例 4 英文字母的全体。

本书常用大写字母 A 、 B 、 X 、 Y 等表示集合，用小写字母 a 、 b 、 x 、 y 等表示集合的元素。 a 是集合 A 的元素记作 $a \in A$ ，读作 a 属于 A ； a 不是集合 A 的元素记作 $a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$ ，读作 a 不属于 A 。

如果集合 A 是具有某性质 P 的个体事物的全体，我们往往用下面的形式来表示 A ：

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如 $\{x \mid x = \sqrt{r}, r \geq 0, r \text{ 为有理数}\}$ （其中的逗号“，”意为“并且”）即非负有理数的算术平方根的全体，它还可以写成 $\{\sqrt{r} \mid r \geq 0, r \text{ 是有理数}\}$ 。如果能明确的写出集合 A 的所有元素，也可以把所有元素列举在大括号里来表示 A 。例如 $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ 还可表示成 $\{-1, 1\}$ 。再如自然数集 N 可表示成 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 。

为了讨论问题方便，我们还引入不含任何元素的集，称为**空集**，记作 ϕ ，例如 $\{x \mid x > 1, x < 0\}$ 就是空集。空集 ϕ 以及具有 n （ n 为自然数）个元素的集统称为**有限集**。只具有一个元素的有限集称为**单元素集**，只具有元素 a 的单元素集可记作 $\{a\}$ ，但不能记作 a ，不是有限集的集统称为**无限集**。

若属于集 A 的元素都属于集 B ，就称 A 是 B 的**子集**，记作 $A \subset B$ ，读作 A 包含于 B ，或记作 $B \supset A$ ，读作 B 包含 A 。我们认为空集 ϕ 是任何集的子集。若 $A \subset B$ ，而 B 中确有元素不属于 A ，就称 A 是 B 的**真子集**。

若属于集 A 的元素都属于集 B ，属于集 B 的元素也都属于集 A ，即 A 、 B 由相同的元素组成，就称 A 与 B **相等**，记作 $A = B$ 或 $B = A$ 。 A 与 B 不相等记作 $A \neq B$ 或 $B \neq A$ 。

命题1 对任何集 A 、 B 、 C ，均有

(i) $A \subset A$ ；（反身性）

(ii) 若 $A \subset B$ ， $B \subset A$ ，则 $A = B$ ；（反对称性）

(iii) 若 $A \subset B$ ， $B \subset C$ ，则 $A \subset C$ 。（传递性）

要特别注意：一个集合的元素与此集合间只能有关系“ \in ”，不能有关系“ \subset ”，一个集合的子集与此集合间只能有关系“ \subset ”，不能有关系“ \in ”。例如， $a \in A$ 不能写成 $a \subset A$ ，而 $\{a\} \subset A$ 不能写成 $\{a\} \in A$ ，否则将造成混乱。

1.2 集合的运算

从给定的一些集出发，我们可以通过所谓“集合的运算”作出新的集，最常用的集运算有“并”、“交”、“差”三种。

定义1 设 A 、 B 是两个集， A 中的所有元素及 B 中的所有元素合起来所组成的集称为 A 与 B 的**并集**或 A 与 B 的**并**，记作 $A \cup B$ 或 $A + B$ （图1）。即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

同时属于 A 与 B 两者的所有元素所组成的集称为 A 与 B 的**交集**或 A 与 B 的**交**，记作 $A \cap B$ 或 AB （图2）。即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

当 $A \cap B \neq \emptyset$ 时称 A 与 B **相交**；当 $A \cap B = \emptyset$ 时称 A 与 B **无交**。

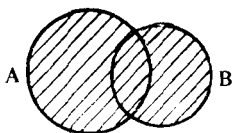


图1 $A \cup B$

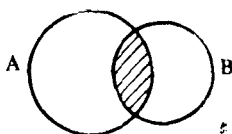


图2 $A \cap B$

例5 设 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{3, 4\}$ ，则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ （注意，不要写作 $A \cup B = \{1, 2, 3, 3, 4\}$ ）， $A \cap B = \{3\}$ （注意，不能写作 $A \cap B = 3$ ）。

定理1

- (i) $A \cup B = B \cup A$ ； $A \cap B = B \cap A$ 。（交换律）
- (ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ；
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 。（结合律）

- (iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (分配律)
- (iv) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$. (幂等律)

这些关系式从图形上来看是明显的。图形能够帮助我们理解和思考，但图形的观察毕竟不能代替关系式的证明。

证明 仅证(iii)的第一式 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

设 $x \in A \cap (B \cup C)$ ，则 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$ 。从而 $x \in B$ 或 $x \in C$ 。不妨设 $x \in B$ 。于是 $x \in A \cap B$ ，更有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

设 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ，则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$ 。不妨设 $x \in A \cap B$ ，则 $x \in A$ 且 $x \in B$ ，从而 $x \in B \cup C$ ，于是 $x \in A \cap (B \cup C)$ 。

由以上两个方面，(iii)的第一式得证。】

设 I 是一个非空集合，若相应于 I 的每个元 α 我们都给定了一个集 A_α (对不同的 α ，相应的 A_α 可能相同)，这样便给定了一族集，这族集通常记作 $A_\alpha, \alpha \in I$ ，称为以 I 为标号集的一族集 (I 的元 α 称为集 A_α 的标号)，当把其看作一个整体时称为以 I 为标号集的一个集族，通常记作 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (当标号集 I 不说自明时也可简记作 $\{A_\alpha\}$)。

若 $I = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ，这时 $A_\alpha, \alpha \in I$ 即一系列集 A_1, A_2, A_3, \dots (也可记作 $A_i, i = 1, 2, 3, \dots$)，当把其看作一个整体时称为一个集列或一个集串，记作 $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ 或 $\{A_i\}_1^\infty$ (有时简记作 $\{A_i\}$)。若 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ，这时 $A_\alpha, \alpha \in I$ 即 n 个集 A_1, A_2, \dots, A_n (也可记作 $A_i, i = 1, 2, \dots, n$)，当把其看作一个整体时记作 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 或 $\{A_i\}_1^n$ (有时简记作 $\{A_i\}$)。

定义 2 设 $A_\alpha, \alpha \in I$ 是任意一族集，一切 $A_\alpha (\alpha \in I)$ 中的所有元素合起来所组成的集称为这族集的并集或并，记作

$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 或 $\sum_{\alpha \in I} A_\alpha$. 即

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \text{存在某个 } \alpha \in I \text{ 使 } x \in A_\alpha\}.$$

同时属于每个集 A_α ($\alpha \in I$) 的所有元素所组成的集称为这族集的交集或交, 记作 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 或 $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$. 即

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \text{对每个 } \alpha \in I \text{ 都有 } x \in A_\alpha\}.$$

当标号集 I 不说自明时, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 可简记作 $\bigcup_{\alpha} A_\alpha$, 类似地有 $\bigcap_{\alpha} A_\alpha$, $\sum_{\alpha} A_\alpha$, $\prod_{\alpha} A_\alpha$.

当 $I = \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 时, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 又可写作 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$, 这个运算通常称为“可列并”运算。当 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ 时, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 又可写作 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 或 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 这个运算通常称为“有限并”运算。类似地可以定义“可列交”运算 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$, 以及“有限交”运算 $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$. (“一列集 A_1, A_2, A_3, \dots 的并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ”有时简写成“一列集 A_i 的并 $\bigcup_i A_i$ ”, “ n 个集 A_1, A_2, \dots, A_n 的交 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ”有时简写成“ n 个集 A_i 的交 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ”, 如此等等。)

例 6 $\bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ x \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \right\} = \{x \mid 0 < x < 1\}.$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \mid -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n} \right\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

例 7 相应于开区间 $(0, 1)$ 中的每一点 α , 作开区间 $A_\alpha = (\alpha - 1, \alpha + 1)$, 则 $\bigcup_{\alpha \in (0, 1)} A_\alpha = (-1, 2)$, $\bigcap_{\alpha \in (0, 1)} A_\alpha = (0, 1)$.

定理 2

(i) 若相应于每个 $\alpha \in I$ 均有 $A_\alpha \subset B_\alpha$, 则

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha, \quad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha,$$

(ii) $\bigcup_{\alpha \in I, \beta \in I} A_\alpha^\beta = \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\beta \in I} A_\alpha^\beta$;

$$\bigcap_{\alpha \in I, \beta \in I} A_\alpha^\beta = \bigcap_{\alpha \in I} \bigcap_{\beta \in I} A_\alpha^\beta.$$

(iii) $A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$;

$$A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha).$$

注 $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}}$ 通常写作 $\bigcup_{\alpha, \beta=1}^{\infty}$; $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}}$ 通常写作 $\bigcap_{\alpha, \beta=1}^{\infty}$.

定义 3 设 $\{A_n\}_1^{\infty}$ 是一个集列.

(i) 若 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, 就称 $\{A_n\}_1^{\infty}$ 是**渐张集列**, 记作 $A_n \uparrow$, 并且称 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是渐张集列 $\{A_n\}_1^{\infty}$ 的**极限**, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, 或 $A_n \uparrow A$.

(ii) 若 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, 就称 $\{A_n\}_1^{\infty}$ 是**渐缩集列**, 记作 $A_n \downarrow$, 并且称 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 是渐缩集列 $\{A_n\}_1^{\infty}$ 的**极限**, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, 或 $A_n \downarrow A$.

例 8 设 $A_n = [-n, n]$, $B_n = (n, +\infty)$ ($n = 1, 2, \dots$), 则

$$A_n \uparrow \mathbb{R}^1, \quad B_n \downarrow \phi.$$

定义4 设 A 、 B 是两个集，由属于 A 而不属于 B 的所有元素所组成的集称为集 A 减去集 B 的**差集**或**差**，记作 $A \setminus B$ 或 $A - B$ (图3)。即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

当 $A \supset B$ 时，差集 $A \setminus B$ 称为 B 对于 A 的**余集**或**余**，记作 $\mathcal{C}_A B$ (图4)。

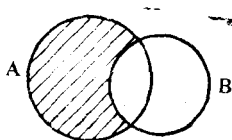


图3 $A \setminus B$

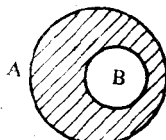


图4 $\mathcal{C}_A B$

例9 $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$ 。

当我们讨论某方面问题时，往往所涉及的一切集都是某个取定的集 X 的子集，这时便称 X 是**基本集**或**空间**。例如，当我们仅限于讨论直线上点的集合时，直线就是基本集。如果已明确 X 是基本集，集 A 对于 X 的余集 $\mathcal{C}_X A$ 可以简单的说成集 A 的余集，简单的记作 $\mathcal{C}A$ 。

定理3 设 X 是基本集，则

- (i) $\mathcal{C}X = \phi$; $\mathcal{C}\phi = X$;
- (ii) $\mathcal{C}(\mathcal{C}A) = A$;
- (iii) 当 $A \subset B$ 时 $\mathcal{C}A \supset \mathcal{C}B$ 。

定理4 (De Morgan公式) 设 X 是基本集，则

- (i) $\mathcal{C}(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{C}A_\alpha$;
- (ii) $\mathcal{C}(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}A_\alpha$ 。

证明 仅证(ii)。下面的符号“ \implies ”表示由它前面的断语可推出它后面的断语。

$$x \in \mathcal{C}(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \implies x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \implies \text{有某个 } \alpha_0 \in I, \text{ 使 } x \notin A_{\alpha_0} \implies$$

$$x \in \mathcal{C} A_{\alpha_0} \implies x \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C} A_\alpha.$$

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C} A_\alpha \implies \text{有某个 } \alpha_0 \in I, \text{ 使 } x \in \mathcal{C} A_{\alpha_0} \implies x \notin A_{\alpha_0} \implies$$

$$x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \implies x \in \mathcal{C}(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha).$$

由以上两个方面, (ii) 得证. **】**

De Morgan公式是一个很有用的结论, 它使我们能通过“余”运算把并变为交、把交变为并.

定理5

$$(i) \quad A \setminus B = A \cap \mathcal{C} B.$$

$$(ii) \quad A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

证明 仅证(ii). 前面的证明都是直接根据定义, 这里我们换一个方法.

$$A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap \mathcal{C} C) = A \cap B \cap \mathcal{C} C.$$

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap \mathcal{C} (A \cap C)$$

$$= (A \cap B) \cap (\mathcal{C} A \cup \mathcal{C} C) = (A \cap B \cap \mathcal{C} A) \cup (A \cap B \cap \mathcal{C} C)$$

$$= \phi \cup (A \cap B \cap \mathcal{C} C) = A \cap B \cap \mathcal{C} C.$$

所以 $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. **】**

对于集合的“差”运算, 要特别注意实、复数减法运算的许多性质并不适用于它. 例如, $(A \setminus B) \cup B$ 未必等于 A , $(A \cup B) \setminus B$ 未必等于 A , 移项变号的规则不再适用.

§ 2 映射 · 集合的对等

2.1 映射

定义1 设 A, B 是两个集合, A 非空集. 若依照规则 f , 对

于 A 中的每个元 x , 在 B 中都有唯一确定的元 y 与之对应, 就称 f 是 A 到 B 的**映射**, 记作 $f: A \rightarrow B$ 或 $A \xrightarrow{f} B$, 而与 x 对应的元 y 称为 x (在映射 f 下)的**象**, 记作 $f(x)$. 集合 A 称为映射 f 的**定义域**, 集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 称为映射 f 的**值域**. 若 E 是 A 的子集, 则 $\{f(x) | x \in E\}$ 称为 E (在映射 f 下)的**象集**, 记作 $f(E)$.

定义2 若映射 $f: A \rightarrow B$ 的值域 $f(A)$ 恰等于 B , 就说 f 是**满射**的. 若映射 $f: A \rightarrow B$ 使每个 $y \in f(A)$ 仅有唯一的 $x \in A$ 满足 $f(x) = y$, 就说 f 是**单射**的. 若映射 $f: A \rightarrow B$ 既是满射的又是单射的, 就称 f 是 A 到 B 的**一一映射** (“一一映射”有时还说成“一一对应”), 记作 $f: A \xrightarrow{1-1} B$ 或 $A \xrightarrow{1-1} B$.

设 f 是 A 到 B 的一一映射, 则对每个 $y \in B$ 有唯一 $x \in A$ 使 $f(x) = y$, 定义 $g(y) = x$ (当 $f(x) = y$ 时), 则 g 是 B 到 A 的一一映射, 我们称 g 是 f 的**逆映射**, 记作 f^{-1} .

定义3 设 f, g 分别是 F, G 到 B 的映射, 若 $F \subset G$ 且对每个 $x \in F$ 都有 $f(x) = g(x)$, 即映射 g 在 F 上与映射 f 一致, 就称映射 g 是 f 在 G 上的一个**扩张**, 而称映射 f 是 g 在 F 上的**限制**, 记作 $f = g|_F$. (“ g 在 F 上的限制是 f ”有时还说成“ g 在 F 上是 f ”或“ F 上的 g 是 f ”. $g|_F: F \rightarrow B$ 有时还记成 $g: F \rightarrow B$ 或 $F \xrightarrow{g} B$.)

例1 设 $f: [0, +\infty) \rightarrow R^1, f(x) = x^2$. 又设 $g: R^1 \rightarrow R^1, g(x) = x^2$. f 与 g 是两个不同的映射 (因为它们的定义域不同), g 是 f 在 R^1 上的一个扩张, 而 f 是 g 在 $[0, +\infty)$ 上的限制.

2.2 集合的对等

定义4 设 A, B 是两个集, 若存在着 A 到 B 的某个一一映射, 就称 A 与 B **对等**, 记作 $A \sim B$.

我们规定空集 ϕ 与空集 ϕ 对等. 为了讨论对等问题方便, 我们不妨假设: ϕ 到 ϕ 存在着一个一一映射, 任何映射 $f: A \rightarrow B$ 限制