实变函数与泛函分析

郭大钧　黄春朝　梁方豪　编

山东大学出版社

实变函数与泛函分析

郭大钧 黄春朝 梁方豪 编

*

山东大学出版社出版

山东省新华书店发行

济南历下印刷二厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 18.25 字数 470千字

1986年10月第1版 1986年10月 第1次印刷

印数：1—5,000

书号：13338·9 定价：3.70元

内 容 提 要

本书共分十四章。第一章至第六章是实变函数的内容，包括集合与点集、测度、可测函数与 Lebesgue 积分、Riemann-Stieltjes积分和 Lebesgue-Stieltjes积分等，并且对抽象测度和积分作了介绍；第七章至第十四章是泛函分析的内容，包括距离空间与Banach空间、Hilbert 空间、线性算子与线性泛函、全连续算子、自共轭算子等，并且对抽象函数与Banach代数、凸锥理论、广义函数作了介绍。每章末尾附有相当数量的习题。

本书把以上内容分为基本的、非基本的两个方面。对基本内容写得较为细致详尽，特别注意做到深入浅出、直观易懂；对非基本内容，标题前加了*号，供选读。

本书可作为综合性大学和师范学院数学系《实变函数》、《泛函分析》两门课的教材或教学参考书，也可供数学爱好者自学这两门课之用。

序

本书是根据我们在山东大学数学系多次讲授《实变函数》和《泛函分析》两门课的讲义合并、修改而成的。全书共分十四章。第一章至第六章是实变函数的内容，包括集合与点集、测度、可测函数与 Lebesgue积分、有界变差函数与Riemann-Stieltjes积分等，其中以Lebesgue积分为重点；第七章至第十四章是泛函分析的内容，包括距离空间与Banach空间、Hilbert 空间、线性算子与线性泛函、全连续算子、自共轭算子等。每章末尾附有相当数量的习题供选用。

据我们的实践，除去打＊的内容外，实变函数部分可用72学时讲完，泛函分析部分可用54学时讲完。打＊的内容包括抽象测度与抽象积分、抽象函数与 Banach 代数、凸锥理论、广义函数等，这些内容可以不讲或选讲或让优秀学生自学。

《实变函数》和《泛函分析》是数学系两门重要的专业基础课，它对于数学、计算数学、控制理论等专业都是必需的工具。《实变函数》课较之《数学分析》课，在观点和思想方法上有所飞跃，学生常感到困难。因此，我们在编写过程中注意了贯彻由浅入深、由特殊到一般、仔细分析来龙去脉等符合认识规律的原则。由于我们水平所限，书中错误和缺点在所难免，敬请同志们和读者们批评指正。

郭大钧

1984年12月于济南

目　　录

第一章 集 合

集合论创始自德国数学家Cantor，从十九世纪末叶逐渐发展到今天，它不仅成为数学的一个分支，而且是全部数学的基础. 本章讲述集合论的初步知识，作为实变函数论的基础.

§1 集合·集合的运算

1·1 集合

集合是数学中的一个基本概念，要把这个概念加以严格的规定并不是一件容易的事情. 正象几何学中"点"、"直线"、"平面"一样，"集合"这个概念必须用若干公理组成的公理系来规定. 目前，对"集合"这个概念有两种不同的规定，一种是Zermelo等人作出的ZFC公理系，另一种是Bernays等人作出的BNG公理系. 我们这里不准备纠缠"集合"这个概念的严格规定，而只给出如下朴素的说法：一定范围内的所有个体事物，当把它们看作一个整体时，这个整体称为一个**集合**（或**集**），而其中的每一个个体事物称为这个集合的**元素**（或**元**）. 一个集合的各个元素必须是彼此相异的；哪些个体事物是给定集合的元素必须是确定无疑的. 下面我们举出集合的几个例子.

例1 自然数的全体（称为**自然数集**，通常记作N）.

例2 实数的全体（称为**实数集**，即R^1）.

例3 小于1的正数的全体（即开区间$(0,1)$）.

例4 英文字母的全体.

本书常用大写字母A、B、X、Y等表示集合，用小写字母a、b、x、y等表示集合的元素．a是集合A的元素记作$a\in A$，读作a属于A；a不是集合A的元素记作$a\bar{\in}A$或$a\notin A$，读作a不属于A.

如果集合A是具有某性质P的个体事物的全体，我们往往用下面的形式来表示A：

$$A=\{x\mid x\text{具有性质}P\}.$$

例如$\{x\mid x=\sqrt{r}，r\geqslant 0，r\text{ 为有理数}\}$（其中的逗号“，”意为“并且”）即非负有理数的算术平方根的全体，它还可以写成$\{\sqrt{r}\mid r\geqslant 0，r\text{是有理数}\}$.如果能明确的写出集合$A$的所有元素，也可以把所有元素列举在大括号里来表示$A$。例如$\{x\mid x^2-1=0\}$还可表示成$\{-1,1\}$.再如自然数集 N可表示成$\{1,2,3,\cdots\}$.

为了讨论问题方便，我们还引入不含任何元素的集，称为**空集**，记作ϕ，例如$\{x\mid x>1，x<0\}$就是空集．空集ϕ以及具有n（n为自然数）个元素的集统称为**有限集**。只具有一个元素的有限集称为**单元素集**，只具有元素a的单元素集可记作$\{a\}$，但不能记作a，不是有限集的集统称为**无限集**.

若属于集A的元素都属于集B，就称A是B的**子集**，记作$A\subset B$，读作A包含于B，或记作$B\supset A$，读作B包含A。我们认为空集ϕ是任何集的子集．若$A\subset B$，而B中确有元素不属于A，就称A是B的**真子集**.

若属于集A的元素都属于集B，属于集B的元素也都属于集A，即A、B由相同的元素组成，就称A与B**相等**，记作$A=B$或$B=A$.
A与B不相等记作$A\neq B$或$B\neq A$.

命题1　对任何集A、B、C，均有

（i）　$A\subset A$；（反身性）

（ii）　若$A\subset B$，$B\subset A$，则$A=B$；（反对称性）

（iii）　若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$。（传递性）

要特别注意：一个集合的元素与此集合间只能有关系“$\in$”，不能有关系“$\subset$”；一个集合的子集与此集合间只能有关系“$\subset$”，不能有关系“$\in$”。例如，$a\in A$不能写成$a\subset A$，而$\{a\}\subset A$不能写成$\{a\}\in A$，否则将造成混乱。

1·2 集合的运算

从给定的一些集出发，我们可以通过所谓“集合的运算”作出新的集，最常用的集运算有“并”、“交”、“差”三种。

定义1 设A、B是两个集，A中的所有元素及B中的所有元素合起来所组成的集称为A与B的**并集**或A与B的**并**，记作$A\cup B$或$A+B$（图1）。即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

同时属于A与B两者的所有元素所组成的集称为A与B的**交集**或A与B的**交**，记作$A\cap B$或AB（图2）。即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

当$A\cap B\neq\phi$时称A与B**相交**；当$A\cap B=\phi$时称A与B**无交**。

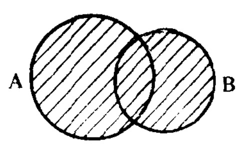

图1 $A\cup B$

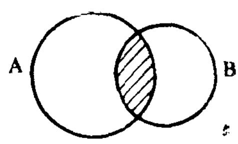

图2 $A\cap B$

例5 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，则$A\cup B=\{1,2,3,4\}$（注意，不要写作$A\cup B=\{1,2,3,3,4\}$），$A\cap B=\{3\}$（注意，不能写作$A\cap B=3$）。

定理1

(i) $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$。（交换律）

(ii) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。（结合律）

(iii) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. （分配律）

(iv) $A\cup A=A$; $A\cap A=A$. （幂等律）

这些关系式从图形上来看是明显的. 图形能够帮助我们理解和思考，但图形的观察毕竟不能代替关系式的证明.

证明 仅证(iii)的第一式$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

设$x\in A\cap(B\cup C)$，则$x\in A$且$x\in B\cup C$. 从而$x\in B$或$x\in C$. 不妨设$x\in B$. 于是$x\in A\cap B$，更有$x\in(A\cap B)\cup(B\cap C)$.

设$x\in(A\cap B)\cup(B\cap C)$，则$x\in A\cap B$或$x\in B\cap C$. 不妨设$x\in A\cap B$，则$x\in A$且$x\in B$，从而$x\in B\cup C$，于是$x\in A\cap(B\cup C)$.

由以上两个方面，(iii)的第一式得证. ▌

设I是一个非空集合，若相应于I的每个元α我们都给定了一个集A_α（对不同的α，相应的A_α可能相同），这样便给定了一族集，这族集通常记作$A_\alpha,\alpha\in I$，称为**以I为标号集的一族集**（I的元α称为集A_α的**标号**），当把其看作一个整体时称为**以I为标号集的一个集族**，通常记作$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$（当标号集$I$不说自明时也可简记作$\{A_\alpha\}$）.

若$I=\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$，这时$A_\alpha,\alpha\in I$即一列集$A_1,A_2,A_3,\cdots$（也可记作$A_i$，$i=1,2,3,\cdots$），当把其看作一个整体时称为一个**集列**或一个**集串**，记作$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$或$\{A_i\}_1^{\infty}$（有时简记作$\{A_i\}$）. 若$I=\{1,2,\cdots,n\}$，这时$A_\alpha,\alpha\in I$即n个集$A_1,A_2,\cdots,A_n$（也可记作A_i，$i=1,2,\cdots,n$），当把其看作一个整体时记作$\{A_i\}_{i=1}^{n}$或$\{A_i\}_1^n$（有时简记作$\{A_i\}$）.

定义2 设$A_\alpha,\alpha\in I$是任意一族集，一切$A_\alpha(\alpha\in I)$中的所有元素合起来所组成的集称为这族集的**并集**或**并**，记作

$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$或$\sum\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$。即

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{存在某个}\alpha\in I\text{使}x\in A_\alpha\}.$$

同时属于每个集A_α（$\alpha\in I$）的所有元素所组成的集称为这族集的**交集**或**交**，记作$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$或$\prod\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$。即

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{对每个}\alpha\in I\text{都有}x\in A_\alpha\}.$$

当标号集I不说自明时，$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$可简记作$\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$，类似地有$\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha$、$\sum\limits_{\alpha}A$、$\prod\limits_{\alpha}A_\alpha$。

当$I=\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$时，$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$又可写作$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$或$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$，这个运算通常称为"可列并"运算。当$I=\{1,2,\cdots,n\}$时，$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$又可写作$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$或$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，这个运算通常称为"有限并"运算。类似地可以定义"可列交"运算$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots$，以及"有限交"运算$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$。（"一列集$A_1,A_2,A_3,\cdots$的并$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$"有时简写成"一列集$A_i$的并$\bigcup\limits_{i}A_i$"，"$n$个集$A_1,A_2,\cdots,A_n$的交$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$"有时简写成"$n$个集$A_i$的交$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$"，如此等等。）

例 6 $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n}\right\}=\{x\mid 0<x<1\}$.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{n}<x<1+\frac{1}{n}\right\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

例7 相应于开区间（0，1）中的每一点α，作开区间$A_\alpha=(\alpha-1,\alpha+1)$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1)} A_\alpha=(-1,2)$，$\bigcap\limits_{\alpha\in(0,1)} A_\alpha=(0,1)$。

定理2

(i) 若相应于每个$\alpha\in I$均有$A_\alpha\subset B_\alpha$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha,\qquad \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha,$$

(ii) $$\bigcup_{\alpha\in I,\beta\in J} A_\alpha^\beta=\bigcup_{\alpha\in I}\bigcup_{\beta\in J} A_\alpha^\beta;$$

$$\bigcap_{\alpha\in I,\beta\in J} A_\alpha^\beta=\bigcap_{\alpha\in I}\bigcap_{\beta\in J} A_\alpha^\beta.$$

(iii) $$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha);$$

$$A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha).$$

注 $\bigcup\limits_{\alpha\in N,\beta\in N}$ 通常写作 $\bigcup\limits_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$；$\bigcap\limits_{\alpha\in N,\beta\in N}$ 通常写作 $\bigcap\limits_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$。

定义3 设$\{A_n\}_1^\infty$是一个集列。

(i) 若$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$，就称$\{A_n\}_1^\infty$是**渐张集列**，记作$A_n\uparrow$，并且称$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$是**渐张集列**$\{A_n\}_1^\infty$**的极限**，记作$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，或$A_n\uparrow A$。

(ii) 若$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$，就称$\{A_n\}_1^\infty$是**渐缩集列**，记作$A_n\downarrow$，并且称$A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$是**渐缩集列**$\{A_n\}_1^\infty$**的极限**，记作$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，或$A_n\downarrow A$。

例8 设$A_n=[-n,n]$，$B_n=(n,+\infty)$ $(n=1,2,\cdots)$，则

$$A_n\uparrow R^1,\qquad B_n\downarrow\phi.$$

定义4 设A、B是两个集，由属于A而不属于B的所有元素所组成的集称为集A减去集B的**差集**或**差**，记作$A\setminus B$或$A-B$(图3)。即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{且}x\overline{\in}B\}.$$

当$A\supset B$时，差集$A\setminus B$称为B对于A的**余集**或**余**，记作$\mathscr{C}_A B$(图4)。

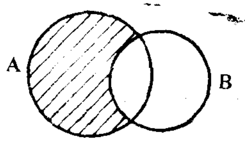

图3 $A\setminus B$

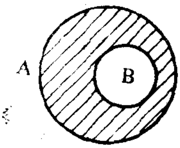

图4 $\mathscr{C}_A B$

例9 $\{1,2,3\}\setminus\{2,3,4\}=\{1\}$.

当我们讨论某方面问题时，往往所涉及的一切集都是某个取定的集X的子集，这时便称X是**基本集**或**空间**。例如，当我们仅限于讨论直线上点的集合时，直线就是基本集。如果已明确X是基本集，集A对于X的余集$\mathscr{C}_X A$可以简单的说成集A的余集，简单的记作$\mathscr{C}A$。

定理3 设X是基本集，则

(i) $\mathscr{C}X=\phi$；$\mathscr{C}\phi=X$；

(ii) $\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$；

(iii) 当$A\subset B$时$\mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B$。

定理4 (De Morgan公式) 设X是基本集，则

(i) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$；

(ii) $\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$.

证明 仅证(ii)。下面的符号“$\Longrightarrow$”表示由它前面的断语可推出它后面的断语。

$$x\in\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\Longrightarrow x\bar{\in}\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Longrightarrow \text{有某个}\alpha_0\in I,\text{使}x\bar{\in}A_{\alpha_0}\Longrightarrow$$

$$x\in\mathscr{C}A_{\alpha_0}\Longrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha.$$

$$x\in\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha\Longrightarrow \text{有某个}\alpha_0\in I,\text{使}x\in\mathscr{C}A_{\alpha_0}\Longrightarrow x\bar{\in}A_{\alpha_0}\Longrightarrow$$

$$x\bar{\in}\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Longrightarrow x\in\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha).$$

由以上两个方面，(ii)得证。 ▌

De Morgan公式是一个很有用的结论，它使我们能通过“余”运算把并变为交、把交变为并。

定理5

(i) $A\setminus B=A\cap\mathscr{C}B$.

(ii) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

证明 仅证(ii)。前面的证明都是直接根据定义，这里我们换一个方法。

$$A\cap(B\setminus C)=A\cap(B\cap\mathscr{C}C)=A\cap B\cap\mathscr{C}C.$$

$$\begin{aligned}(A\cap B)\setminus(A\cap C)&=(A\cap B)\cap\mathscr{C}(A\cap C)\\&=(A\cap B)\cap(\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}C)=(A\cap B\cap\mathscr{C}A)\cup(A\cap B\cap\mathscr{C}C)\\&=\phi\cup(A\cap B\cap\mathscr{C}C)=A\cap B\cap\mathscr{C}C.\end{aligned}$$

所以$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$。 ▌

对于集合的“差”运算，要特别注意实、复数减法运算的许多性质并不适用于它。例如，$(A\setminus B)\cup B$未必等于A，$(A\cup B)\setminus B$未必等于A，移项变号的规则不再适用。

§ 2 映射·集合的对等

2·1 映射

定义1 设A、B是两个集合，A非空集。若依照规则f，对

于A中的每个元x，在B中都有唯一确定的元y与之对应，就称f是A到B的**映射**，记作$f: A \to B$或$A \xrightarrow{f} B$，而与x对应的元y称为x（在映射f下）的**象**，记作$f(x)$。集合A称为映射f的**定义域**，集合$\{f(x) | x \in A\}$称为映射f的**值域**。若E是A的子集，则$\{f(x) | x \in E\}$称为E（在映射f下）的**象集**，记作$f(E)$。

定义2 若映射$f: A \to B$的值域$f(A)$恰等于B，就说f是**满射**的。若映射$f: A \to B$使每个$y \in f(A)$仅有唯一的$x \in A$满足$f(x) = y$，就说f是**单射**的。若映射$f: A \to B$既是满射的又是单射的，就称f是A到B的**一一映射**（"一一映射"有时还说成"一一对应"），记作$f: A \xrightarrow[1-1]{} B$或$A \xrightarrow[1-1]{f} B$。

设f是A到B的一一映射，则对每个$y \in B$有唯一$x \in A$使$f(x) = y$，定义$g(y) = x$（当$f(x) = y$时），则g是B到A的一一映射，我们称g是f的**逆映射**，记作f^{-1}。

定义3 设f、g分别是F、G到B的映射，若$F \subset G$且对每个$x \in F$都有$f(x) = g(x)$，即映射g在F上与映射f一致，就称映射g是f在G上的一个**扩张**，而称映射f是g在F上的**限制**，记作$f = g|_F$。（"g在F上的限制是f"有时还说成"g在F上是f"或"F上的g是f"。$g|_F: F \to B$有时还记成$g: F \to B$或$F \xrightarrow{g} B$。）

例1 设$f: [0, +\infty) \to R^1$，$f(x) = x^2$。又设$g: R^1 \to R^1$，$g(x) = x^2$。f与g是两个不同的映射（因为它们的定义域不同），g是f在R^1上的一个扩张，而f是g在$[0, +\infty)$上的限制。

2·2 集合的对等

定义4 设A、B是两个集，若存在着A到B的某个一一映射，就称A与B**对等**，记作$A \sim B$。

我们规定空集ϕ与空集ϕ对等。为了讨论对等问题方便，我们不妨假设：ϕ到ϕ存在着一个一一映射，任何映射$f: A \to B$限制