幾何研究

科學圖書大庫

幾何研究

譯者 王昌銳

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　曾迺碩　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國五十九年七月九日初版

幾何研究

定價　新台幣三十五元　港幣六元

譯者　王昌銳　台灣省立高雄工業專科學校教授

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　臺北郵政信箱第3261號 電話519784號
發行人　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　林碧鏗　郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段151號 電話979739號

刃1/225/09

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大衆之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，needs特別研究。

學習數學的最好方法，爲多做習題。各書所附習題，有些頗爲艱深，需要慎密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十册陸續出版，以供讀者研習。除第十七册係由葉哲志先生承譯外，其餘各册均由王昌銳教授承譯。（定價每册港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數（Numbers: Rational and Irrational）
2. 微積分研究（What is Calculus About ?）
3. 不等式論（An Introduction to Inequalities）
4. 幾何不等式（Geometric Inequalities）
5. 高中數學測驗（第一册）（The MAA Contest Problem Book 1
6. 大數論（The Lore of Large Numbers）
7. 無窮數之妙用（Uses of Infinity）
8. 幾何移轉（Geometric Transformations）
9. 連分數（Continued Fractions）
10. 圖形及用途（Graphs and their Uses）
11. 匈牙利數學問題詳解（第一册）（Hungarian Problem Book 1）
12. 匈牙利數學問題詳解（第二册）（Hungarian Problem Book 11）
13. 數學史話（Episodes,from the early history of mathematics）
14. 群與圖（Groups and their Graphs）
15. 特別數學（Mathematics of Choice,or How to count Without Counting）
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦（From Pythagoras to Einstein）
17. 高中數學測驗（第二册）（The MAA Contest Problem Book 11
18. 拓撲學基本概念（First Concepts of Topology）
19. 幾何研究（Geometry Revisited）
20. 數目理論入門（Invitation to Number Theory）

譯序

幾何學（Geometry），亦名形學，係研究物之形狀，大小，位置，及彼此間比較之學。其研究內容，包括點，直線，曲線，平面或立體圖象之長度，週邊，面積，體積，以及彼此間之關係。其對數學其他部門及科學技術，工程實作與設計之貢獻，實無出其右者。所以成爲數學中之一主要學門，成爲青年必讀之書。

本書主要目的，在複習並研究基本幾何學中，古人所引爲樂之課題。當然對今日幾何研究，頗有參考價值。書中特色，在使用易於瞭解，且與其他數學部門發生密切連繫之“幾何移轉”觀念，從事定理之說明與證定。特別於第五章中，向讀者介紹分析學上有重要應用之反演幾何學。於第六章，又介紹錐線。並着重於焦點及偏心率之研究，及有關彗星，行星與衛星軌道研究之說明。以前幾章，由淺入深，將讀者由極簡單之觀念，帶至課題核心，頗能引人入勝。全書所附練習問題，均係教科書中習題之引伸，對讀者頗具挑戰作用，用能激發興趣，磨練思考，促進研究效果。

著者之一的寇克司特（H. S. M. Coxeter），出生於倫敦。一九三一年，接受劍橋大學博士學位。一九三五年以來，即擔任加拿大，多倫多（Toronto）大學數學教授，並爲許多國家數學科學會社會員；如英國之皇家學會會員，及美國數學學會副主席，其於群理論及幾何方面之著作；有“實投影平面”，“非歐幾里德幾何”，“幾何導論”，“正多面體”及“投影幾何”，……，頗受國際學術人士之推重。另一著者格里查（Samuel L. Greitzer），於1906年，由俄國之敖德薩（Odessa）移居美國，一九二七年畢業紐約市大學，並獲葉世瓦（Yeshiva）大學博士學位。其著作有“地形學及地圖閱讀”，且對數目分析，代數，幾何及應用數學，頗富研究，而多所論著。

本書之譯，係應徐氏基金會之約而作，書中譯名，力求流行普遍，詞句力保原書眞義，不失其信而已。1·6 節之“Orthic triangle”，常譯爲“垂足三角形”，係由三角形各頂至相對邊垂直線足，所連接而成之三角形

，故譯爲“頂垂足三角形”，以示垂直線來自各頂；而免與 1·9 節所論之垂足三角形（Pedal triangles），其垂直線來自三角形內一點，其於各邊垂足，所組成之三角形混淆。是否適當，尚望海內外明達法正。

譯稿多勞吾妻蔣君英女士協助整理，致得早觀厥成，良深感激，特誌勿忘。

中華民國五十九年四月十一日
湘潭留田王昌銳序於高雄工專

前　言

藐視歐幾里德幾何之人，猶如遊子，自外
歸來，而輕視其家門。——H.G. Forder.

高級中學，通常包含之數學課程，有單獨一年之平面幾何課程，或許爲稱作高一數學（美國之第十年級）之幾何學及基本解析幾何。此種課程之早期出現於高中學生課業者，通常爲其對此課題之唯一方向。反之，具數學頭腦之學生，有機會研究初等代數，高等代數，甚而至於大代數。很自然的，因此而成一傾向；愛好代數，抵制幾何，益言之，失於誘導之熱情，引致學生一種誤會，認爲幾何在“數學主流以外”，而分析或集合理論，應超過之。

或許，於學校課程中，幾何之次要地位，種因於教育家對於幾何學之性質及其發展經過，缺乏瞭解之關係。此等進展，包括許多美好定理，如不里考定理（節 3·9），福爾巴克定理（節 5·6），彼得生紹特定理（節 4·8）及莫勒定理（節 2·9）.就歷史以言，應記任歐幾里德（Euclid）曾爲成人書寫哲學研究之準備，直至吾人本身之現世紀中，教授幾何學主要理由之一，係其原理的方法，已被考慮爲演繹推理之最佳介紹。自然的，其正式方法，已引伸於有效的教育目的。然而，從古至今，並無幾何學者，曾猶豫於採用適合彼等之次正規方法。如三角學，解析幾何，或向量法將有助時，幾何學家，將使用之。益言之，彼曾發明其本身之現代技巧之優美而具權威者。其一如是之技巧，爲其使用如旋轉，反射及放大之移轉，以提供簡短之某種定理證明，且亦與結晶形幾何及藝術相關。此幾何之“力學”現象，爲第四章之主題，另一現代技巧，爲反幾何方法之討論點及圓者，認一直線爲一圓之經過“於無窮點”者。某些特色，將於第五章見之。第三技巧爲投影幾何方法，不管所有距離與角之考慮，但着重諸點與直線間（完全無窮之直線，非徒線段也。）之相似性。此地不僅爲任兩點由一直線連接，但爲任兩直線過於一點，平行直線認係直線共點，發生處於“無窮直線”之上情形。此課題

之某些暗示，將於第六章見之。

幾何學仍佔有所有該等於一代以前，教育家即曾敍述之該類效用，於大自然中，仍有幾何學，等待認識與瞭解。幾何學（特別是投影幾何）仍爲向學生介紹公認原理之一優美方法，其仍佔有美學因素，使之常保其定理之美好於不墜。益言之，甚至對科學家及實用數學家，較前更爲有用與必需。考慮人造衛星軌道形狀，及空—時連續之四量度幾何，便是一例。

經幾許世紀，幾何學已經成長，新概念及程序之新方法，已予發展：學生將覺其具有挑戰性，且爲之驚異的概念，使用何種適合吾人目標之最佳方法，且再拜訪歐幾里德。且自行發現少數比較新的定理。或許，吾人能克服初度接觸幾何所發生之某些納罕及敬畏。

著者，特別感謝來克斯博士（Dr. Anneli Lax）之耐心合作及許多實貴之建議。

H. S. M. C.
S. L. G.

1967年，於多倫多及紐約

致讀者

本書爲數學專家所撰一系列書刊之一，其目的在對多數大中學生及社會人士，提供某些易懂而頗饒興味之重要數學觀念。新數學文庫（New Mathematical Library）之大部份內容，多爲學校課程所不常包含之課題：而且難易相殊，即使同一書中，有些部份，即較其他部份，需要較高程度之專注，由是讀者需具備相當的學識能力，以瞭解此等書籍之大部份內容，且須作明智之努力。

如讀者一直僅於教室作業中遭遇數學，則應熟記於心，數學書籍，不能快速閱讀；亦不應期望乍覽之餘，即能瞭解書中所有部份。而應極自然地越過複雜部份，稍後再回來讀；後續之敍述，常能澄清一種理論也。相反的，包含完全熟悉題材之章節，則可快速閱讀。

“學”數學之最佳途徑，在“做”數學。各書均含習題，有些且需縝密思考。奉勸讀者，養成手持紙筆，從事閱讀之習慣；於此方式之中，數學對之，將變爲意義倍增。

對著者及編者而言，此爲新的嘗試，甚願對協助此等書刊籌印之許多學校師生，表示由衷謝意。編者對諸書之反映意見，頗具興趣，希望讀者，書面寄交N.Y. 10012 ，紐約，Mercer 街，251 號，康涅特（Courant）數學科學會，紐約大學，新數學文庫編輯委員會。

編　者

目　録

第一章

三角形連通之點與線

利用較代數及算術之混合爲尤廣的學術，及最低限度如分析學之廣大；幾何學爲一更富趣味而難於遺忘物之較富寶藏之宮，而爲歲月匆匆中，較任何其他數學部門，更無暇欣賞者。

貝爾（E.T. Bell）

本章目的，在回味貝爾博士所提及之某些此等難於遺忘之物，以導出歐幾里德以來，所發展之新定理，並應用吾人發現，於有趣之情勢。茲隨便考慮一個三角形及其最著名結合之點與直線：外接圓心，中線，形心，角等分線，內心，外心，高度，垂心，歐拉直線，及九點圓。

自然的，角等分線引出斯迭拉一來毛司（Steiner-Lehmus）定理。百年以來，僉信頗難予以證明，雖然目前看來，非常容易。

最後，由一三角形，及普通位置之一點P，吾人導出一新三角形，其諸頂係由P至已知三角形各邊之垂直線足。此觀念引出某些有趣發展，其中某些延至次章論之。

1.1 引伸之正弦律

正弦律爲三角學定理之一，將常予使用。很不幸的，於課文中，常以短截方式出現，而不能作爲一種定理之可能引伸使用。因此，吾人可自由的採取所欲之方式，以事正弦律之證明。

吾人由$\triangle ABC$ 開始（依習慣標誌），繞之外接一圓，其中心在O，半徑等於R單位，示如圖 1·1 A及 1·1 B。吾人畫直徑CJ及弦BJ。［爲書寫方便之理由，以X及Y爲端點之線段長度，於本書中，均以XY示之。］於所示之兩情況中，$\angle CBJ$ 爲一直角，因其爲內接於一半圓也。故於兩圖之

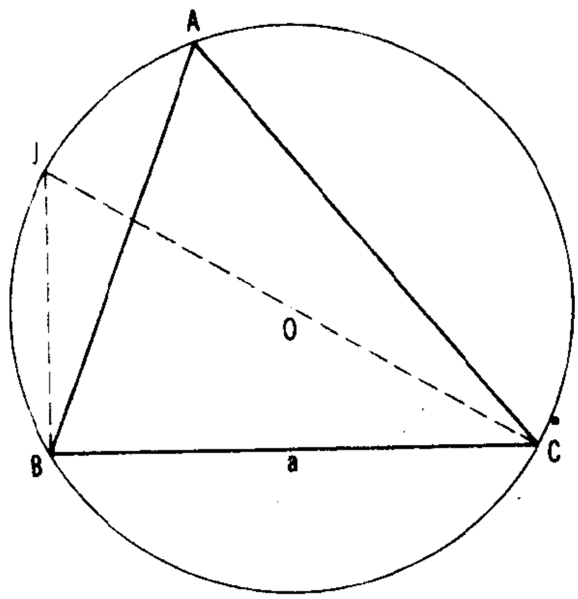

圖 1.1 A

中，

$$\sin J = \frac{a}{CJ} = \frac{a}{2R}.$$

於圖 1·1 A中，$\angle J = \angle A$ ，因兩均爲內接於圓之相同弧也。於圖 1·1 B中，$\angle J = 180° - \angle A$，因內接四邊形之相對角，爲相補也。回憶 $\sin\theta = \sin(180° - \theta)$，隨而 $\sin J = \sin A$ 於兩圖之中。因此，於兩情況之中，$\sin A = a/2R$，即

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

同樣程序，應用於$\triangle ABC$之其他諸角，引出

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

由是，混合諸種結果，吾人可說明引伸之正弦定律：

［定理 1·11.］ 對一具外接圓半徑R之三角形ABC，

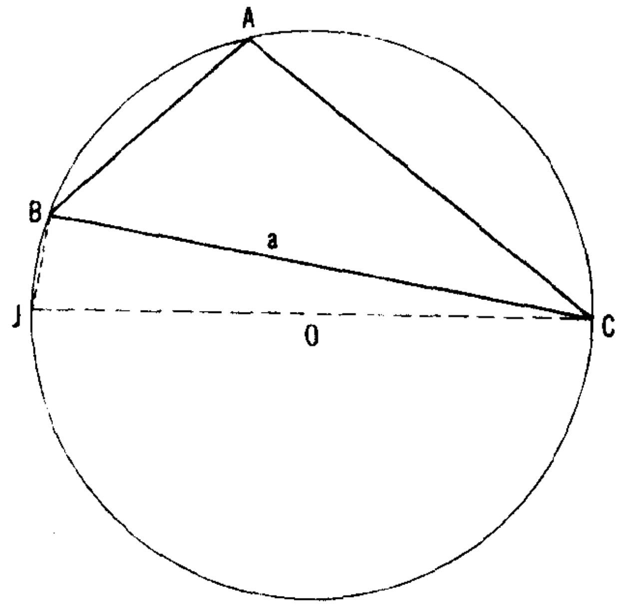

圖 1.1 B

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

茲同意以小括號內所含字母名稱，表示任何圖形之面積。由是 (ABC) 表示 $\triangle ABC$ 之面積，$(PQRS)$ 表示四邊形 $PQRS$ 之面積，如此類推。

練　習

1. 證明［於以後練習題中，將省略“證明”或“顯示”字樣。由是任何以一定理形式出現之練習題，意即應予證明者］對任何三角形 ABC，即如 B 或 C 爲一鈍角，$a=b\cos C+c\cos B$, 使用正弦率，化出加法公式

$$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B.$$

2. 於任何三角形 ABC 中，

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$$

3. 於任何三角形 ABC 中，$(ABC)=abc/4R$.

4. 令 p 及 q 爲經過 A 之兩圓半徑，分別於 B 及 C 接觸 BC，則 $pq=R^2$。

1.2 色瓦定理

連接相對於三角形一頂之邊上，已知點的線段，稱爲色瓦線。由是，如 X, Y, Z 分別爲三角形 ABC 之邊 BC，CA，AB 之點，線段 AX，BY，CZ 均色瓦線。此名詞來自意大利數學家色瓦（Giovanni Ceva）之名，彼於1678年發佈其以下極爲有用之定理：

［定理 1·21.］如三根色瓦線 AX，BY，CZ，每線經過三角形 ABC 之各頂，共交一點，則

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

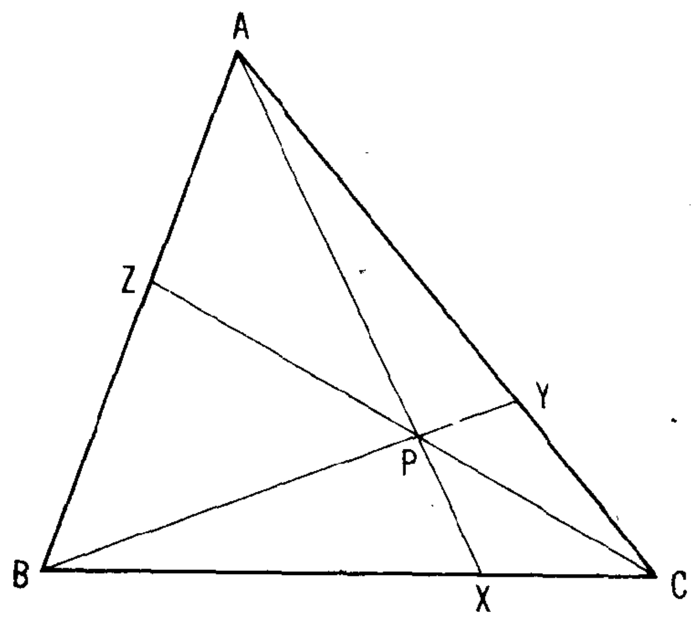

圖 1.2 A

當謂三線（或線段）相交時，乃指彼等均經過一點，如 P.欲證明色瓦定理，吾人回想相等高度之三角形面積，與三角形之底成比例，參考圖 1·2 A