HALL-KNIGHT 大代数

上

[英] H·S·霍尔　S·R·奈特　著

席小云　译
何桂莲　校

内 容 提 要

Hall-Knight 大代数是一本享有世界盛名的初等数学著作，初版于1887年，重印几十次，历久不衰。尤其近年来，美、英等国都连年重印。我国老一辈知名数学家中，有不少人至今还念念不忘该书给他们的教益。

该书译本分上下两册出版，共三十五章，书末附练习解答，内容丰富，讲解透彻，题目多，其解题技术为同类书所不及。深受世界各国中学师生欢迎。

Hall-Knight 大代数

上

[英] H·S·霍尔 S·R·奈特 著

席小云 译

何桂莲 校

责任编辑 陈金凤

封面设计 王序德

*

科学普及出版社出版（北京白石桥紫竹院公园内）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京印刷一厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：$16\frac{7}{8}$ 字数：374千字

1983年1月第1版 1983年1月第1次印刷

印数：1—17,700册 定价：1.50元

统一书号：13051·1297 本社书号：0431

前　言

H·S·霍尔与S·R·奈特二氏的《大代数》是1887年在美国出版的。近百年来版本版次极多，现在还在各处不断地印刷出版。此书对不少国家的中学数学教学影响很大。我国五十多岁以上的老一辈数学家中有不少人在中学时期为学此书花过不少功夫，得益非浅，至今还念念不忘！当时的高中一般采用Fine氏大代数作为教本，而Hall-Knight二氏大代数是教师与学生普遍使用的参考书与课外读物。

有一批高质量的课外读物与参考书，对教学效果的提高，学生兴趣的培养是很重要的。但是现在极其缺乏这样的数学读物。所以Hall-Kinght二氏大代数的翻译出版是件很好的事。这本书内容极为丰富，讲解详尽，透彻，易懂，其中一部分很有意义的内容在一般中学课本中是少讲或不讲的。此书的另一个特点是它的例题与习题的“题型”很多，除了大量一般性的习题外，还有很多较为复杂难解的习题。所有这些对于课程内容的理解与解题能力的培养都是很重要的。为便于读者参考，书末附有习题解答，非H·S·霍尔与S·R·奈特所著。

希望本书也将成为现在中学教师与高中学生在数学教学与学习中的好帮手。

周毓麟

1981年5月4日

目　录

第一章　比

1．定义：**比**是一量与另一同类量的一种关系，它是就一量为另一量的倍数或份数而进行的比较。

A比B通常写成$A:B$。量A与量B称作比的**项**，第一项称为**前项**，第二项称为**后项**。

2．要求出A是B的几倍或几份，可以用B去除A。因此，比$A:B$便可用分数$\frac{A}{B}$进行度量。我们将看到，采用这种记法，通常是很方便的。

为了比较两个量，它们必须用同一单位。例如：2 英镑与 15 先令之比可用分数$\frac{2\times 20}{15}$或$\frac{8}{3}$来度量。（一英镑等于 20 先令，一先令等于 12 便士。）

注：比是表示一个量包含另一个量的倍数，所以，每一个比都是一个抽象的量。

3．根据分数的法则

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$$

可知，比$a:b$等于比$ma:mb$，也就是说，如果比的前项与后项均乘以或除以一个相同的量，比值不变。

4．两个或两个以上的比可通过同它们等价的、有公分母的分数来比较大小。例如：设$a:b$与$x:y$是两个比。由于$\frac{a}{b}=\frac{ay}{by}$，$\frac{x}{y}=\frac{bx}{by}$，所以，比$a:b$是大于、等于还是小于

$x:y$，依照 ay 是大于、等于还是小于 bx 而定。

5. 两个分数的比，可用两个整数的比来表示。例如，

比 $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ 可用 $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ 或 $\frac{ad}{bc}$ 来度量。因此，它便等于比 $ad:bc$。

6. 如果一个比中有一项或两项是不尽根的量，那么我们就找不到两个整数来准确地度量它们的比。例如，比 $\sqrt{2}:1$ 便不可能用两个整数的比来准确地表示。

7. 定义：如果两量之比可以准确地表示成两整数之比，我们就说这两个量是**可通约的**；否则，便是**不可通约的**。

虽然我们找不到两个整数能准确地度量两个不可通约量的比，但是我们总能找到两个整数，它们的比与所求的比相差一个任意小量。

例如：$\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{2.236067\cdots}{4}=0.559016\cdots$。

所以 $\frac{\sqrt{5}}{4}>\frac{559016}{1000000}$ 且 $<\frac{559017}{1000000}$；

这样，比 $559016:1000000$ 与 $\sqrt{5}:4$ 的差便小于 0.000001。如果再增加小数的取位，便可得到更精确的近似值。

8. 定义：比的复合可由表示这些比的分数相乘，或这些比的前项相乘为新的前项，后项相乘为新的后项来实现。

例：求以下三比：$2a:3b$，$6ab:5c^2$，$c:a$ 的复比。

$$\text{所求的比}=\frac{2a}{3b}\times\frac{6ab}{5c^2}\times\frac{c}{a}$$

$$=\frac{4a}{5c}.$$

9． 定义：当比 $a:b$ 与本身复合时，产生的比 $a^2:b^2$ 称作 $a:b$ 的**二次比**。同理，$a^3:b^3$ 称作 $a:b$ 的**三次比**；$a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}$ 称作 $a:b$ 的**平方根比**。

例 （1）$2a:3b$ 的二次比是 $4a^2:9b^2$.

（2）49:25 的平方根比是 7:5.

（3）$2x:1$ 的三次比是 $8x^3:1$.

10． 定义：一个称作大于 1 的比、小于 1 的比或等于 1 的比，是由这个比的前项大于、小于或等于后项来决定的。

11． 如果比的前项与后项增加一个相同的量，大于 1 的比的比值减小，小于 1 的比的比值增加。

令 $\frac{a}{b}$ 为一个比，且令 $\frac{a+x}{b+x}$ 为在这个比的前项与后项分别增加量 x 而形成的一个新比。

现在
$$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}$$
$$=\frac{x(a-b)}{b(b+x)};$$

且 $a-b$ 为正为负，是由 a 大于或小于 b 而定。

因此，如果 $a>b$，则
$$\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x};$$

如果 $a<b$，则
$$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}.$$

命题得证。

同理可以证明，如果比的前项与后项减去一个相同的量，则大于 1 的比的比值增加，小于 1 的比的比值减小。

12． 如果两个或两个以上的比相等，我们引入一个符号，表示这些相等的比，便可以证明许多很有用的命题。

下面这个重要定理的证明过程说明了进行的方法。

如果 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots,$$

则这些比的每一个都等于$\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}$，其中 p，q，r，n 为任意量。

令 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k;$$

则 $$a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk,\cdots;$$

由此得 $$pa^n=pb^nk^n,\quad qc^n=qd^nk^n,\quad re^n=rf^nk^n,\cdots;$$

$$\therefore\quad \frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=\frac{pb^nk^n+qd^nk^n+rf^nk^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}$$
$$=k^n;$$

$$\therefore\quad \left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdots.$$

使 p，q，r，n 取不同的值，可以推出这个一般性命题的许多特例；它们也可用同样的方法单独证明出来。例如：

如果 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots,$$

则各比$=\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$；

这是一个经常要用到的结论，用语言表达出来就是：当一组分数相等时，其中的每一个都等于它们分母的和去除分子的和。

例一、如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，证明

$$\frac{a^3b+2c^2e-3ae^2f}{b^4+2d^2f-3bf^3}=\frac{ace}{bdf}.$$

令 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k;$$

则 $$a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk;$$

$$\therefore\quad \frac{a^3b+2c^2e-3ae^2f}{b^4+2d^2f-3bf^3}=\frac{b^4k^3+2d^2fk^3-3bf^3k^3}{b^4+2d^2f-3bf^3}$$

$$=k^3=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}$$

$$=\frac{ace}{bdf}.$$

例二、如果$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$，证明

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

令 $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k,\ \text{则}\ x=ak,y=bk,z=ck;$$

这样 $$\frac{x^2+a^2}{x+a}=\frac{a^2k^2+a^2}{ak+a}=\frac{(k^2+1)a}{k+1};$$

$$\therefore\quad \frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(k^2+1)a}{k+1}+\frac{(k^2+1)b}{k+1}+\frac{(k^2+1)c}{k+1}$$

$$=\frac{(k^2+1)(a+b+c)}{k+1}$$

$$=\frac{k^2(a+b+c)^2+(a+b+c)^2}{k(a+b+c)+a+b+c}$$

$$=\frac{(ka+kb+kc)^2+(a+b+c)^2}{(ka+kb+kc)+a+b+c}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

13. 如果一个方程对某些量是齐次的，我们可以在方程中用与这些量成比例的另一些量替换它们。例如方程

$$lx^3y+mxy^2z+ny^2z^2=0$$

对于x,y,z是齐次的，令α,β,γ为三个分别与x,y,z成比例的量。

令 $k=\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$,则 $x=\alpha k,y=\beta k,z=\gamma k;$

这样 $$l\alpha^3\beta k^4 + m\alpha\beta^2\gamma k^4 + n\beta^2\gamma^2 k^4 = 0$$

即 $$l\alpha^3\beta + m\alpha\beta^2\gamma + n\beta^2\gamma^2 = 0$$

这是一个与原方程形式相同的方程，但由 α，β，γ 分别取代了 x，y，z 的位置。

14. 下面是条很重要的定理。

如果$\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，$\frac{a_3}{b_3}$，$\cdots\frac{a_n}{b_n}$为 n 个不相等的分数，且它们分母的符号皆相同，则分数

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}$$

的值落在这些分数的最大值与最小值之间。

设这些分数的分母皆为正，且$\frac{a_r}{b_r}$为其中最小的分数，用 k 表示，则

$$\frac{a_r}{b_r}=k; \qquad \therefore a_r = kb_r;$$

$$\frac{a_1}{b_1}>k; \qquad \therefore a_1 > kb_1;$$

$$\frac{a_2}{b_2}>k; \qquad \therefore a_2 > kb_2;$$

以此类推.

相加，得 $$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n > (b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)k;$$

$$\therefore \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}>k\text{；即}>\frac{a_r}{b_r}.$$

同理可证

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}<\frac{a_s}{b_s},$$

其中，$\frac{a_s}{b_s}$是所给分数中最大的一个.

当所给分数的分母皆为负时，可以用同样的方式证明这

条定理。

15. 熟练地应用 12 节里阐述的一般性原则，在数学的各个分支中都有重要意义。读者应在任何情况下都自如地应用这一原理，而不一定要导入一个辅助符号。

【例一】 如果$\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$，证明

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}.$$

$$\text{所给分数的每一个}=\frac{\text{分子的和}}{\text{分母的和}}$$

$$=\frac{x+y+z}{a+b+c} \tag{1}$$

此外，如果我们在三个所给分数的分子分母上分别同乘以$y+z$，$z+x$，$x+y$，则

$$\text{每一个分数}=\frac{x(y+z)}{(y+z)(b+c-a)}=\frac{y(z+x)}{(z+x)(c+a-b)}$$

$$=\frac{z(x+y)}{(x+y)(a+b-c)}$$

$$=\frac{\text{分子的和}}{\text{分母的和}}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2ax+2by+2cz}. \tag{2}$$

∴从(1)与(2)，得

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}.$$

【例二】 如果$\dfrac{x}{l(mb+nc-la)}=\dfrac{y}{m(nc+la-mb)}$

$$=\frac{z}{n(la+mb-nc)},$$

证明 $$\frac{l}{x(by+cz-ax)}=\frac{m}{y(cz+ax-by)}=\frac{n}{z(ax+by-cz)}.$$

我们有

$$\frac{\frac{x}{l}}{mb+nc-la}=\frac{\frac{y}{m}}{nc+la-mb}=\frac{\frac{z}{n}}{la+mb-nc}$$

$$=\frac{\frac{y}{m}+\frac{z}{n}}{2\,la}$$

=另两个类似的表达式；

$$\therefore \quad \frac{ny+mz}{a}=\frac{lz+nx}{b}=\frac{mx+ly}{c}.$$

将这些分数中的第一个分子分母同乘以 x，第二个同乘以 y， 第三个同乘以 z，则

$$\frac{nxy+mxz}{ax}=\frac{lyz+nxy}{by}=\frac{mxz+lyz}{cz}$$

$$=\frac{2\,lyz}{by+cz-ax}$$

=另两个类似的表达式；

$$\therefore \quad \frac{l}{x(by+cz-ax)}=\frac{m}{y(cz+ax-by)}=\frac{n}{z(ax+by-cz)}.$$

16. 两个三元一次方程，如

$$a_1x+b_1y+c_1z=0, \qquad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0. \qquad (2)$$

我们不能完全解出这组方程；但是，将它们写成下面的形式

$$a_1\left(\frac{x}{z}\right)+b_1\left(\frac{y}{z}\right)+c_1=0,$$

$$a_2\left(\frac{x}{z}\right)+b_2\left(\frac{y}{z}\right)+c_2=0,$$

把$\frac{x}{z}$，$\frac{y}{z}$看成为未知量，则可以按一般方法解出这组方程，得：

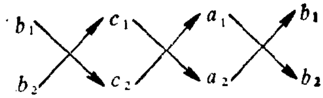
$$\frac{x}{z}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad \frac{y}{z}=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1};$$

或取更对称的形式

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1} \tag{3}$$

显然，当我们有两个如(1)、(2)那种类型的方程时，就总可以用以上的公式用方程的各项的系数写出比 $x:y:z$ 来，其规则如下：

按下图，从 y 的系数开始，顺次写下 x，y，z 的系数，然后将 y 的系数重复。



将这些系数按箭头所指交叉相乘；要记住，箭头向下的积为正，箭头向上的积为负。三个结果

$$b_1c_2-b_2c_1,\quad c_1a_2-c_2a_1,\quad a_1b_2-a_2b_1,$$

分别与 x, y, z 成比例。

这称作**交叉相乘法**。

【例一】 从方程

$$7x=4y+8z,\quad 3z=12x+11y,$$

求比 $x:y:z$。

方程移项，有

$$7x-4y-8z=0,$$
$$12x+11y-3z=0,$$

写出系数

$$\begin{matrix} -4, & -8, & 7, & -4 \\ 11, & -3, & 12, & 11 \end{matrix}$$

由此我们得

$$(-4)\times(-3)-11\times(-8),\ (-8)\times 12-(-3)\times 7,$$
$$7\times 11-12\times(-4),$$

或

$$100,\quad -75,\quad 125;$$

$$\therefore\quad \frac{x}{100}=\frac{y}{-75}=\frac{z}{125},$$

即

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{5}.$$

【例二】 从以下方程组中消去 x，y，z。

$$a_1x+b_1y+c_1z=0, \tag{1}$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0, \tag{2}$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0. \tag{3}$$

从(2)与(3)，用交叉相乘法，得

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2},$$

设这些比等于 k，乘出来代入(1)，然后除以 k，可得

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$$

这一关系式称作所给方程组的**结式**。

【例三】 解方程组

$$ax+by+cz=0, \tag{1}$$
$$x+y+z=0, \tag{2}$$
$$bcx+cay+abz=(b-c)(c-a)(a-b). \tag{3}$$

从(1)与(2)，用交叉相乘法，得

$$\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k,\quad (k\ 为假设)$$

$$\therefore\quad x=k(b-c),\ y=k(c-a),\quad z=k(a-b).$$

代入(3)

$$k[bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)]=(b-c)(c-a)(a-b),$$
$$k[-(b-c)(c-a)(a-b)]=(b-c)(c-a)(a-b);$$
$$\therefore\quad k=-1$$

由此得

$$x=c-b,\ y=a-c,\ z=b-a.$$

17. 在 16 节中，如果取 $z=1$，方程(1)与(2)便为

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0;$$

则方程(3)便为

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1};$$

或 $$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

所以，任何两个二元一次联立方程都可用交叉相乘法则求解。

【例】 解方程

$$5x-3y-1=0,\quad x+2y=12.$$

移项 $$5x-3y-1=0,$$
$$x+2y-12=0;$$

$$\therefore\quad \frac{x}{36+2}=\frac{y}{-1+60}=\frac{1}{10+3},$$

由此得 $$x=\frac{38}{13},\quad y=\frac{59}{13}.$$

练 习 一

1．求下列比的复比

(1) 比 $2a:3b$ 与 $9b^2:ab$ 的二次比。

(2) $64:9$ 的平方根比与比 $27:56$。

(3) $\frac{2a}{b}:\frac{\sqrt{6}a^2}{b^2}$的二次比与比 $3ax:2by$。

2．如果 $x+7:2(x+14)$ 为比 $5:8$ 的二次比，求 x。

3．两数之比为 $7:12$，两数之差为 275，求两数。