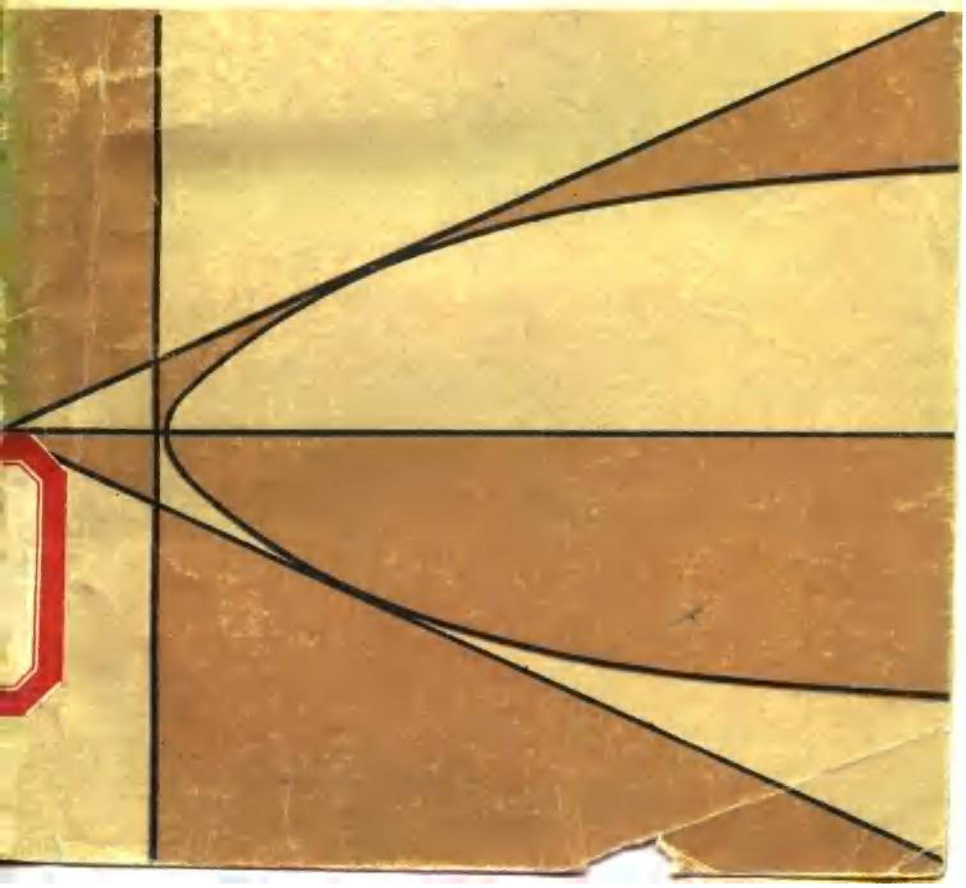
初中教师进修用书

逻辑代数和电子计算机简介

莫绍揆　汪灵华



初中教师进修用书

逻辑代数和电子计算机简介

莫绍揆　汪灵华

江苏人民出版社

封面设计　　妙　夫

责任编辑　　何震邦

逻辑代数与电子计算机简介

莫绍揆　汪灵华

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　　江苏新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 7.875　字数 160,000

1983 年 10 月第 1 版　1983 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—24,500 册

书号：7100·262　　定价：0.66 元

出版说明

《初中教师进修用书》是为了适应培训教师的需要，由华东地区上海、山东、江苏、安徽、浙江、江西、福建等六省一市八家出版社协作组织编写出版的。目的是供在职初中教师业余进修，帮助他们系统地学习和掌握有关专业的基础理论、基本知识和基本技能，提高文化水平和教学能力，以便在一定时间内通过考核达到两年制高等师范专科毕业的水平。

这套用书，目前先出语文、数学两个学科，共十九种，以后将逐步扩大到其他学科。编写当中，在坚持四项基本原则，坚持思想性和科学性相统一的前提下，注意了以下几个方面：

一、根据教育部制订的高等师范专科学校教学大纲的要求，确定各册内容的深度和广度，既体现各学科知识的系统性，又力求做到简明、精练，避免繁琐。

二、以提高教师科学文化水平为主，适当联系中学教材和教学实际，把提高知识水平和提高教学能力有机地结合起来，达到学以致用的目的。

三、从初中教师的实际水平出发，循序渐进，逐步提高要求；重视讲清学习中的难点和疑点，文字力求浅显易懂；并根据自学或函授的需要，配置必要的提示、注释、思考题和提供参考书目等学习辅助材料。

协作编写教师进修用书，尚属初次尝试。我们将在实践过程中广泛听取读者的意见和建议，努力提高书籍质量，使它更好地适合教师自学进修的需要。

编者的话

我们接受江苏人民出版社的委托，编写了《逻辑代数与电子计算机简介》一书，供初中数学教师业余自学进修使用。编写本书的目的是帮助初中数学教师掌握数理逻辑和电子计算机方面的基础理论、基本知识和基本技能，在这一门学科上达到两年制高等师范专科学校的水平。

数理逻辑是电子计算机科学的基础，而命题演算、谓词演算、递归函数、能行性理论以及集合论则是数理逻辑的基本内容。掌握电子计算机，不仅要知道它的原理，还应该知道如何将一个数值计算的问题用电子计算机进行计算，涉及的知识相当深广。我们在编写本书时，编进了若干供读者选读的章节。选读的章节在节前以“*”号标明，其内容均由小号字体排印。

本书是自学进修的入门书，但有些说法、处理与其他同类书籍不尽相同。如：本书特别强调命题代数与命题演算的区别；传统逻辑的推导，异于一般使用的集合代数的解释，而采用比较简捷的命题代数的解释，等等。

本书第一章至第四章由莫绍揆编写，第五章由汪灵华编写。

在编写过程中，我们还得到陈光还同志的支持，谨此表示谢忱。

莫绍揆　汪灵华

一九八三年五月

目　　录

第一章　集合代数……………………………………………… 1
§1.1　集合的定义和表示法 ………………………………… 1
§1.2　两集合间的关系 ……………………………………… 6
§1.3　集合间的运算 ………………………………………… 8
§1.4　集合运算的规律 ……………………………………12
*§1.5　集合代数的一些推导 ………………………………17
§1.6　应用 ……………………………………………………25
第二章　命题代数……………………………………………………38
§2.1　命题 ……………………………………………………38
§2.2　真值联结词 ……………………………………………40
§2.3　命题代数 ………………………………………………44
§2.4　蕴涵 ……………………………………………………50
§2.5　命题演算(二值代数) ………………………………61
§2.6　由前提所作出的推论 ………………………………67
§2.7　永真公式的公理系统 ………………………………73
*§2.8　传统逻辑的推导 ……………………………………76
第三章　开关代数……………………………………………………85
§3.1　开关与开关电路 ……………………………………85
§3.2　开关电路的规律 ……………………………………90
§3.3　二进制与三进制 ……………………………………95

§3.4 线路的设计……119
§3.5 线路简化的基本原则……129
§3.6 卡诺图……135
第四章 对应与函数 递归函数……144
§4.1 对应……144
§4.2 无穷集合……148
§4.3 变数与函数……153
*§4.4 递归函数……161
*§4.5 递归关系……173
*§4.6 可计算性……177
第五章 电子计算机简介……185
§5.1 概述……185
§5.2 数的运算……188
§5.3 基本逻辑元件……193
§5.4 硬件的基本结构……202
*§5.5 指令系统和程序设计……211
*§5.6 程序设计语言……221
*§5.7 操作系统……236
附 录 习题、总复习题答案……241

第一章 集合代数

§1.1 集合的定义和表示法

集合是数学中一个很根本的概念，很难再用别的词来定义它．通常只是描述它的一些特性，帮助人们对它的理解．

把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来考虑时，这个整体便说是一个**集合**，简称为**集**，这些事物叫做该集合的**元素**．我们说，这些元素组成该集合；这些元素属于该集合；又说该集合由这些元素组成，或该集合含有这些元素等等．

例如，这间房子里的椅子，这所学校里的教室，全世界上活着的鱼，2 与 8 之间的整数，一切正整数等等，这些都组成集合．

上面那段描述集合的话，还须给一些补充解释．

第一，一集合中的元素的性质丝毫没有限制，既可以是生物（如鱼），又可以是非生物（如椅子），既可以是具体的（鱼和椅子），又可以是抽象的（如正整数），还可以是介于具体和抽象之间的（如教室，教室是一些房屋，但却是作一定用途的房屋，因为兼注意其用途，它不能说完全是具体的了）．可见不同集合之间的元素可以千差万别，没有任何限制．

不但不同集合之间的元素可以不同，就是同一集合之间的元素也可以性质迥异，不能强求一律．茶壶、茶杯、茶盘当

然是不同类的，但通常却把这三者合起来组成一个集合，叫做茶具．又如桌子和椅子当然是不同类的，但通常却把一张桌子和四张椅子合成一集合，叫做家具．由于这些是常见的，人们习以为常不以为怪．如果把“太阳、墨水瓶、数 2 ”合起来组成一个集合，人们便要惊异了，会问：“这样的集合有什么用？要它做什么？”的确，在目前，这个集合是没有用处，但它确确实实是一个集合．它的元素尽管彼此截然不同，但可以合起来组成一个集合．

第二，集合中的元素的个数亦没有限制，既可以是有限的（如在这房内的椅子的个数），又可以是无限的（如全体正整数的个数），个数有限时既可以马上知其确切数（如这房间内的椅子的个数），又可以目前暂时不知其确切数（如全世界上活着的鱼），这些都是容许的．

第三，所谓“确定的”，指这些事物本身应该是确定的东西，不能是一些模糊不清没有明确意义的概念．所谓“明确”是指某一事物是否在该整体内必须是明确的，或者在其中，或者不在其中，不应模棱两可，也不应该有第三个可能．例如，“很大的数”便很难说组成一个集合．它含有什么数，不含有什么数呢？一般说，0 不在其中，“一万”似乎在其中，但“一千”在不在其中？10 在不在其中？这便很难说了．象这样连元素“在不在其中”都不能明确，便不能组成集合．

第四，所谓“彼此不同”，是说，在集合中同一事物不能算作不同的元素而必须作为同一个元素对待．这里用例子可以看得更清楚．例如，作为数列来说，{1，1，3，2，1}和{1，3，2}是不同的，前数列有五项，第一项，第二项，第五项都是 1，但须

作为三项来看待，后一数列则只有三项，第一项是1，第二项是3．两数列显然是不同的数列．如果作为集合，由于同样的“1”只能看作一个元素，因此两个集合都只有三个元素，即1,2,3，所以两个集合是相同的集合．

第五，“作为一个整体来考虑”，这很重要．必须注意，作为整体的集合和集合中每个元素都是不相同的，正如作为整体的“代表团”和代表团中的每个成员都不相同一样．在日常，我们必须把“代表团的意见”和该团中各成员的“个人意见”区别开来，就是这个道理．又如，我们经常说：“这班学生有五十人”，这是说，作为整体的“这班学生”有五十人，至于其中成员，即每个学生，都只是一个人而不是五十个人．由这些例子，便可以看出两者的区别了．

另外还有两个问题必须弄清楚．

第一，只由一个元素组成的集合是否和该元素本身相同呢？现在大家都承认两者是不相同的，应加区别．正如，当某代表团只由一个代表组成时，虽然由同样一个人说话，但作为“代表团意见”发表的和作为“个人意见”发表的，这两种意见应该是有区别的．最近，有人提出，在某些特殊情况下，可以把两者看作一样，但是除去所说的若干特殊情况外，对其余情况，两者必须区别，不能混同．所以，我们认为，无论如何，一般说来，两者是不同的，应该加以区别的．

第二，没有元素能否组成集合呢？长期以来，人们都认为，没有元素当然没有集合，正如没有米当然煮不成饭一样．但是后来随着数学的发展表明，如果容许没有元素的集合，那么讨论起来更加方便，正如算术中把“没有人”叫做“0个人”以

后，运算起来更加方便一样。因此，现在大家都承认，没有元素也可以组成集合，叫做空集合。空集合一般以ϕ（~~或0~~）表示。

下面讨论集合的表示法。

空集合用ϕ表示，集合通常以大写拉丁字母如A, B, C表示。集合的元素，一般用小写拉丁字母如a, b, c等表示。

要确定或描述一个集合又该使用什么方法呢？如果该集合是由有限多个元素组成，而这些元素，我们又已经完全知道得清清楚楚的，那末最简便的方法是把元素一一列举出来，这叫做**列举法**。例如，$A_1=\{$太阳，墨水瓶，数$2\}$，$A_2=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$。

即使该集合由有限多个元素组成，但其元素太多，不便一一列举（如全世界的人），或者其元素目前还不能完全确知（如全世界活着的鱼），“不能确知”不但由于个数太多，有时即使个数极少也不能确知，例如五次方程 $x^5-4x^3+7x^2-9=0$ 只有五个根，但这五个根是什么，我们是不知道的，遇到这些情况便不应该用列举法。如果集合是由无限多个元素组成的（例如，全体正整数的集合）更不能用列举法。这时只能写出其元素的刻画特征，即这集合中各元素都共有这个特征，而集合以外的元素都不具有这个特征。特征性质都借助于“x”表示，例如

$$A_3=\{x: x^5-4x^3+7x^2-9=0\};$$

$$A_4=\{x: x\text{ 为世界上活着的鱼}\}.$$

如果不致引起误会，亦可简写为：

$$A_3=\{x^5-4x^3-7x^2-9=0\text{ 的根}\};$$

$A_4=\{$世界上活着的鱼$\}$.

这样的表示法叫做写出**特征法**.

这两种方法是最常用的方法. 其中以写出特征法更为基本,因为凡能用列举法写出的, 都可改用写出特征法. 例如, 上面列举法的两例, 用写出特征法表示为

$$A_1=\{x:x=\text{太阳或 }x=\text{墨水瓶或 }x=2\};$$

$$A_2=\{x:x\text{ 为整数并且 }2\leqslant x\leqslant 8\}.$$

当然,如果可用列举法时,则使用列举法每每更清楚些也更方便些, 所以列举法也不应该废除.

为了能够形象化地帮助理解,我们又可用图表示集合.最通常的方法是对给定的集合用圆表示, 圆内的点表示该集合的元素,圆外的点表示不是该集合的元素,不同的圆表示不同的集合,但须注意,除非一圆包含在另一圆之内,否则,不能认为圆画得大些便表示相应的集合多些元素. 这种圆通常叫做**维因**(*Venn*)**圆**, 其实是由大数学家欧拉(*Euler*)首先使用的.

集合和传统逻辑中的概念有很密切的关系, 概念是从事物的外表现象中抽象而得的抽象的东西. 在传统逻辑中, 概念分内涵与外延两方面. 内涵指概念的本质, 外延指该概念所包括的事物的总体. 例如,"对边两两平行的四边形"是"平行四边形"这个概念的内涵,而各个的平行四边形的总体便是平行四边形这个概念的外延. 这是传统逻辑对概念的讨论内容.

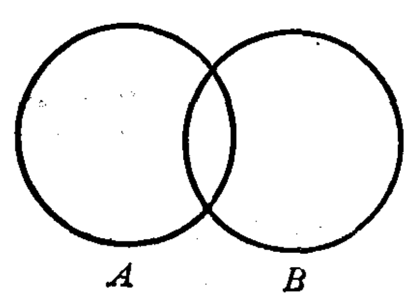


图 1.1

容易看见, 集合便是某个概念的外延, 而该集合的特征性质便是

该概念的内涵。例如，设

$A=\{x: x$ 为两双对边两两平行的四边形$\}$。

这里A便既是一个集合，又是平行四边形这个概念的外延，而“两双对边两两平行的四边形”既是集合A的特征性质，又是平行四边形这个概念的内涵。可以说，讨论集合实质上便是从外延观点来讨论概念。

以前的传统逻辑讨论概念的时候，大体上更重视内涵，当外延相同但内涵不同时仍然当作不同的概念。例如“鬼”“有棱角的圆”这两概念，就其外延来说，都是空集，但内涵不同，我们一直把这两个看作不同的概念。如果着重外延，应该认为其外延是相同的，都是空集。

以前人们都想把传统逻辑改革，一直没有很好的结果，那是由于人们注重内涵的缘故，从布尔开始强调“外延”，把一概念的外延，即集合，作为专门研究的对象，不再拘泥于其内涵是否相同，于是才出现布尔代数，才使数理逻辑进入一个新的转折点。

可以说，把概念的讨论换为集合的讨论，这标志着注重点由内涵转为外延，标志着数理逻辑出现了新面貌，这是一个很重要的事件。

§1.2 两集合间的关系

定义 如果集合A的元素和集合B的元素全同，那末A和B相等，记为$A=B$。

如果集合A的元素也都是集合B的元素，我们便说B包

含A，或说A **被** B **包含**（或A含于B），记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。这时B的元素不必一定也是A的元素，如果B有些元素不是A的元素，便说B **真包含**A，或说A被B **真包含**（或A真含于B），记为$A\subset B$或$B\supset A$。

当A被B包含时，又说A为B的**子集合**（或子集），当A被B真包含时，亦说A为B的**真子集合**（真子集）。

如用图表示，则应把表示A的圆画在表示B的圆的内部。这样，B是否包含A，可以由图很清晰地看出来。

试举一例。 设$A_1=\{$偶质数$\}$，$A_2=\{$非平方数$\}$，$A_3=\{12$的因子$\}$，$A_4=\{8$的质因子$\}$，则有$A_1\subset A_2$，$A_1\subset A_3$，$A_1=A_4$，而A_2与A_3则互不包含但有公共元素。A_1的元素的特征（偶质数）和A_4的元素的特征（8的质因子）表面看来很不一样，但所含元素却完全相同，都只含有“2”一个元素，因此便有$A_1=A_4$。

设有任一集合A，当把A的元素逐次抽掉时，依次得到A的各个子集，最后，当把A的所有元素完全抽掉时，便得到空集。可见空集是任何集合A的子集。这也可这样理解：“C为A的子集”指C的任何元素都是A的元素，亦即不可能找出是C的元素而不是A的元素的；当C为空集时，当然不可能找出是C的元素而不是A的元素的（因为，空集本身根本没有元素，当然更找不出满足该条件的元素了）。因此，根据定义，空集是任何集合的子集。

反之，如果有一集合B它是任何集合的子集，那末B必是空集。试设A_1，A_2无公共元素，B既是任何集合的子集，当然同时是A_1的子集又是A_2的子集了，满足这个条件的只有空集。

如果用圆表示集合，由于空集没有任何元素，所以空集不能用任何圆表示.因此，在维因圆表示法中，只能用空白表示空集合。

有没有一个集合它包含每一个集合呢？亦即，有没有一个集合它以每一集合为其子集呢？这个集合必以每一个集合的元素为其元素，亦即它的元素穷尽了宇宙间所有的事物.这种集合是否存在呢？根据多方研究，现在大家都承认，无条件地以一切集合为其子集的集合是不存在的，但以一定范围内的各个集为其子集的集合则是存在的，叫做该范围的**全集**，并记为I。严格说来，如果讨论的范围不同，则全集I也是不相同的，须使用不同的记号。但当讨论范围确定后，相应的全集便只有一个，所以通常便只使用I，不再区别了。

在图形表示中，一般把全集I特用矩形表示，由于所讨论的集合都被I所包含，因此表示各集合的圆便都画在该矩形之中。

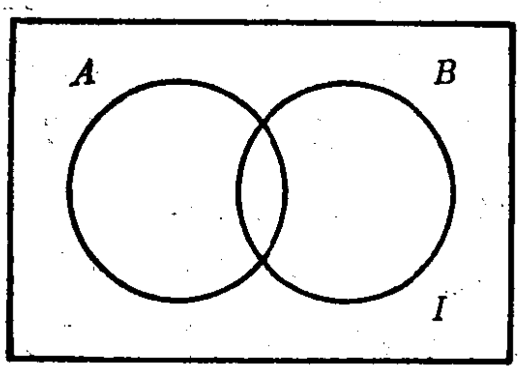


图 1.2

总结起来有：对任何集合A而言，

$\phi\subseteq A$ 及 $A\subseteq I$。换句话说，空集被任何集合A所包含，而全集包含任何集合A。

§1.3 集合间的运算

上面讨论的两集合间的相等和包含，很类似于两数之间

的相等和大小．我们知道在两数之间可以进行加减乘除等运算，同样，两集合之间亦有它们的运算，即由两个给定的集合可以作出一个新集合．下面研究集合的运算．

设给出两个集合A，B，则

$$C_1=\{x: x\text{属于}A\text{或}x\text{属于}B\}$$

便叫做A与B的**并集**．记为$C_1=A\cup B$，读做A**联**B，或A**并**B．显然，C_1的元素是由A的元素与B的元素汇总而得．当然，同时属于A又属于B的一个元素在C_1内只能算作一个．通常把并和算术中的加相对应．

其次，$$C_2=\{x: x\text{既属于}A\text{又属于}B\}$$

便叫做A与B的**交集**，记为$C_2=A\cap B$，读为A**交**B．显然，C_2的元素恰是A与B的公共元素．通常把交和算术中的乘相对应．

其次，$$C_3=\{x: x\text{不属于}B\}$$

便叫做B的**补集**，记为$C_3=B'$（或$\overline{B}$，或$-B$），又叫补B．实施补运算时叫做**取补**，例如求B'便叫做取B的补．显然，C_3的元素是由B以外的（即不在B中的）元素所组成．由于$B''=B$，因此曾经有人把补运算和算术中"取反号"运算相对应（这也就是为什么B'又写为$-B$的缘故），但除去这一点彼此相似外，别的性质两者几乎毫无相似之处，作这个对应是弊多利少，现在很少作这种对应，因此，我们也不考虑这种对应．

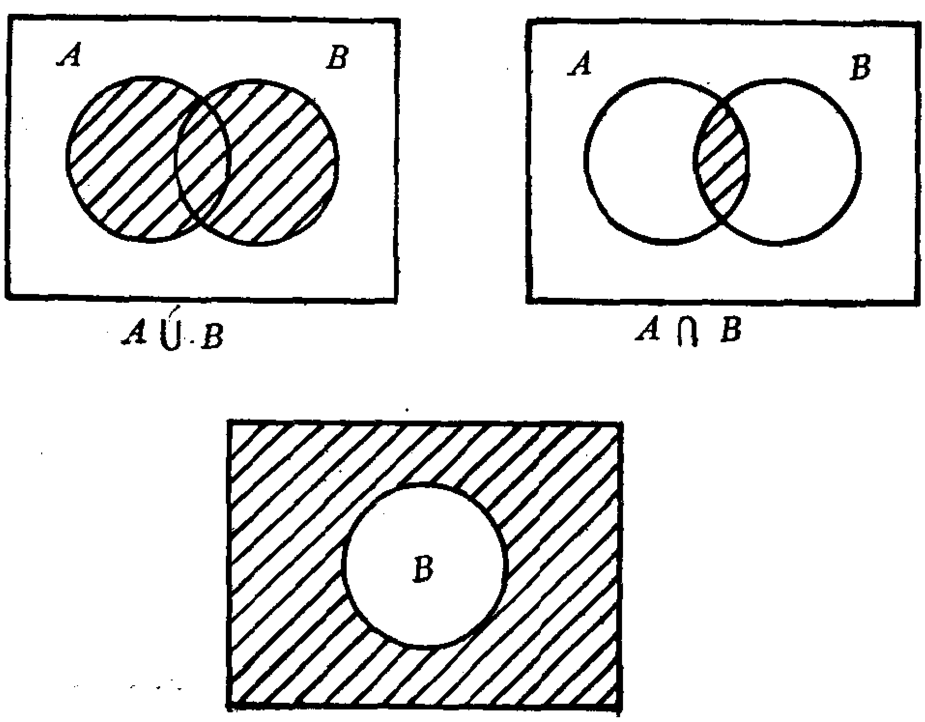
并、交、补是集合代数中三个最基本的运算．有些书还引入求差运算：

$$C_4=\{x: x\text{属于}A\text{但不属于}B\}．$$

C_A 叫做 B 相对于 A 的补集，记为 $C_A = A - B$ 或 $C_A = A \setminus B$，读为 A 减去 B 或 A 抽去 B。有些人把 $A \setminus B$ 和算术中的减法相对应（这便是记号 $A-B$ 和求差运算、差集等名称的由来），但这种对应也因用处很少，不常被人们采用。

补运算可用求差运算表示，因为 $B' = I \setminus B$；反之，有了交运算以后求差运算可用交、补运算表示：$A \setminus B = A \cap B'$。由于补运算是一元的，求差运算是二元的，两相比较，补运算要简单一些，因此取补运算代替求差运算作为基本运算是有好处的。

在图解法中，A 与 B 之并可用 A 圆与 B 圆的合并来表示，A 与 B 之交可用 A 圆与 B 圆的公共部分来表示，B 之补可用 B 圆以外的部分来表示，这些都不再是圆，而是别的形



$A \cup B$　　$A \cap B$

B'

图 1.3