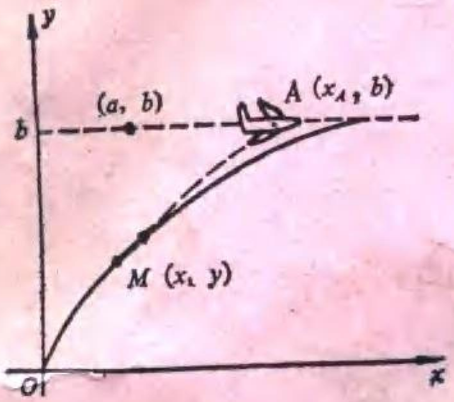
金福临　阮炯　黄振勋　编著



大学应用数学丛书

应用常微分方程

复旦大学出版社

大学应用数学丛书

应用常微分方程

金福临　阮　炯　黄振勋　编著

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书从实用的角度出发，着重论述了常微分方程的基本理论、方法和应用。主要内容有：常微分方程模型的归结方法，各种类型常微分方程(组)的求解方法，边值问题，基本理论，数值解法，等等。全书还列举了许多在物理、力学、化学、生物、医学、控制、经济、管理等领域中的应用实例。

本书可作应用数学和其他理工科应用类专业的教材或教学参考书；也可供数学专业师生和一般科技工作者了解常微分方程的理论、方法与应用时阅读和参考。

沪新登字202号

责任编辑 周仲良

责任校对 周冬招

大学应用数学丛书

应 用 常 微 分 方 程

金福临 阮炯 黄振勋 编著

复旦大学出版社出版

(上海国权路579号)

新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 12.875 字数 377,000

1991年9月第1版 1991年9月第1次印刷

印数 1—3,500

ISBN 7-309-00695-X/O·94

定价：5.50元

J小195128

《大学应用数学丛书》

本书责任编辑　周仲良

序

近年来，许多理工科专业需要开设常微分方程课程，但现有教材多数适用于数学专业，为此，我们编写了本书，它可以作为有关专业的教材，也可以作为数学专业的教学参考书，同时对广大科技工作者也是一本了解常微分方程的基本理论及其应用的入门书。

本书是在编者近年来教学实践的基础上总结整理而成的，初稿曾在复旦大学试用过两次。与现有教材比较，主要有下列几种变化。第一，在第一章中概述了常微分方程模型归结的三种方法。全书列举了许多在物理、力学、化学、生物、医学、控制、经济等领域中的应用实例，并将它们安排在模型归结、线性系统、非线性系统、定性与稳定性分析等有关章节中。第二，对于方程的基本概念、理论与解法，以线性与非线性两种类型分别阐述，并加以比较。第三，我们把实际应用中很有用的边值问题、数值解法的内容分别单独列为一章。

在使用本书时，可以按不同专业要求选取不同章节的内容与实例。

中山大学周之铭教授和复旦大学侯宗义教授详细审阅了本书，并提出了许多宝贵的意见，编者谨向他们表示深切的谢意。复旦大学出版社为本书的出版作了很大努力，我们也表示深切的感谢。最后殷切期望读者批评指教。

编　者

1990年12月

出版者的话

近年来，随着我国现代化建设事业的发展，许多高等学校创办了一大批重视数学理论和应用的专业和系科，如：应用数学、应用力学、计算数学、控制科学、信息科学、系统科学、运筹学、统计学、计算机科学、应用物理、管理科学等。为了满足这类专业数学教学的需要，我们组织编写和出版了一套"大学应用数学丛书"。本书即为这套丛书中的一本。

"大学应用数学丛书"重视现代数学的基本理论，强调数学的实际应用，反映现代科技的先进成果，并便于课堂教学和自学。我们希望，这套丛书的出版将有助于我国应用数学教学与研究的展开，促进数学更好地为国民经济和现代化建设服务。

在组织编写这套丛书的过程中，我们曾得到陈开明、陈有根、柳兆荣、徐公权等同志的热情帮助，在此特表谢忱。

复旦大学出版社

1987 年 1 月

目 录

第一章 常微分方程模型的归结及基本概念

§1 基本概念

什么是常微分方程？让我们先从几个例子谈起.

例 1 求一个函数 $x=x(t)$，使它的导数等于一个给定的函数 $f(t)$.

由微积分可知，$x(t)$ 实际上就是已知函数 $f(t)$的原函数.按题意列方程式得

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(t), \tag{1}$$

它的解为

$$x(t)=\int f(t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

例 2 求一条曲线 Γ:$y=y(x)$，使其上任一点 $(x, y(x))$处的切线垂直于此点与原点的连线.

曲线 Γ 在其上任一点$(x,y(x))$处切线的斜率为$y'(x)$，如图 1.1 所示，有 $\operatorname{tg}\alpha=y'(x)$，$\alpha=\beta+\pi/2$,

$$\operatorname{ctg}\beta=x/y(x).$$

按题意可列出方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}&=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\\&=-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{x}{y(x)},\end{aligned}$$

此方程可简化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}. \tag{3}$$

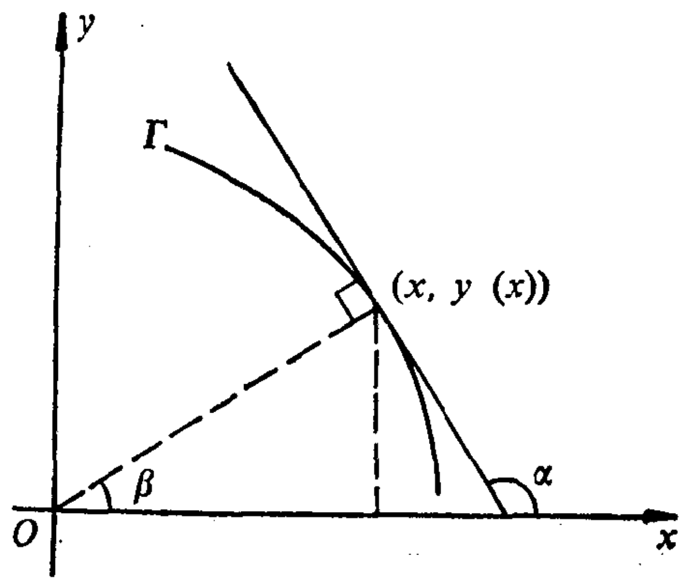


图 1.1

例 3 质量为 m 的物体以初速为零自高处垂直下落，受到的空气阻力与物体速度的平方成正比，比例系数等于 k，求落体的运动规律。

假设物体下落的路程以函数 $s(t)$ 表示，t 为时间，由微积分可知，速度 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，加速度 $a=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$。

在物体下落时，它受到与运动方向一致的重力

$$P=mg,$$

其中 g 为重力加速度；还受到与运动方向相反的空气阻力

$$F=kv^2=k\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

k 为正常数。根据牛顿(Newton)运动第二定律得

$$P-F=ma,$$

这样，就有方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=mg-k\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{4}$$

按题意与运动有关的约束条件可表为初始时刻 $t=0$ 时的条件

$$s(0)=0,\ v(0)=s'(0)=0. \tag{5}$$

形如(5)的条件称为*初始条件*。

例 4 本世纪初，物理学家卢瑟福(Rutherford)等人证明，某些"放射性"元素的原子是不稳定的，并且在一段时间内总有一定比例的原子自然衰变而形成新元素的原子．用单位时间内衰变的原子数来描述物质的放射性与所具有的原子数成正比．

如果用 $N(t)$ 表示时间 t 时放射性物质具有的原子数，那末 $\frac{dN}{dt}$ 就表示单位时间内衰变的原子数，它与 N 成正比，记比例系数为 λ．由于原子数不断减少，故 λ 是一个负常数．列出方程式如下：

$$\frac{dN}{dt}=\lambda N. \tag{6}$$

设初始时刻 t_0 时该物质具有的原子数为 N_0，则有初始条件

$$N(t_0)=N_0. \tag{7}$$

例 5 17世纪末至 18 世纪初，牛顿发现在较小的温度范围内，物质冷却的速率正比于物质的温度和外界温度的差．

为了导出相应的数学模型，先看下面的实验．

把 150 毫升甲醇样品放在玻璃烧杯中，加热至 50℃，然后在温度 T_0 为 23.2℃ 的室内逐渐冷却，将液体内部的温度作为时间的函数记录下来，取横坐标为时间 t，纵坐标为 $\ln(T-T_0)$，将数据作成图像，如图 1.2 所示，图形非常接近于一条直线，其斜率是 $k=-6.6\%$，方程是

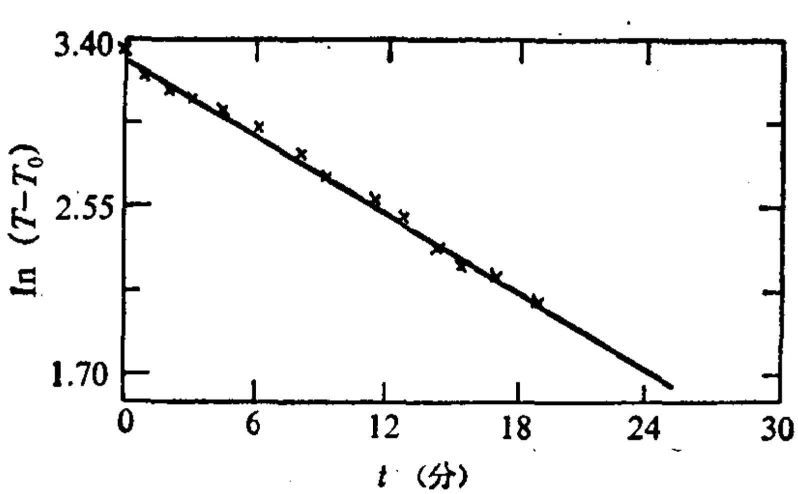


图 1.2

$$\ln(T - T_0) = -kt + b. \tag{8}$$

这就是相应数学模型的解的函数表达式. 现由它反推出数学模型来,将(8)关于 t 求导,得

$$\frac{1}{T-T_0}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k,$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_0). \tag{9}$$

这就是牛顿冷却定律的数学形式. 它是科学史上最早的微分方程之一,当初牛顿是用经验方法得出的.

上面五个例子中推导出的方程有一个共同的特点: 未知的是含有一个自变量的函数, 又方程中含有未知函数的导数. 我们称这类方程为常微分方程就是偏微分方程.

如果在一个方程中有两个或两个以上的自变量的未知函数, 且含有未知函数对这些自变量的偏导数,那末就是偏微分方程. 例如,下面两个方程式.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial T(t,x,y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t,x,y)}{\partial y^2}. \tag{11}$$

此后,我们往往把常微分方程简称为微分方程,甚至于更简单地称为方程.

常微分方程的类型有以下几种划分的方法.

一种是考虑方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数(也称为常微分方程的阶). 例如, 方程(1),(3),(6),(9)均是一阶方程, 而方程(4)是二阶方程. 一般的 n 阶常微分方程可表示为

$$F\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right) = 0, \tag{12}$$

其中 t 是自变量,x是未知函数,$F\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right)$是 $n+2$个变量

$t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$的已知函数，且$F$中明显地出现变量$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$.

另一种是考虑未知函数及方程的个数．例如下面方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 2x_1 + 3x_2 + t, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -3x_1 + 2x_2 + \sin t \tag{14}$$

构成了包括两个未知函数（即x_1, x_2）及两个方程组成的方程组．

常微分方程的解有显式与隐式两种形式。显式形式$x=\varphi(t)$称为方程(12)的解是指函数$\varphi(t)$在某区间$a<t<b$内有n阶连续导数，且使

$$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$$

在$a<t<b$内恒成立，其中区间$a<t<b$称为解$x=\varphi(t)$的定义区间．但有时不易求得显式形式的解，而只求得t, x的关系式$\Phi(t,x)=0$。若由它确定的函数$x=\varphi(t)$是(12)的解，则称$\Phi(t,x)=0$是方程(12)的隐式形式解，简称为方程(12)的积分．对于一个微分方程，求得它的积分，就相当于求得它的解．解或积分在t, x平面上的几何表示是平面曲，称为方程(12)的积分曲线。

在例5中，由(8)得

$$T(t) = T_0 + \mathrm{e}^{-kt+b} \tag{15}$$

易验证它是方程(9)在整个实轴上定义的解．

在例2中，将方程(3)视为比例等式，对角相乘并两边积分得

$$\int y\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x,$$

$$y^2 + x^2 = C, \tag{16}$$

其中C为正的常数，这表明圆心在原点的一族同心圆是例2要求的曲线。易验证由(16)确定的隐函数满足方程(3)。

方程(3)的解(16)中含有任意常数C.方程(9)的解(15)中含有的参数k, b, T_0都是确定的。往后，我们把含有任意常数的显式解称为方程的通解，而把含有任意常数的隐式解（积分）称为方程的通积分。又

把不含任意常数或通解(通积分)中任意常数取为确定值的解为特解.

§2 模型归结

常微分方程与微积分是同时产生的，一开始就成了人类认识世界和改造世界的有力工具. 随着生产实践和科学技术的发展，常微分方程也不断地演变发展为数学学科中理论联系实际的一个重要分支. 在力学、物理、化学、生物学、医学、自动控制和经济管理等学科中，在电子技术、星际航行及工业与农业的许多领域里，人们已经提供了大量应用常微分方程的实例.

应用常微分方程解决实际问题的步骤如同其它的应用数学学科一样，通常分为以下三个基本步骤：

(1) 由实际问题建立相应的数学模型——常微分方程(组)；

(2) 求解与分析这一数学模型，即求出相应的常微分方程(组)的解，或是精确解，或是近似解，其中还包括分析解的特性；

(3) 利用所得的数学结果，利用解的形式和数值，利用解的定性分析，回过头去解释实际问题，从而预测某些自然现象甚至社会现象中的特定性质，以便达到能动地改造世界、解决实际问题的目的.

下面就基本步骤(1)讲些基本方法及类型，并为今后章节讲述解法与进行定性分析提供一些实际的背景.

常微分方程模型的归结方法有如下几种：一是根据规律列方程；二是微元分析法；三是模拟近似法.

一、根据规律列方程

前面§1中的例2、例3、例4、例5各方程的建立用的就是根据规律列出方程的方法. 大家知道，在数学、力学、物理、化学等学科中已有许多经过实践或实验检验的规律或定律，如牛顿运动定律、牛顿冷却定律、曲线的切线的性质、物质放射性的规律等，它们都涉及到某些函数的变化率. 当然，为了列出相应的常微分方程，有几个要素必须首先明确，如自变量、未知函数、必要的参数与常数、坐标系等.

下面再通过几个实例来说明这种方法.

例 1 电容器的充电和放电

如图 1.3 所示的 $R—C$ 电路，开始时电容 C 上没有电荷，电容两端的电压为零. 我们把开关 K 合上至"1"，电池 E 就对电容 C 充电，电容 C 两端的电压 v_c 逐渐升高，经过相当时间后，电容充电完毕. 我们再把开关 K 合至"2"，这时电容就开始了放电过程. 而现在要求找出充电和放电过程中电容 C 两端的电压 v_c 随时间 t 变化的规律.

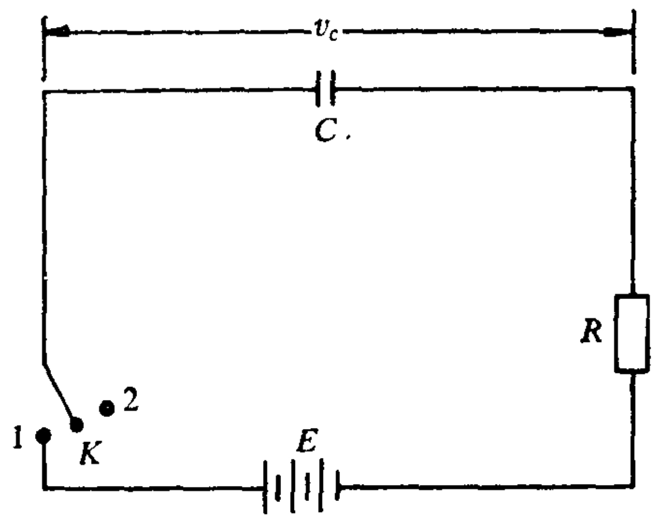


图1.3

解 取时间 t 为自变量，未知函数为电容 C 两端的电压 $v_c(t)$. 用于建立方程的规律是关于闭合回路的基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律，即电池的电势 E 等于回路中电势降的和. 现是 R-C 电路，即有电容 C 两端的电压 v_c 与电阻 R 的电势降 RI，其中 $I=I(t)$ 为回路中的电流. 按基尔霍夫第二定律可列出方程

$$E=v_c+RI. \tag{1}$$

又设电容 C 上的电量为 $Q(t)$，则

$$I(t)=\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cv_c(t))=C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

将(2)代入(1)得

$$RC\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}+v_c=E, \tag{3}$$

其中 R,C,E 全是已知的常数. (3) 是一阶线性常微分方程. 为找出

$v_c(t)$，需要给出初始条件：$v_c(0)=0$，即开始把 K 接至"1"时，也就是对 C 开始充电时，C 的两端电压 v_c 应为零。

下面求解(3)。将(3)改写为

$$\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_c-E}{RC},$$

或写为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}(v_c-E)}=-\frac{RC}{v_c-E},$$

将 t 视为未知函数，v_c-E 为自变量，则得

$$t=\int-\frac{RC}{v_c-E}\mathrm{d}(v_c-E)$$

$$=-RC\ln|v_c-E|-RC\ln A,$$

其中 A 为任意常数。还原写成 $v_c(t)$ 的函数形式

$$v_c=E+Ae^{-\frac{t}{RC}}. \tag{4}$$

这就是方程(3)的通解。现用初始条件 $v_c=0$ 去确定 A，从而求得特解，也就是求得充电过程中电容 C 两端电压随时间变化的规律 $v_c(t)$。将 $t=0$ 代入(4)得

$$0=v_c(0)=E+A,$$

即有 $A=v_c(0)-E=-E$，所以

$$v_c(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})。 \tag{5}$$

把(5)的关系用图 1.4 画出来。充电过程中电压 v_c 从零开始逐

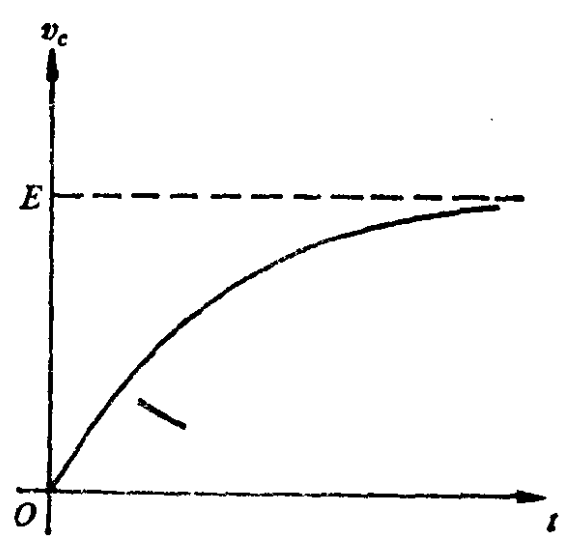


图 1.4