射影几何

毛澍芬　沈世明　编著

射 影 几 何

毛澍芬　沈世明　编著

上海科学技术文献出版社

内 容 提 要

本书是在解析几何的基础上，应用射影的观点论述一维和二维射影几何学．全书共分五章，第一章基本概念，叙述射影几何的一些基本知识．第二章主要论述一维射影几何学．第三章着重讨论了射影平面间的直射对应和对射对应即二维射影对应．第四章应用变换群的观点对几派几何学进行比较．第五章从射影几何的角度研究二次曲线．

全书以代数法为主，注意与初等几何和解析几何等课程的联系．书中有较多的例题，每节配有一定数量的习题，书后还附有答案或提示．内容通俗易懂，可作为高等几何课程的教学用书或参考书．

华东师范大学数学系教授钱端壮先生审阅了全书．

射 影 几 何

毛澍芬　沈世明　编著

*

上海科学技术文献出版社出版
（上海市武康路 2 号）
新华书店上海发行所发行
吴江伟业印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 13.125　字数 320,000
1985 年 8 月第 1 版　1985 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—7,700

书号：13192·74　定价：2.40 元

《科技新书目》98-187

代　　序

<射影几何>也叫<近世几何>或<高等几何>，它是研究图形在射影变换下不变性质的学科，其奠基者是法国的几何学大师笛沙格(Desargues)，后来累有发展，但它成为数学中一门学科却归功于他的学生彭斯莱(Poncelet)，他在1822年发表了<图形射影性质教程>(Traite des Properétés Projective des Figues)的著作后，轰动全欧，各国数学家纷纷研究，如英国的凯莱(Cayley)，德国的斯坦纳(Steiner)以及冯斯滔(Von Staudt)等，经过各国学者的努力，成果累累，汇成大篇，并发展了<n维射影几何>与<代数几何>，到1872年德国人克莱因(F.Klein)在艾尔兰根(Erlangen)纲领中，企图从群论的观点，以射影几何为基础，导出当时的各派几何学，其中包括欧氏几何，仿射几何，非欧几何(罗巴切夫斯基几何与椭圆几何)，反演几何等，所以19世纪有句名言"一切几何学都是射影几何"，射影几何在当时也就登峰造极，到达了最隆盛的时代．

二十世纪射影几何虽仍有发展而且是多方向的，例如美国的冯诺曼(Von Neumann)与德国的海梅斯(Hermes)创立了<连续几何>(Continuous Geometry)，将射影几何中的结合公理与代数学中的格论(Lattice Theory)联系研究，又如美国的霍尔(Hall)，受到希尔伯特(Hilbert)的启发，对非笛沙
何进行了深入的研究，创建了新学科<射影平面
Plane)等等．总之发展是多分支的，在此
疑射影几何的主导精神似已贯注

影几何中的维数、线性、齐次性、不变式及不变空间和对偶原理等，这些概念无论在拓扑学、分析学或代数学中到处都可以察觉到它们的重要性.

在教学中，射影几何也是很重要的，素有称<高等微积分>、<高等代数>、<高等几何>为数学系的"三高"，后来虽几经变动，但目前仍列为师范院校数学系的必修课程. 本课程一般在大学二年级开设，这一阶段学生仍以打基础为主，射影几何中的几个重要概念和定理如对合、巴普斯(Pappus)定理、笛沙格定理、巴斯卡(Pascal)定理等仍应仔细地学习体会，对于师范院校的学生如能牢固地掌握射影几何的内容，不但在他们以后的几何课程的教学中做到融会贯通，得心应手，而且由此渐进地做点科学研究工作都会感到有很大的益处.

目前高等几何合适的教材还不多，上海师范大学毛澍芬、沈世明同志在多次讲授本课程的基础上，积累了较丰富的经验，他们在原有讲义的基础上，重新进行了编写，全书的内容既体现了代数方法处理几何的优越性，也顾及到综合法对几何学的作用. 本书以扩大的欧氏平面为模型，直观地简单易懂地处理了各种问题，思路活泼，文笔流畅，书中有相当多的例题，可算是一本较好的教材，也是一本良好的自学参考书. 值此<射影几何>教材比较贫乏之际，本书出版可给有关人员一定的帮助，并为广大学生的学习给予便利，故乐作简短介绍.

钱端壮

1984年5月

编 者 的 话

本书是在编者讲授<高等几何>课程时所用讲义的基础上进行改写的. 全书共分五章. 第一章介绍几何学的维数、点变换、中心射影、直线坐标、对偶原理等基本概念, 还讨论了仿射变换的不变性和不变量(简比)以及一些特殊的仿射变换, 从而将几何学中所熟知的平移变换和旋转变换等统一在仿射变换之中. 在中心射影下,为使点与点(或直线与直线)保持一一对应,有必要引进无限远元素和齐次坐标. 本书主要限于实数, 但有时也需要扩大到复数, 例如本章§12 介绍了复元素. 第二章采用几种不同的形式来定义一维射影对应, 并证明了这些定义的等价性,着重介绍了射影变换的不变量(交比),比较详细地讨论了一维射影对应的特例(透视和对合). 第三章讨论了射影平面间的直射对应和对射对应. 前者是同素对应,即点变为点,直线变为直线; 后者是异素对应,即点变为直线和直线变为点. 两者都属二维射影对应. 本章还介绍了在已知条件下,求射影对应式的快速方法,从而避免繁复的运算. 利用射影坐标系证明了完全四点形的调和性质和巴普斯定理,在透射的基础上,证明了著名的笛沙格定理, 最后讨论了直射对应和对射对应的几种特例. 第四章从变换群的观点出发, 对射影、仿射、抛物和欧氏等四种几何学进行比较, 从而明确各派几何学之间的关系. 第五章二次曲线的理论, 主要讲述作为点的轨迹的二阶曲线与作为直线包络的二级曲线, 它们统称二次曲线, 还讨论了配极变换、二次曲线束以及二次曲线的射影分类、仿射分类和二次曲线的度量性质

等．最后对非欧几何学略作介绍．

由于本课程只讲授一个学期，因此主要讨论一维和二维的射影几何，对于三维的情况仅作了一些简单的介绍．所用的数学仅限于解析几何和高等代数的基础知识．全书以代数法为主，并较多地强调了点变换，因为它是近代数学研究的对象．书中有较多的例题，每节还有一定数量的习题，书后附有答案或提示．近代几何学的内容是十分丰富的，编者认为仅仅限于欧几里德几何是不够的，本课程对从事中学数学教学的教师来说是很必要的，它能起到提高教学水平和开阔视野的作用．编写力求通俗并注意同初等几何与解析几何等课程的联系．

华东师范大学数学系教授钱端壮先生详细地审阅了全书，提出了许多宝贵的意见，徐松范同志曾多次使用过本教材，也提了一些有益的意见，在此一并表示谢意．

限于编者学识浅薄，书中不当和谬误一定不少，真诚地希望读者批评指正．

编　者

1984.5

目　录

第一章　基本概念

本章目的是在欧氏几何的基础上，建立仿射对应，研究仿射对应的性质以及介绍射影几何的基本概念，为后面几章作好准备.

§1　几何学的维数

定义 1.1.1　构成几何图形的基本东西，称为几何元素.

通常以点作为几何元素，但在高等几何学的范围内，直线、平面和圆等都可以作为几何元素．为了使代数方法可以应用到几何里去，必须考虑几何元素的坐标.

定义 1.1.2　如果一个数或一个有序数组的集合能与几何元素的全体建立一一对应[注]，那么，这个数或这个有序数组就称为这个几何元素的坐标.

例如直线上点的坐标为数 x，平面上圆的坐标为有序数组 (a, b, r)，其中 (a, b) 为圆心的坐标，r 为圆半径.

定义 1.1.3　几何元素的坐标的个数即几何元素的活动自由度称为该几何学的维数.

例如直线上的点几何学是一维的，平面上的圆几何学是三维的.

例 1　以平面上的圆锥曲线为几何元素的几何学是几维的？

［注］　一一对应的概念参看本章 §2 定义 1.2.3.

解　因为平面上圆锥曲线的一般式方程为

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0, \qquad (A)$$

且 a, h, b 不全为 0. 不妨设 $a\neq 0$, 以 a 遍除(A)式各项则得

$$x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0,$$

有序数组 (h', b', g', f', c') 可与平面上的圆锥曲线(包括退化圆锥曲线)建立一一对应. 所以该数组可以作为平面上圆锥曲线的坐标. 由定义 1.1.3 可知, 以平面上的圆锥曲线为几何元素的几何学是 5 维的. 其实维数就是式中独立参数的个数.

例 2　(1) 以球面为几何元素的几何学是几维的?

(2) 以球面上的点作为几何元素的几何学是几维的?

解　(1) 以 (a, b, c) 为球心, R 为半径的球面方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

显然, 球面方程由 a, b, c 和 R 完全决定, 所以以球面为几何元素的几何学是 4 维的.

(2) 以 (a, b, c) 为球心, R 为半径的球面方程也可写成

$$\begin{cases} x=a+R\cos\varphi\cos\theta & 0\leqslant\theta<2\pi \\ y=b+R\cos\varphi\sin\theta & \\ z=c+R\sin\varphi, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

显然, 球面上的点由 θ 和 φ 完全决定, 所以以球面上的点为几何元素的几何学是 2 维的.

例 3　试举三例说明一维图形(或称一维几何形式).

解　(1) 点列——一直线内所有点的集合称为点列, 此直线称为点列的底. 点列上的每个点 A 是它的元素, A 与其坐标 x 是一一对应的. 所以点列为一维图形.

(2) 线束——在一平面内经过一定点的所有直线的集合称为线束, 此定点称为线束的中心. 线束中的每条直线 a 是它的元素, 由于平面上过定点 $S(x_0, y_0)$ 的直线方程为

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

它决定于斜率 k，所以线束为一维图形，如图 1.1. 图中一条水平直线截线束 $S(a, \cdots)$，得到一个点列 $(A, \cdot\cdot)$.

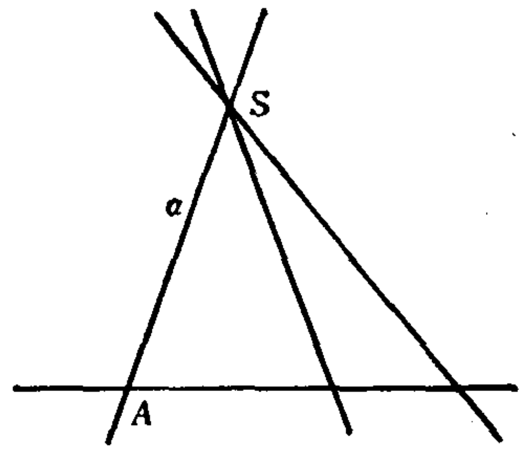

图 1.1

(3) 面束——经过一直线的所有平面的集合称为面束，此直线称为面束的轴. 面束中每个平面是它的元素，由于面束中的平面可以与线束中的直线一一对应（只要把图 1.1 看成是面束的直截面的结果，就可以建立这种对应了），所以面束也为一维图形.

例 4 试举三例说明二维图形(或称二维几何形式).

解 (1) 点场——平面内所有点的集合称为点场或点域，此平面称为点场的底. 点场中每个点 M 是它的元素，由于 M 与 (x, y) 一一对应，所以点场为二维图形，如图 1.2.

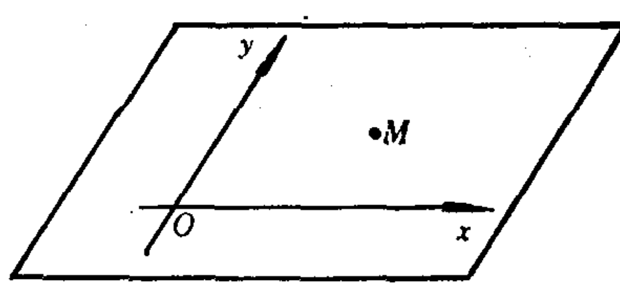

图 1.2

(2) 线场——平面内所有直线的集合称为线场或线域，此平面称为线场的底. 由于平面上的直线方程为

$$Ax+By+C=0,$$

其中 A, B 不同时为零，不妨设 $A\neq 0$，以 A 遍除上式得

$$x+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}=0.$$

由此可知方程中有两个独立参数，所以线场为二维图形.

(3) 线把——空间内经过一定点 S 的所有直线的集合称为

线把或线丛，此定点 S 称为线把的中心。线把中的每条直线是它的元素，由于过定点 $S(x_0, y_0, z_0)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

其中 l, m 和 n 为该直线的方向数，它们不全为零，如果 $n\neq0$，则线把方程可改写为

$$\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}=\frac{z-z_0}{1},$$

它决定于两个独立参数 l_1 和 m_1，所以线把为二维图形。

定义 1.1.4 以点为几何元素所构成的几何学的维数称为空间的维数。

例如直线为一维空间，平面为二维空间。由以上定义可知空间的维数与处在此空间的几何学的维数是不一定相同的，如平面是二维空间，但平面上的圆几何学却是三维的。

例 5 以三维空间内的直线为几何元素的几何学是几维的？

解 三维空间内直线的一般式方程为

$$l:\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

将它化成射影式

$$\begin{cases} y=ax+b \\ z=cx+d, \end{cases} \tag{A}$$

直线 l 与方程组(A)可建立一一对应[注]。（若 l 垂直于 xOy 平面，则直线方程采用

$$\begin{cases} x=az+b \\ y=cz+d \end{cases} \text{的形式.)}$$

[注] 表示 l 的一般式直线方程不是唯一的，可用过 l 的任意两个平面来表示，所以直线的一般式方程不能与直线建立一一对应。

由此可知直线 l 决定于独立参数 a, b, c, d, 所以三维空间中的直线几何学是四维的.

例 6 三维空间内过一点的所有平面的集合是属于几维几何学的?

解 过一点 (x_0, y_0, z_0) 的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

其中 A, B, C 不全为零, 若 $A\neq 0$ 并以 A 遍除上式可知方程中只含两个独立参数, 所以过一点的平面属于二维几何学.

维数为 n 的无限集合含有无限多个元素, 记为 ∞^n. 例如, 维数为 1, 2, … 的集合都是无限集合, 分别记为 ∞^1 和 ∞^2. 因而, 我们有理由说, 有限集合的维数为零.

例 7 在例 1 中 (A) 式的基础上, 若 (1) (A) 式表示抛物线; (2) 抛物线的主轴平行于 y 轴; (3) 焦点在 y 轴上; (4) 顶点在原点; (5) 经过点 (1, 1). (这里的条件是逐个加强的.) 问这些集合各是几维的?

解 (1) 若 (A) 式表示抛物线, 则二次项的系数满足 $ab-h^2=0$. 增加了参数间的一个关系式, 相当于 (A) 式中减少一个独立参数, 所以抛物线为四维的.

(2) 若 (A) 式表示主轴平行于 y 轴的抛物线, 因其方程可写为

$$y=a_0x^2+b_0x+c, \tag{B}$$

此式含有三个独立参数, 所以主轴平行于 y 轴的抛物线是三维的.

(3) 若 (B) 式表示焦点在 y 轴上的抛物线, 因其方程可写为

$$y=a_0x^2+c_0, \tag{C}$$

此式含有两个独立参数, 所以这种抛物线是二维的.

(4) 若(C)式表示顶点在原点的抛物线,则其方程为

$$y=a_0x^2, \tag{D}$$

此式仅含一个独立参数,所以这种抛物线是一维的.

(5) 若(D)式表示过点(1, 1)的抛物线,则方程可写为

$$y=x^2,$$

因为这样的抛物线只有一条,所以为零维的.

例 8 说明平面内下列圆集合的维数:(1)有定圆心;(2)有定半径;(3)过定点;(4)与定直线相切;(5)与定直线切于定点;(6)过定点与定直线相切.

解 (1) 有定圆心的圆显然只决定于它的半径 r, 所以为一维的.

(2) 有定半径的圆显然只决定于它的圆心(a, b), 所以为二维的.

(3) 设圆方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, 过定点(x_0, y_0)的圆满足$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$,圆是三维的,现参数 a, b, r 之间有如上的一个关系式,所以过定点的圆是二维的.

(4) 设定直线方程为 $Ax+By+C=0$, 若上述的圆与该直线相切,则可得参数 a, b, r 之间的关系式

$$\left|\frac{Aa+Bb+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=r,$$

所以与定直线相切的圆是二维的.

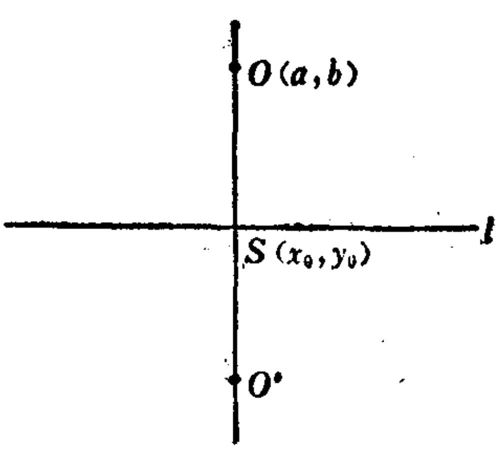

图 1.3

(5) 与定直线 l 切于定点 S 的圆心只能在图 1.3 的直线 OO' 上选取,并且随着圆心 O 的确定,半径也相应地确定了, 所以与定直线切于定点的圆是一维的.或者由圆过定点 $S(x_0, y_0)$即

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$$

和圆心在过定点且垂直于定直线的直线上即

$$b-y_0=\frac{B}{A}(a-x_0),$$

这样得到的参数间的两个关系式,导致相同的结论.

(6) 过定点与定直线相切，这样，圆参数之间有两个关系式,所以是一维的.

关于"维"数的精确意义,是属于拓扑学范围内的事,不在这里详细讨论了.

习　题

1．说明空间内的二次曲面的维数.

2．以平面上的椭圆为几何元素的几何学是几维的?(1)椭圆的中心在原点;(2)椭圆以 x 轴和 y 轴为对称轴;(3)椭圆以 x 轴和 y 轴为对称轴且经过点(1, 1). 以上三种椭圆的集合各是几维的?

3．以对称面为坐标面的椭球面的集合是几维的?

4．以对称面为坐标面的单叶双曲面的集合是几维的?

5．xOy 平面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a, b 为参数)绕 x 轴旋转，所得旋转椭球面的集合是几维的?

6．三维空间内过定点的所有直线的集合是几维的?

§2 点 变 换

定义 1.2.1 设 m 与 m' 是两个集合，如果有一个法则 Φ，通过它对于集合 m 中的任何元素 M，得到 m' 中的一个唯一的元素 M'，则 Φ 称为 m 到 m' 里的对应，记作 Φ: $M\rightarrow M'$，或 $M'=\Phi(M)$.

这时 M' 称为 M 在对应 Φ 之下的象. 反之，M 称为 M' 在对应 Φ 之下的原象.