数学小丛书
智慧之花
（2）

邮票·自行车·果园·雨中行

丁石孙 主编

北京大学出版社

数学小丛书——智慧之花

（2）

邮票·自行车·果园·雨中行

丁石孙　主编

北京大学出版社

内 容 提 要

在圆形果园中均匀地种植果树，果树的树干要长到多粗才能完全遮住从果园中心出发的视线？脚蹬曲柄处于铅直位置的自行车，当把底部的脚蹬轻轻地向后推动时自行车将向哪个方向运动？在雨中应以怎样的速度行走才能最少地被淋？不同面值的邮票有 k 种，一封信上最多贴 h 张邮票，为了能贴出1,2,…，n 各种邮资应如何选择这 k 种不同的面值？这些有趣的问题就是本书的部分内容。在“初等数学问题的魅力”及“因子分解与素数判定”两文中可以看到初等的数学问题如何推动数学的发展。书中还介绍了罗华章在参加第三十届奥赛时的解答，以及参加第三十一届奥赛的我国选手的各种与众不同的、富有创造性的解法。

本书可作为中学数学教师、高中学生和数学系低年级大学生的课外读物，也可供数学爱好者阅读。

《数学小丛书——智慧之花》编委会

写在前面的话

在一个人所受的基础教育中，数学一直是占着一个特殊地位的，它占用的时间可以说是最多的．也许因为这已是历史上长期以来形成的事实，所以很少有人去作说明，即使有的学生并不喜欢数学，也鼓不起勇气去问个为什么．

数学由于其特殊的形式，给人的印象常常是：一批口诀，一堆公式以及一串定理，但它们在解决生活及其它学科的问题时又是很有用的，于是多数人就硬着头皮按老师教的学下去．这样的理解至多对了一半，因为数学还有另一个方面的重要作用，这就是通过对数学知识的介绍，对数学问题的解决，教会人们一种重要的分析问题，解决问题的思想方法．简单地讲，数学要教会人如何进行逻辑推理，如何进行正确的抽象思维，如何在纷繁的事物中抓住主要的联系，并如何使用明确的概念，等等．

要正确发挥数学课程的教育功能，除去需要教师与学生的积极努力以外，也还需要找到适当的辅助材料和恰当的方法．我们选编这套《数学小丛书——智慧之花》就是为了从这个方面为数学老师（主要是中学的老师）和大学生提供一点帮助，有一部分也可以用作中学生的课外读物．

我们并不认为目前的数学教学大纲的内容太少，太浅，因而要增加或加深教学内容．我们更不想给学生增加习题量以应付考试．恰恰相反，我们认为再向这个方向发展将会造

成极大的危害．通过我们选择的这些小文章，我们希望能帮助读者对数学有更全面的了解，使大家发现数学不只是“定义、定理、公式、证明”的刻板叙述，而是生动活泼、引人入胜的思维训练．在这里，读者可以看到如何对各种各样的问题进行精细的分析，又如何逐步把复杂的问题理出头绪，最后给出清晰的答案．总之，我们希望通过千姿百态的分析与讨论帮助读者了解什么是大家应该从数学学习中学到的思想方法．

我们的目标是这样，但能否达到还有待于实践的检验．读者读过这些书之后的印象与收获将作出评判．我们希望大家多提批评意见，帮助我们不断改进我们的工作．

丁石孙

一九八九年二月

出版说明

现代数学，这个最令人惊叹的智力创造，已经使人类心灵的眼光越过无限的时间，使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间。

——N.M.Butler

数学方法渗透进并支配着一切自然科学的“理论”分支。在现代经验科学中，它已越来越成为衡量成就的主要标准。

——J.von Neumann

参与开发一般智力——不是为了今后某一职业的特定需要，应看成是数学教育的基本目标。

——F.Reidt

别把数学想象得那么困难和艰涩，并认为它排斥常识，数学仅仅是常识的一种微妙的形式。

——L.Kelvin

这些著名学者的话表达了我们出版《数学小丛书——智慧之花》的想法和努力的目标。

本丛书的主要对象是：中学数学教师、数学各专业的低年级大学生、部分高中学生以及数学爱好者。所选内容力求生动、有趣，在开始阶段以编写为主，一年2—3册。

我们希望本丛书能为活跃与推动中学与大学低年级的数学教学、提高中学教师和大学生的数学素质、更好地沟通中

学数学与大学数学以及普及数学知识，做一点有益的工作。

我们水平有限，希望大家多提意见，为了让我们的小花开放得绚丽多姿而共同努力！

《数学小丛书——智慧之花》编委会

一九八九年二月

目　录

PÓLYA 果园问题①②

T.T.Allen

1. 引言

在一个圆形的果园中，均匀地种植果树，问果树的树干长到多粗③，才能完全遮住果园中心的视线(Pólya和Szegö[6])?

设所有这些果树都是半径为r的圆柱，这样，问题就简化为一个平面上关于圆的问题。设圆的中心（即果树的种植位置）的坐标为(x,y)，x,y是整数，满足$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant S$，$S$是果园的半径。射线是由原点向外的径直视线，第一个阻挡射线的圆沿这条射线是可见的。问题是要确定果树的半径ρ,使得当$r\geqslant\rho$时,在原点(即果园的中心)仅能看到果园中的果树；当$r<\rho$时，至少有一条射线可穿过果园。显然,ρ是S的函数。

Pólya的解法是基于A.Speiser的方法（参见上面所引的[6]，原始的解可见Pólya[5]④.R.Honsbeigen[4]的解法是基于Minkowski的凸体定理⑤。但他们都未能求出ρ的

① Pólya's Orchard problem, *Amer. Math. Monthly*, 93(1986), 98—104.

② Pólya的解答在文后。

③ 假定所有树的树干在生长过程中有同样的粗细。

④ 在本文最后，我们也译出了文献[6]中的解法。——译者注

⑤ 中译文见《数学译林》，1981年，第1期，79—84.——译者注

确切值。他们只证明了：如果 S 是一整数，则

$$\frac{1}{\sqrt{S^2+1}} \leqslant \rho < \frac{1}{S}. \tag{1}$$

但是，ρ 的 确切值是多少？当 S 不是整数时，ρ 的 值又如何？

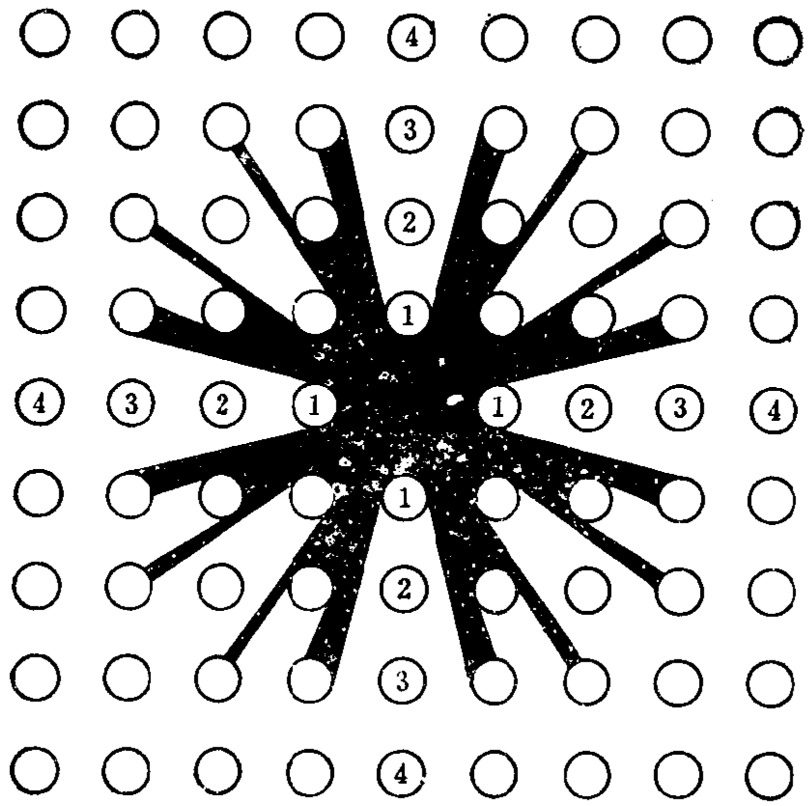

图 1　$r=0.25$ 时射线按其在圆上的终点的划分图

下面计算格点 (x', y') 到射线（倾角 为 θ）的矩离 r'。注意到，$r' = h' \cos\theta$，$h' = y' - x' \operatorname{tg}\theta$，所以

$$r' = y' \cos\theta - x' \sin\theta.$$

如果射线通过格点 (x, y)，则

$$\sin\theta = y/(x^2+y^2)^{1/2}, \qquad \cos\theta = x/(x^2+y^2)^{1/2},$$

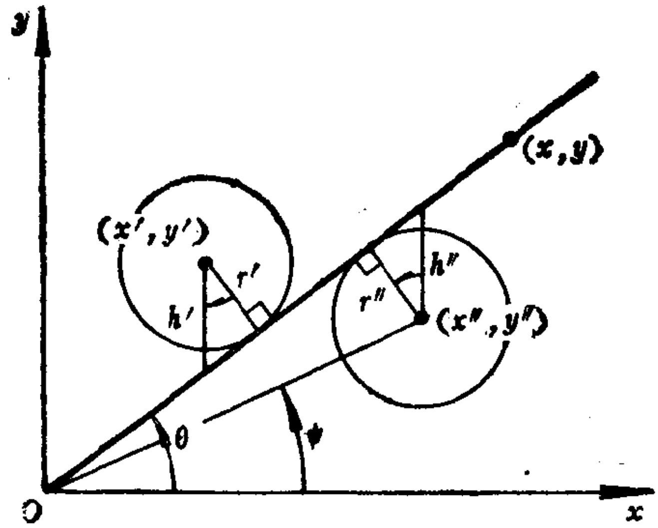

图2　格点 (x',y') 到倾角为 θ 的射线的距离

由此推出等式 (2a) 成立。同样可证，等式 (2b) 成立。对给定的 r'' 和 ψ 计算 θ（这里 $\psi=\operatorname{arc\,tg}(y''/x'')$），我们有

$$\theta-\psi=\arcsin(r''/\sqrt{x''^2+y''^2}).$$

由此直接可得不等式 (7d)。同样可推出不等式 (7a), (7b), (7c)。

在本文中我们将用初等的方法证明：$\rho=1/\sqrt{\lambda}$，λ 是第一个大于 S^2 且可以写成两个互素整数平方和的整数。如果 S 是整数，则(1) 式左边的等号成立。我们还将提出两个与之有关的问题，以展示这个美丽的果园的其它性状。

2. 预备知识

考察图 1，我们有：

(1) 离原点最近的八个圆是对称的，因此，只要考虑第一象限内 $x\geqslant y\geqslant 0$，$(x,y)\neq(0,0)$ 的部分即可；

(2) 只有圆心是以互素的数为坐标的圆是可见的。例

如，圆心为（2,2）的圆完全被圆心为（1,1）的圆遮掩，这与圆的半径 r 无关；

（3）在 $r=0$ 的极限情况下（这时所有的圆退化为点），只有由互素整数对组成的坐标点是可见的，它们是沿射线最先看到的点；

（4）在另一种极限情况 $r=\frac{1}{2}$ 时，这些圆相切，所以只有圆心在（1,0）和（1,1）（及它们在四个象限的对称点）的圆可见。

考虑通过格点 (x,y) 的射线和射线两侧的格点 (x',y')，(x'',y'')，它们分别满足：

$$\frac{y'}{x'}>\frac{y}{x},\qquad \frac{y''}{x''}<\frac{y}{x}.$$

从 (x',y')，(x'',y'') 到射线的垂直距离分别为（参见图2）：

$$r'=(y'x-x'y)/(x^2+y^2)^{1/2},\tag{2a}$$

$$r''=(x''y-y''x)/(x^2+y^2)^{1/2}.\tag{2b}$$

式（2a）和（2b）中的分子可分别看作是点 (x',y') 和点 (x'',y'') 的函数，当 x,y 互素时，它们都能取所有的正整数值（为什么？）。因此，最接近射线的点分别由

$$y'x-x'y=1,\tag{3a}$$

$$x''y-y''x=1\tag{3b}$$

给出，相应的极小距离是：

$$r'=r''=(x^2+y^2)^{-1/2}.\tag{4}$$

式（3a）和（3b）都是不定方程，若 $(\bar{x}',\bar{y}')$ 和 $(\bar{x}'',\bar{y}'')$ 分别是它们的特解，则它们的通解分别为 $(kx+\bar{x}',ky+\bar{y}')$

和 $(kx+\bar{x}'', ky+\bar{y}'')$，这里 k 为任意整数。这些解分布在与射线等距离的两条平行线上，距离就是由(4)式给出的极小距离。为了讨论可见性，我们需要这样的解，它所确定的点距原点较 (x,y) 近，且与 (x,y) 在同一象限中，即

$$0\leqslant x'\leqslant x, \tag{5a}$$

$$0\leqslant y''<y。 \tag{5b}$$

在(5a)给出的区间内恰好存在一组坐标对 (x',y') 满足(3a)，这是因为在(3a)的通解 $(kx+\bar{x}', ky+\bar{y}')$ 中恰有一个解，使得 $kx+\bar{x}'$ 落在每一个长为 x 的半开区间中。同样，必有满足(3b)的唯一坐标对 (x'',y'')，使得 y'' 在(5b)所给的区间中。

上述论证表明：圆心由(3)，(5)确定，半径由(4)确定的两个圆与通过点 (x,y) 的射线相切。同样，射线在与以 (x,y) 为圆心的圆上一点相碰前，先碰上了上面两个圆与射线的切点。因为由 Pythagoras 定理知，这两个切点沿射线到原点的距离分别为

$$(x''^2+y''^2-1/(x^2+y^2))^{1/2}$$

和

$$(x'^2+y'^2-1/(x^2+y^2))^{1/2}①.$$

参看图 1 可知，这种距离的最小值出现在点 $(x,y)=(2,1)$，$(x'',y'')=(1,0)$，所以，这些距离总是不小于 $[1^2+0^2-1/(2^2+1^2)]^{1/2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$。而由式(4)知，这些相切圆的半径一定不大于 $(2^2+1^2)^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$。

---

① 容易算出，从原点到射线与以 (x,y) 为心的圆的第一个交点之间的距离为 $(x^2+y^2)^{1/2}-(x^2+y^2)^{-1/2}$，显见，它比这两个数都大。——校注

最后，我们得到了这样的结论：对互素的整数对 x, y，当 $r < (x^2+y^2)^{-1/2}$ 时，以点 (x, y) 为心半径为 r 的圆至少沿一条射线是可见的；而当 $r \geqslant (x^2+y^2)^{-1/2}$ 时，这个圆则被完全遮掩。

3. 果园问题

首先，假定这个果园是处处可伸展到无穷远的。我们围绕在原点的观察哨扎一个半径为 S 的篱笆，并把这个篱笆看作是果园里的一个圆。问当果树的半径 $(r=\rho)$ 是多少时，正好遮掩住篱笆外的树？

由(4)知，一棵树要被遮掩住，只要半径 r 等于从原点到这棵果树圆心距离的倒数。因此，在果树生长过程中，篱笆外最后被遮住的一棵树① 是长得最靠近篱笆的一棵，因为所有离原点更远的树已在树干半径 r 较小时被遮住了。故从原点到篱笆外最近的一棵树的圆心的距离的倒数就是所要求的 ρ。证毕。

上述论证并不依赖于篱笆外是否真的长有树，因为决定可见性的仅是篱笆内的树。

如果 S 是一个整数，那么 S^2+1 是第一个大于 S^2 的整数。在点 $(S, 1)$ 处总有一棵树，它到原点的距离是 $(S^2+1)^{1/2}$。能看到篱笆外面的临界半径 $r=\rho=(S^2+1)^{-1/2}$。当然，还可能有别的树和原点有相同的临界距离 $(S^2+1)^{1/2}$。例如，当 $S=50$ 时，在点 $(50,1)$，$(49,10)$ 及这两点在四个象限的其它 14 个对称点处的树恰好在半径 $r=\rho=\frac{1}{\sqrt{2501}}$ 时同时消失于视

① 实际上是一些离原点等距的树。——译者注

野。

要指出的是，这里得到的表示式 $\rho=(S^2+1)^{-1/2}$ 与(1)式的左边的等式相同，故当 S 是整数时，(1)式中左边的等号成立。

如果 S 不一定是整数，那么这个问题的一个更有启发性的表述是："ρ 和 S 将是怎样一个函数关系？"同样，设 x,y 是任意互素整数，$x^2+y^2=\lambda$，根据事实本身来看，λ 是一种特殊的整数——这种整数至少可以以一种方式表示成两个互素整数的平方和。假定 λ_i 和 λ_{i+1} 是两个相邻的这种整数，

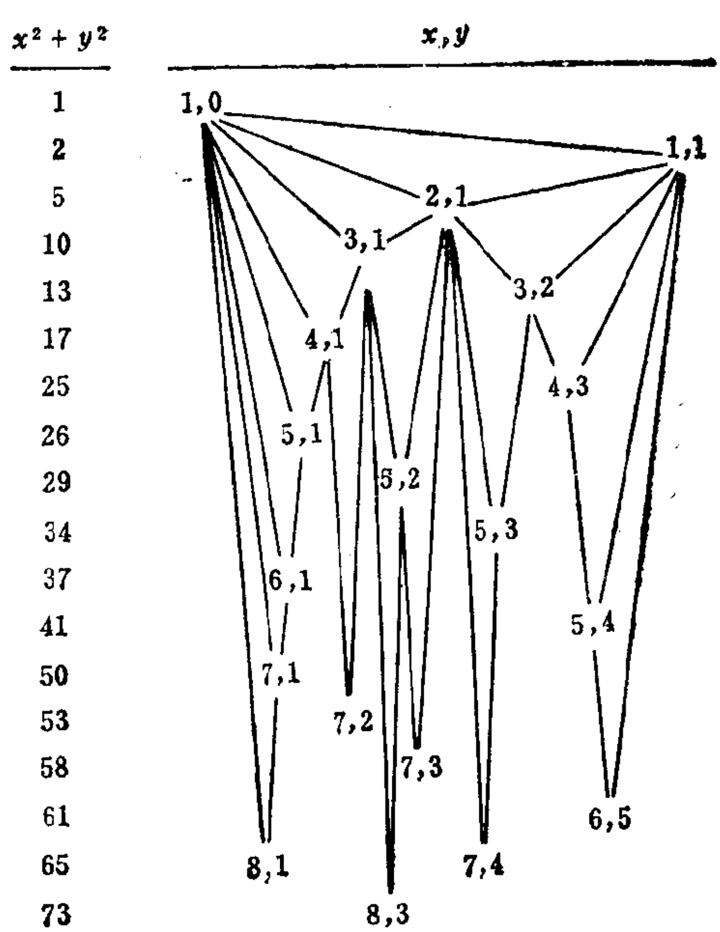

图 3　随着半径的增长树被遮掩的情况