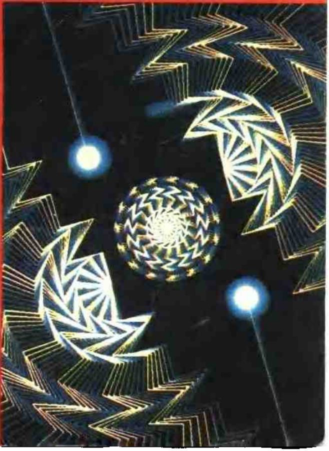
经济应用数学基础

概率论与数理统计

葛炎午 娄雪舸
程耒 车亚军 编



科学出版社

经济应用数学基础

概率论与数理统计

葛炎午　娄雪舸
程　未　车亚军　编

科学出版社
1994

(京)新登字092号

内 容 简 介

本书是成人高等学校"经济应用数学基础"课程的教材之一.

本书主要介绍概率论的基本知识和数理统计的基本方法.本书在保证数学学科的系统性和严密性的前提下,内容选取适度、重点突出,密切联系经济实际;论述深入浅出,通俗易懂.每章末备有习题,书后附习题答案,有助于读者进一步掌握书中的概念和方法.

本书可作为成人高等学校财经类专业的教学用书,也可供财经专业高等教育自学考试的辅导教师及学生参考.

经济应用数学基础

概率论与数理统计

葛炎午　娄雪屑
程　未　李亚军　编

责任编辑　吕　虹

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1994年2月第一版　开本:787×1092　1/32

1994年2月第一次印刷　印张:6

印数:1—5 000　字数:135 000

ISBN 7-03-003882-7/O·682

定价:8.20元

出 版 说 明

为了适应成人高等学校财经类各专业数学教学之需要，由北京市第一轻工业总公司职工大学、北京市西城区职工大学、北京市电子仪表局职工大学、北京市化学工业局职工大学、北京市汽车工业总公司职工大学、北京市海淀区职工大学等六所高校的部分教师在总结多年教学经验的基础上，编写了这套《经济应用数学基础》.

这套教材包括《微积分》、《线性代数与线性规划》、《概率论与数理统计》三分册. 编写过程中，在保证数学学科的系统性和严密性的前提下，充分考虑到成人学员的特点，力求选材深浅适度，结构安排合理，密切联系经济实际；论述简明扼要，通俗易懂；每章后附有适量的习题，并在书后给出习题答案. 这套教材可供职工大学、管理干部学院、财经类专科院校选作试用教材或教学参考书，也可作为有关专业的干部专修科或短训班的教学用书，对参加财经类各专业高等教育自学考试的学员也有一定的参考价值.

这套教材是由何嗣玫、金桂堂、葛炎午主持编写的，其中《微积分》由何嗣玫整理，《线性代数与线性规划》由金桂堂整理，《概率论与数理统计》由葛炎午整理.

北京大学经济系范培华副教授，中国人民大学经济信息系龚德恩副教授、胡显佑副教授分别承担了这三册书的审稿工作，对于他们的热情帮助与大力支持，谨表衷心的感谢.

由于我们水平有限，错误和不足之处在所难免，恳请读者批评指正.

《经济应用数学基础》编写组

1991 年 12 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件

一、随机现象、随机试验和随机事件

无论在自然界还是人类社会，发生在我们周围的种种现象，按其发生的可能性来说，可以分成三类．第一类是必然现象，指在一定的条件下，必然发生的现象．比如：纯净的水在一个标准大气压下，加热到100℃时沸腾．第二类是不可能现象，指在一定条件下，肯定不会发生的现象．比如：从含有1件次品的10件产品中抽取2件样品，结果2件样品均为次品．必然现象和不可能现象事先可以确定其结果，统称为确定性现象．第三类是随机现象，指在一定条件下，可能发生，也可能不发生的现象．比如抛掷一枚硬币，落地后可能正面朝上，也可能反面朝上，事先无法预言．仅就一次观察而言，随机现象的结果是不确定的，所以称之为不确定现象．但实践证明，进行大量的、重复的试验，随机现象的发生都会呈现出某种规律性．仅就上面所说的抛掷硬币而言，英国数学家皮尔逊（Pearson）曾经作过24000次重复试验，结果正面向上为12012次，反面向上为11988次，比率分别为0.5005和0.4995，都接近于0.5．这种性质就称为随机现象的统计规律性．可见，随机现象具有二重性：表面上的偶然性与内部蕴涵着的必然性．偶然性就是它的随机性，而必然性就是它在大量重复试验中所表现出来的统计规律性．概率

论与数理统计就是从数量的角度研究随机现象统计规律性的学科.

研究随机现象，需要对“一定的条件具备以后，现象是否发生”进行观察和实验. 这个观察和实验的过程称为试验. 研究随机现象的试验称为**随机试验**，简称**试验**. 随机试验具有以下特点：

1. 试验可以在相同的条件下重复进行；

2. 每次试验的可能结果不止一个，而且所有可能的结果都是可以确定和罗列出来的；

3. 每次试验的结果在事先都是不能确定的.

我们将随机试验的结果称为**随机事件**，并用大写的英文字母 A，B，C，…来表示.

二、样本空间与样本点

我们将随机试验的全部可能结果构成的集合称为**样本空间**，用希腊字母 Ω 来表示，样本空间 Ω 的每一个元素都称为**样本点**，用希腊字母 ω_i ($i=1, 2, 3, \cdots$) 来表示. 从下面的实例中可以看到，样本空间可以是有限集合，也可以是无限集合.

例 1 掷一枚骰子，如果以 ω_i 表示“掷得的点数为 i”，则样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$，此处，也可以简单地写成 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，以 i 来表示 ω_i.

例 2 统计一台织布机在一小时内出现的疵点数. 如果以 ω_i 表示“出现 i 个疵点”这一事件，则 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$，或简单地写作 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

例 3 观察一台机器在一小时内的工作情况. 设 t 表示机器出故障的时间（单位：分钟），则 $\Omega=\{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 60\}$.

下面研究随机事件与样本空间的关系. 首先考虑掷一枚骰子的问题，它的样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$，$\omega_i$ 表示“掷出的点数为 i”. 如果以 A 表示事件“出现的点数为 2”，以 B 表示事件“出现的点数为偶数”，则事件 A 相当于样本点 ω_2，而事件 B 则相当于 Ω 的子集合 $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. 容易看出，样本空间的特定的子集就构成了某个特定的随机事件，其中，我们特别地将单个的样本点构成的单元素集合所对应的事件称为**基本事件**. 从集合的观点看，一般的随机事件都是由基本事件构成的. 比如：上述的事件 B 就是由“2 点”、“4 点”和“6 点”三个基本事件构成的.

如果随机事件 C 包含有基本事件 ω_i，即 $\omega_i\in C$，那么，当基本事件 ω_i 发生时，事件 C 就发生. 例如：在掷骰子时，无论“2 点”、“4 点”和“6 点”中哪一个基本事件（或样本点）发生，随机事件 B（即“出现偶数点”）都会发生.

此外，不含有任何样本点的事件永远不会发生，称为**不可能事件**，记作$\varnothing$，而包含了样本空间 Ω 的全部样本点的事件在试验中必然发生，称为**必然事件**，记作 Ω. 当然，不可能事件和必然事件也可以理解为不可能现象和必然现象的结果. 比如，掷一枚骰子“得到 7 点”是不可能事件，而“点数不超过 6”是必然事件.

运用集合的理论和方法，有助于我们对随机事件的研究. 所以，在研究随机试验时，确定样本空间是十分重要的.

例 4 一批产品中有 4 件次品，现每次从中抽取 1 件产品，无放回的抽取，研究取到正品之前取到的次品数，写出这一随机事件的样本空间.

解 设以 ω_i 表示“取到正品之前取到的次品数”，由于最少时第一次即可取到正品，最多时第五次必可取得正品，所

以 $i=0, 1, 2, 3, 4$，随机试验的样本空间 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ 或 $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

例 5 袋中装有红、黄、白球各一个，从中依次不放回地取出两个球，写出这一试验的样本空间.

解 设以数字 1，2，3 分别表示“红”、“黄”、“白”各球，以 (1，2) 表示“依次取得红球和黄球”，则样本空间 $\Omega=\{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. 实际上，样本点的数目等于 $P_3^2=6$.

三、事件的关系与运算

研究随机试验，往往涉及到两个以上的随机事件，掌握事件间的相互关系，便于通过较为简单的事件去研究较为复杂事件的规律，所以必须讨论事件间的相互关系和运算. 考虑到事件集合的内涵，注意应用集合论的理论和方法以及使用韦恩（Wayne）图作为直观说明，将给我们的讨论带来很大方便.

1. 事件的包含.

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含在事件 B 中. 记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

比如，在前面提到的掷一枚骰子的问题中，如果事件 A 表示“出现的点数为 2”，事件 B 表示“出现的点数为偶数”，事件 A 就包含于事件 B 之中，且 $A=\{2\}$，$B=\{2, 4, 6\}$. 由此可以看出，属于事件 A 的基本事件都属于事件 B，如图 1.1 所示.

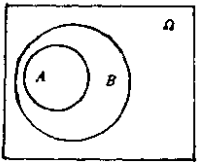


图 1.1

对于包含关系，显然有：

(1)　对任意事件 A，有$\varnothing\subset A\subset\Omega$；

(2)　若 $A\subset B$，且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

2. 相等关系.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等或等价，记作 $A=B$.

从事件作为样本空间的子集的角度来分析，事件 A 与事件 B 相等意味着它们所包含的基本事件是完全相同的. 由此，不难推出相等关系具有传递性，即若 $A=B$ 且 $B=C$，则有 $A=C$.

3. 和事件.

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为 A 与 B 的和事件（或并事件），记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

例如上述掷骰子的问题，如果事件 A 表示"掷出的点数不多于 3 点"，即 $A=\{1,2,3\}$；事件 B 表示"掷出的点数为偶数"，即 $B=\{2,4,6\}$，则 $A+B=\{1,2,3,4,6\}$，可见 A 与 B 的和事件所包含的基本事件正好是它们各自对应的基本事件集合的并集，如图 1.2 所示.

由并集的关系易知，对于任一事件 A，有

(1)　$A+A=A$；

(2)　$\Omega+A=\Omega$；

(3)　$\varnothing+A=A$.

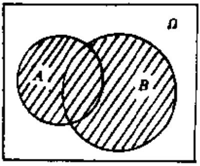


图 1.2

和事件的概念可以推广到有限多个事件和无限可列个事件的情形，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和是由至少属于其中一个事件的基本事件的全体构成的事件，记作

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

或 $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

当 n 趋于无穷大时，则有无限可列个事件 A_1，A_2，…的和事件，记作

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + \cdots$$

或 $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

4. 积事件（交事件）.

事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件称为 A 与 B 的**积事件**（或**交事件**），记作 AB 或 $A \cap B$.

例如上述掷骰子的问题，如果事件 A 表示“掷出的点数不多于 3 点”，即 $A=\{1, 2, 3\}$；事件 B 表示“掷出的点数为偶数”，即 $B=\{2, 4, 6\}$. 则 $AB=\{2\}$. 易知，A 与 B 的积事件是由同时属于 A 和 B 的全体基本事件构成的事件，如图 1.3 所示.

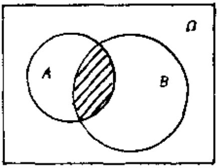


图 1.3

积事件的概念也可以推广到有限多个事件和无限可列个事件的情形. n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件是由同时属于其中每一个事件的全体基本事件构成的事件，记作

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$$

或

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

当 n 趋于无穷大时，则有无限可列个事件的积事件，记作

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 \cdots$$

或 $$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

5. 差事件.

事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$.

显然，事件 A 与 B 的差是由属于 A 但不属于 B 的基本事件的全体构成的事件，如图 1.4 所示.

例如在上述掷骰子的问题中，A 与 B 的差事件 $A-B=\{1, 3\}$；而 B 与 A 的差事件 $B-A=\{4, 6\}$.

6. 互不相容的事件.

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容的事件（或互斥事件）；反之，则称 A 与 B 是相容的事件.

易知，如果 A 与 B 是互不相容的事件，它们必然不能有共同的基本事件，如图 1.5 所示.

例如在掷骰子时，如果事件 B 表示"掷得的点数为偶数"，而事件 C 表示"掷出的点数为 3"，事件 D 表示"掷得的点数为 5"，那么事件 B 与 C，B 与 D，C 与 D 都是互不相容的事件.

推广到 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 的情形，如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都是互不相容的，即 $A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j, i, j$

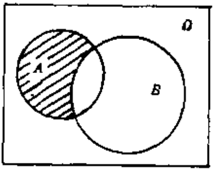


图 1.4

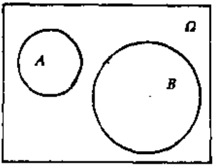


图 1.5

$=1,2,\cdots,n$)，则称事件 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的.

7. 对立事件.

如果事件 A 与 B 中仅有且必有一个事件发生，即 $A+B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 为对立事件（或互逆事件），A 的对立事件记作 $\overline{A}$.

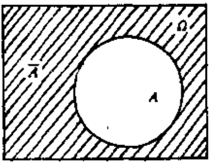


图 1.6

易知 A 的对立事件 $\overline{A}$ 是样本空间 Ω 中不属于事件 A 的基本事件的全体构成的事件，如图 1.6 所示.

例如在上述掷骰子问题中，如果事件 B 表示“掷得的点数不少于 3 点”，即 $B=\{3,4,5,6\}$，则 $\overline{B}=\{1,2\}$.

对立事件是互不相容事件的特殊情形，而且不难推知 $\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$ 和 $\overline{\overline{A}}=A$.

下面将事件与集合的相关概念对照，如表 1.1 所示.

表 1.1

记号	概　率　论	集　合　论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
$\{\omega\}$	基本事件（ω 为样本点）	单元素集
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的补集
$A\subset B$	事件 A 含于事件 B	A 为 B 的子集
$A=B$	A 与 B 是相等的事件	A 与 B 是相等的集合
$A+B$	A 与 B 的和事件	A 与 B 的并集
AB	A 与 B 的积事件	A 与 B 的交集
$A-B$	A 与 B 的差事件	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	A 与 B 是互不相容的事件	A 与 B 没有共同的元素

作为样本点的集合，随机事件的运算遵从集合的全部运算律，现罗列如表 1.2 所示.

表 1.2

运算律 \ 运算	求和	求积
交换律	$A+B=B+A$	$AB=BA$
结合律	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$
分配律	$A(B+C)=AB+AC$	$A+BC=(A+B)(A+C)$
蕴涵律	$A+B\supset A$，$A+B\supset B$	$AB\subset A$，$AB\subset B$
重叠律	$A+A=A$	$AA=A$
吸收律	$A+\Omega=\Omega$，$A+\varnothing=A$	$A\Omega=A$，$A\varnothing=\varnothing$
对立律	$A+\overline{A}=\Omega$	$A\overline{A}=\varnothing$
摩根律	$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

熟悉事件的运算律对于简化较为复杂的事件是有益的.

例 6 甲、乙、丙三个射手击中目标的事件分别记作 A，B，C，现将以下事件用 A，B，C 表示出来.

(1) 甲击中目标而乙和丙未击中；

(2) 甲未击中目标而乙和丙都击中了；

(3) 三个人中有一个人击中目标；

(4) 三个人中有两个人击中目标；

(5) 三个人中至少有一个人击中目标；

(6) 三个人都击中了目标；

(7) 三个人都未击中目标；

(8) 三个人中至多两人击中目标.

解 (1) $A\overline{B}\overline{C}$； (2) $\overline{A}BC$；

(3) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

(4) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$；

(5) $A+B+C$； (6) ABC；

(7) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A+B+C}$；

(8)　$\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或$\overline{ABC}$.

§1.2　随机事件的概率

一、概率的统计定义

上面谈到，在大量的重复试验中，随机事件的发生呈现出某种统计规律性. 这一事实已为历史上一些数学家所做的抛掷硬币的试验所证实. 为了研究和描述这种规律性，我们先引入事件频率的定义.

定义 1.1　如果事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次，则称 m 为 n 次试验中事件 A 发生的频数，称比值$\frac{m}{n}$为 n 次试验中事件 A 发生的频率.

以抛掷硬币试验为例，来看"正面向上"这一事件发生的频数与频率，如表 1.3 所示.

表 1.3

试验者	投掷次数 n	"正面向上"次数 m	"正面向上"频率$\frac{m}{n}$
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

容易看出，随着抛掷次数的增加，"正面向上"的频率$\frac{m}{n}$围绕着一个确定的常数 0.5 作幅度越来越小的摆动，逐渐稳定于 0.5 附近，而且随着试验重复次数的增加，这种情况越加明显. 频率的这种稳定性揭示出一个随机事件发生的可能