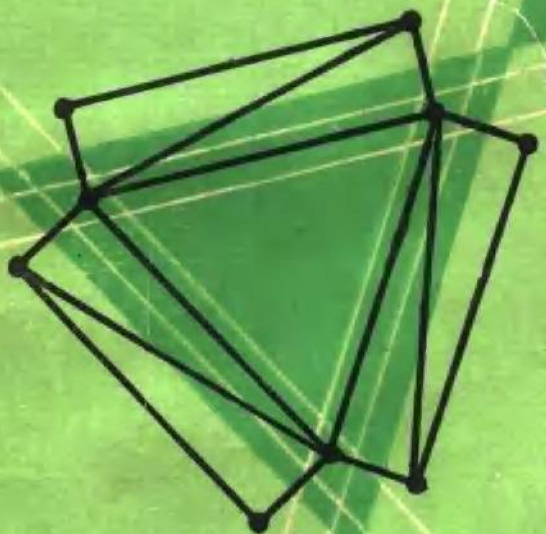
离散数学初步

王肇荣　李全灿　编著



机械工业出版社

离散数学初步

王肇荣 李全灿 编著

机械工业出版社

离散数学作为计算机科学的基础理论学科已引起教育界及工程技术界的广泛重视，愈来愈多的工程技术人员及大学师生迫切要求学习和掌握这一重要的数学工具。

本书以较少的篇幅，简明通俗地介绍了数理逻辑、集合、关系与函数，代数系统及图论等五个方面的基本内容，例题较为丰富，并配有适量的习题，便于读者自学和复习，凡具有高中数学基础的读者就可掌握本书的基本内容和基本方法，因而这是一本学习离散数学的入门读物。本书既可作为非计算机专业的理工科大学生、研究生的选修课教材或教学参考书，亦可供从事计算机和数学方面工作的科技人员、教师和学生学习、参考。

离散数学初步

王肇荣　李全灿　编著

●

责任编辑：贡克勤
封面设计：田淑文

●

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
北京市通县建新印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

●

开本787×1092 1/32·印张7 3/4·字数173千字
1987年8月北京第一版·1987年8月北京第一次印刷
印数　00,001—10,000·定价：2.00元

●

统一书号：15033·6694H

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，也是计算机科学基础理论的核心课程，它的建立和形成与计算机科学的发展是密切相关的。计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、算法分析、逻辑设计、系统结构、机器证明等课程都是以离散数学有关内容为其基础的。随着现代科学技术的发展,特别是计算机的广泛应用,离散数学已引起国内外教育界及工程技术界的极大重视，一些非计算机科学的专业（如通讯、自控、经济管理等）由于愈来愈多地与计算机发生关系，因而它们已经或正在考虑将离散数学列为专业必修的基础学科或选修课程。

离散数学是以离散量为其研究对像的，在日常生活和科学技术领域中我们常常遇到诸如人、书、计算机、汽车、课程、工厂、机床、教室、桌椅等各式各样的东西，它们都是一些离散量，我们希望从中抽像出来某些基本概念，并进一步探讨它们之间的相互关系。离散数学正是专门研究离散量的结构及相互间关系的一门工具性学科。

离散数学的内容十分丰富，涉及面也较广。可以说，凡是以离散量为其研究对象的数学均属于离散数学。限于学时和篇幅，本教材仅涉及离散数学的一些最基本的内容，如数理逻辑、集合、关系与函数、代数系统及图论等，由于本教材主要是供非计算机专业的研究生、大学生和工程技术人员使用，所以对有关内容的讨论不可能十分深入。我们特别删去了近世代数中一些对工科学生来说感到非常抽象的内容，

而仅选择一些最基本、最实用的内容加以介绍，并在文字叙述上力求通俗易懂、联系实际、便于自学，其目的在于使非计算机专业的研究生、大学生以及有关教师和工程技术人员通过对本书的学习能对离散数学的基础知识有一个比较系统的初步了解，以有助于他们对电子计算机的应用和有关知识的理解，同时掌握一种新的方法，并学会用它去研究、处理工程技术及国民经济各个领域经常出现的离散数学问题。

本书所包含的几部分内容，相互间的关系较为松散，除了第二章、第三章及第四章应循序学习和讲解外，另外两章（第一章及第五章）可相对独立。由于我们在各章的叙述中尽可能多地使用了数理逻辑的符号，因此我们建议学习第一章时应多花些时间，以便能很好地理解和掌握各种形式符号的逻辑含义及使用方法，否则会给后面各章的学习带来一些困难。

学习本书并不需要具备微积分的知识，凡具有高中数学基础的读者通过认真学习和钻研都可掌握它的基本内容和基本方法。通过学习这门课程不仅可以打下学习计算机课程初步的理论基础，而且也有助于培养学生的抽象思维能力，逻辑推理能力以及慎密的概括能力，进一步加强学生的数学修养、开阔数学视野，为深入学习近代数学的有关分支打下一个初步基础。

本书第三、四章由王肇荣编写，第一、二、五章由李全灿编写。本书的初稿曾分别在非计算机专业的研究生及本科生中讲授过。书稿完成后，承蒙西安交通大学游兆永教授及天津师范大学林国副教授在百忙中认真审阅了原稿，并提出了许多宝贵的意见和建议，使作者在修改原稿时得到不少启发和教益，在此，谨向他们表示深切的谢意！在本书的编写

和出版过程中，我院杨致中同志和有关领导曾给予我们很大的支持和帮助，龙安国同志为我们描绘了部分插图，在此一并向他们表示由衷的感谢！

限于我们的学识水平，书中难免会有不妥和错误之处，恳切希望各位专家、同行及广大读者不吝批评指正。

作者

1986年8月于西安

3

符 号 一 览 表

第一章 数理逻辑

T	真；永真式
F	假；永假式
$P \vee Q$	P 与 Q 的析取（或）
$P \wedge Q$	P 与 Q 的合取（与）
$\neg P$	P 的否定（非）
$P \rightarrow Q$	若 P 则 Q（条件命题）
$P \leftrightarrow Q$	P 当且仅当 Q （双条件命题）
$P \Rightarrow Q$	P 永真蕴含 Q（命题间的蕴含关系）
$P \Leftrightarrow Q$	P 与 Q 等价（命题间的等价关系）
P (a)	一元谓词，其中 a 为个体词
$F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$	n元谓词，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为个体词
$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	n元简单命题函数，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为个体变元
$\forall$	全称量词：“对一切”
$\exists$	存在量词：“存在”
US	全称特定化规则
ES	存在特定化规则
UG	全称一般化规则
EG	存在一般化规则

第二章 集合

$a \in A$	a 属于 A
$a \notin A$	a 不属于 A
$A \subseteq B$	B 包含 A；A 为 B 的子集
$A \subset B$	B 真包含 A；A 为 B 的真子集
ϕ	空集
U	全集
$A \cup B$	A 与 B 之并
$A \cap B$	A 与 B 之交

$A-B$	A 与 B 之差
$\bar{A}$	A 的补集
$A\oplus B$	A与B 的对称差（环和）
$\# A$ （$\mid A \mid$）	有限集 A 的基数（A 的元素个数）
2^A	A 的幂集
$[x]$	小于或等于 x 的最大整数
(a, b)	序偶
$A\times B$	集合 A、B 的笛卡尔乘积
A^2	$A\times A$
$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$	有序 n 元组

第三章　关系与函数

xRy	元素 x 和 y 有关系 R
$x\bar{R}y$	元素 x 和 y 没有关系 R
D_S	S 的定义域
V_S	S 的值域
ϕ	空关系
$\tilde{R}$	关系 R 的逆关系
U_A	集合 A 上的普遍关系
I_A	集合 A 上的恒等关系
M_R	关系 R 的关系矩阵
M_R'	M_R 的转置矩阵
$R\circ S$	关系 R 和 S 的复合关系
$M_R\circ M_S$	M_R 与 M_S 的乘积
$[a]_R$	a 所生成的等价类
A/R	集合 A 上关于等价关系 R 的商集
(A, R)	偏序集
$\preccurlyeq$（或$\succcurlyeq$）	偏序关系
LUB A	A 的上确界
GLB A	A 的下确界
$f: A\to B$ $\left(A\xrightarrow{f}B\right)$	f 是由 A 到 B 的一个函数

f^{-1}	f 的逆函数
$g \bigcirc f$	f 和 g 的复合函数
f^2	$f \bigcirc f$
$\ulcorner x \urcorner$	不小于 x 的最小整数
$\Psi_A(x)$	集合 A 的特征函数
$\underset{\sim}{A}$	模糊子集 A
$\Psi_{\underset{\sim}{A}}(x)$	模糊子集 A 的隶属函数
r (R)	R 的自反闭包
s (R)	R 的对称闭包
t (R)	R 的可传递闭包

第四章 代数系统

$+ (\vee)$	逻辑加法；或运算
$\cdot (\wedge)$	逻辑乘法；与运算
$- (\neg)$	逻辑否定；非运算
N	自然数集
I	整数集
I_+	正数数集
Q	有理数集
R	实数集
E	偶数集
E_+	正偶数集
C	复数集
$(U;\bigcirc_1,\bigcirc_2,\cdots,\bigcirc_k)$	代数系统，其中 U 为集合，$\bigcirc_1$，$\bigcirc_2$，…，$\bigcirc_k$为 U 内的 k 种运算
$(U;\bigcirc)\cong(V;*)$	代数系统（U；○）与（V；*）同构
$(U;\bigcirc)\sim(V;*)$	代数系统（U；○）与（V；*）满同态

第五章 图论

$A\times B$	集合 A、B 的有序积（笛卡尔乘积）
A&B	集合 A、B 的无序积
(V、E)	图
V (G)	图 G 的结点集

$E(G)$	图 G 的边集
$\|V(G)\|$	图 G 的阶数
$d_G(v)$	结点 v 的度
$M(G)$	G 的完全关联矩阵
$A(G)$	G 的邻接矩阵
$G_1 \cong G_2$	图 G_1 和 G_2 同构
$k(G)$	图 G 的点连通度
$\lambda(G)$	图 G 的边连通度
T	树
T^*	最优生成树
K_p	p 阶完全图
$G=(V_1, V_2; E)$	G 为二分图
$K_{n,m}$	完全二分图
$\nu(G)$	G 的着色数
(V, E, W)	赋权图
$d(u, v)$	结点 u 与 v 之间的距离
E 图	Euler 图
H 图	Hamilton 图
f_i	平面图 G 中的第 i 个面
$d(f_i)$	面 f_i 的次数
G^*	平面图 G 的对偶图

目　录

第一章 数理逻辑

数理逻辑是研究推理特别是研究数学中推理的科学，它是逻辑学的一种。它与形式逻辑、辩证逻辑的不同主要在于研究方法上。数理逻辑是借助于数学方法来研究推理过程及其规律的。它引进了一套形式符号体系，规定了一些规则，从而把推理在形式上变得好像代数演算一样。因此数理逻辑又叫符号逻辑。它完全脱离自然语言，而用人工符号表达思维形式，在研究推理时完全不涉及前提和结论的内容，而仅研究前提和结论间的形式关系，所以它具有形式化，抽象化的特征。这使得初学者很不习惯，然而这种形式化的方法却是掌握数理逻辑的关键。

数理逻辑和电子计算机的发展有着密切的联系，它为机器证明、自动程序设计、计算机的辅助计算等计算机应用和理论研究提供必要的理论基础。

现代数理逻辑包含的内容很多，这里我们仅介绍命题演算及谓词演算这两个最基本的部分，其中又以前者为主。

§1-1 命题和命题公式

一、命题

凡是可以决定真假的语句都叫做**命题**。

在日常语言中，一般讲只有陈述句才能分辨真假。例如：

A：10是整数；

B：$f(x)=x^2$ 在[a，b]上连续；

C：西安是中国的首都；

D：西安是陕西的省会，而不是中国的首都；

E：今天西安地区有雨；

F：若 $f(x)$ 在[a，b]上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在 a、b 间有一点 c 使得 $f(c)=0$；

G：$101+11=1000$。

上面列举的语句皆可判断其真假，故都是命题。其中语句 G 的真假要根据上下文所指的加法运算是在二进制还是在十进制下进行来判断。若是二进制，则 G 为真；若是十进制，则 G 为假。

命题相当于形式逻辑中的判断（即对事物有所断定的思维形式）。

注意：并不是任何一个陈述句都能分辨真假，都构成命题。例如语句 H：“我正在说假话”。就无法判断真假。因为如果 H 为真，那么我说的“我正在说假话”这句话就不是真话，因此我并未说假话，这就与句子是真的发生矛盾；如果 H 为假，那么我并未说假话，即说的是真话，这又导致与句子 H 为假的假设相矛盾，所以对语句 H 我们无法判断其真假，故 H 不是命题，而是悖论。

除陈述句以外，其它没有判断内容的语句、无所谓是非真假的语句，如“请勿吸烟！”“现在几点钟了？”“天气多么好啊！”等表示祈使、疑问、感叹的句子都不能称作命题。

还有一类陈述句如“这道数学题很难”！“那个人相当年轻”。由于“很难”、“相当年轻”等概念没有清晰的界限，它们属于模糊概念，因此我们对这类语句没法作出明确

且一致公认的真假判断。这类语句并非普通意义下的命题，我们不妨称它们为**模糊命题**。模糊命题不属于本章讨论的范围。

由于命题可以判断真假，所以任何命题只有两种可能的结果：真（true）和假（false）。我们称命题的可能结果为命题的**真值**。命题只能取两个值：T（代表"真"）或 F（代表"假"）。如上述命题中命题 A、B、D、F取值为 T，而命题 C、E（如今天西安天晴的话）取值为 F。

从表达该命题的句子结构看，命题 A、B、C、E 最为简单，它们都是由简单句表达的，故称它们为**本原命题**或**原子命题**，而命题 D、F 较为复杂，它们是由一些本原命题加上一些联结词构成的。我们称这类命题为**复合命题**（或**分子命题**）。表示命题的英文大写字母 A、B、C、D 等称之为**命题词**。

研究命题的逻辑也叫**二值逻辑**，因为在研究命题时，我们并不注意它的实际内容，它只具有 T 或 F 这两个值。

二、联结词和复合命题

在日常语言中，我们常常使用"不"、"…和…"、"…或…"、"如果…，则…"、"…当且仅当…"等联结词将两个或更多的简单句联结成一个复合句。在命题演算中也有类似的一些用符号而不是用文字表示的联结词，它们的含义有时并不完全与日常语言的联结词一致。

常用的命题联结词有下列五种：

（一）或（析取词）$\vee$

两个命题 P 和 Q 的析取是一个复合命题，记作$P \vee Q$。它叫做 P 和 Q 的**析取式**。当且仅当 P、Q 同时为 F 时，$P \vee Q$ 的真值为 F；否则，$P \vee Q$ 的真值为 T。我们把

P、Q 各种取值组合决定析取式 P∨Q 的取值情况列成一个表，这个表叫做“或”的**真值表**。

“或”的真值表为：

表 1-1

P	Q	P∨Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

（二）与（合取词）∧

两个命题 P 和 Q 的合取构成一个新的复合命题，记作 P∧Q。它也叫做 P 与 Q 的**合取式**。当且仅当 P、Q 同时为 **T** 时，P∧Q 的真值为 **T**；否则 P∧Q 的真值为**F**。

“与”的真值表为：

表 1-2

P	Q	P∧Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

（三）非（否定词）¬

设 P 为命题，P的否定是一个新命题，记作 ¬P。我们称¬P 为 P 的**否定命题**。显然，若 P 的真值为 **T**，则 ¬P 的真值为 **F**；若 P 的真值为 **F**，则 ¬P 的真值为**T**。

“非”的真值表如表1—3所示。

（四）若…，则…（蕴含词）→

若 P、Q 为两个命题，那么“若 P 则 Q”构成一个新的命题。记作 P→Q，又叫“P **蕴含** Q”，或称 P→Q 为一个**条件命题**，其中 P 为它的**前件**，Q 为它的**后件**。