数学概貌丛书

微积分大意

徐利治著

科学技术文献出版社

数学概貌丛书

微积分大意

徐利治 著

科学技术文献出版社

数学概貌丛书

微积分大意

徐利治 著

*

科学技术文献出版社出版

（北京市复兴路15号）

上海市新华印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 850×1156　1/32　印张 8　字数 52,000

1989 年 4 月第 1 版　1989 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—4,000 本

定价：1.35 元

ISBN 7-5023-0651-X/O·41

目　录

引　言

我们假定读者已经具备初等微积分基础知识，在此基础上，本书将着重阐明微积分中的主要问题、基本思想、重要结论、典型方法和有关历史.限于篇幅，本书只能有选择地对某些最基本的事项(包括概念、定理、证明、技巧等)给予详细介绍. 至于其余部分，则希望读者能从本书的概略叙述中获得启发而有所领悟.

下面先谈一点微积分的发展简史，以有助于了解它的来龙去脉.

微积分又称“数学分析”，人们还常简单地称之为“分析学”. 事实上，“数学分析”是在微积分发展趋于成熟时期才比较通用的名称. 它主要包括实数理论、极限理论、微分学、积分学和无穷级数等部分.微分学与积分学是以极限论作为基础的，而极限论又以实数理论为基础. 所以，按照顺序，理应先谈实数理论，后讲极限理论，再在此基础上展开微积分学的讨论. 然而，正如大家所知道的，牛顿(I. Newton)和莱布尼茨(G. W. Leibniz) 大约是在17 世纪 70 年代前后就发现了微积分学基本定理，由此开创了一门新的数学；可是，实数系的逻辑基础却迟至19 世纪后叶才建立起来，竟比微积分的发明晚了整整两个世纪.这可以说是数学史上最令人惊奇的事实之一.

大家知道，在数学的学习过程中，凭借直观去学习运算是容易的；但要学习分析和论证，明白为什么可以那样去运算，就比较困难了．微积分学的成长发展过程也是这样．最初，人们（包括牛顿和莱布尼茨在内）大多是借助于直观和经验去引进一系列计算法则，并用以确实解决了一系列实际应用问题，由此更增强了对计算法则正确性的信念．至于有关计算法则赖以成立的原理及其论证，那就完成得很晚了．

举例来说，根据算术运算经验和几何直观，一般人都不会怀疑如下的运算结果：

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}.$$

但正如戴德金(J. W. R. Dedekind) 于 1872 年发表的著作中所说的："回忆 1858 年讲授微积分课程时碰到如上的实数运算，至少直到那时候还没有人将它严格证明过．"因为这里出现了无理数运算为何仍然遵循算术运算规律的问题．

谈到导数（微商）的计算法则，涉及到微分学的基础．对此，首先发难的是 18 世纪著名的英国主教贝克莱 (G. Berkeley)．他在 1734 年出版的《分析学家》一书中，对牛顿的'流数术'（即求导数方法）进行了一系列责难．其核心问题，就是要否定导数算法的逻辑合理性．举例来说，为求函数 $x=t^2$ 的导数．按流数术，先给 t 添加一个'流量'（无穷小增量）0，相应地，x 便从 t^2 变为$(t+0)^2$，故 x 获得的流量为 $(t+0)^2-t^2=2t\cdot 0+0^2$．计算两者的比值：

$$\frac{(t+0)^2-t^2}{0}=\frac{2t\cdot 0+0^2}{0}=2t+0.$$

最后，再在所得结果中把 0 项舍掉．这样便得到牛顿所说的'终极比'(Ultimate ratio)：

$$\dot{x}=2t.$$

显然，这就是 x 关于 t 的导数．如采用莱布尼茨的记法，也可写成 $\frac{dx}{dt}=2t$.

贝克莱的责难是这样的：首先要问上述算法中的增量 0 究竟是非零量还是真正零？如是非零量，则 $2t+0$ 式中的 0 就不能舍掉；如果是真正零，则 $(t+0)^2$ 与 t^2 无异，即 $(t+0)^2=t^2$，因而所求比值变为无意义的 $\frac{0}{0}$．"总之，不论怎样看，牛顿的流数算法是不合逻辑的．"这就是历史上著名的"贝克莱悖论"．当年，贝克莱还把牛顿的流数(即导数)讥之为"消逝量的鬼魂"．

采用如今一般教科书中的记法，牛顿的算法相当于取极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^2-t^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t)=2t.$$

这里应该指出，牛顿本人的概念思维其实是十分清晰的：他以物质运动（包括时间流逝)的连续变化量为直观背景，把增量 0 看成是一个流动量(即变数)，它可以从非零变化到真正零，从而得到他所要求的"终极比"．所谓终极比，即包含有比值(变量)跟着变化而最终达到极限的意思（注意，由于牛顿的流数概念常以力学为背景，故变量

的变化过程总能达到极限值). 所以,牛顿的头脑里不仅有了变量概念,而且还有让变量变化到终极状态时的"极限"概念.

由上所论,可见"贝克莱悖论"之所以出现,并不是由于什么推理上的粗心大意,而恰恰是因为贝克莱之流根本上缺乏变量极限观念,以致只能从初等数学的形式演算上去考虑问题的缘故.

整个18世纪,由于欧拉(L. Euler)和拉格朗日(J. L. Lagrange)等人作了大量工作,微积分在各个应用领域(尤其是在力学科学中)都取得了辉煌成果. 虽然出现了贝克莱之流对微分学基础的攻击,却丝毫也没有能动摇人们对微积分功效的信念. 正如当年达朗贝尔(J. L. R. D'Alembert)所说的:"向前进,你就会产生信心!"

但是,奠基在"无穷小分析法"上的这门新兴学科,毕竟在基本概念方面存在着许多模糊不清之处. 事实上,"无穷小"(又称"无限小",或"无穷小量")在实数系中是不存在的,把它当作一般实数来运算当然是缺乏根据的;而在当时的一些微积分教材中,却到处借助于无穷小去推导或猜想出一些定理和公式. 尽管推导出的结论常常是对的,但缺乏合乎逻辑的证明.

为了避免使用无穷小推理和当时还不甚明确的极限概念,拉格朗日曾试图把整个微积分建立在"泰勒(B. Taylor)展开式"的基础上. 他先用代数方法证明泰勒展开式,接着把 $f(x+h)$ 的泰勒展开式中 h 的各次幂的系数定义为函数 f 的各阶导数(微商). 至于不定积分,当做

可通过导数的逆运算来定义. 但是,这样一来,考虑的函数范围太窄了，而且不用极限概念也无法讨论无穷级数的敛散性问题.所以,拉格朗日以幂级数为工具的代数方法,未能解决分析学的奠基问题.

到了 19 世纪,出现了一批杰出数学家，他们积极为微积分学的重新奠基而努力. 首先要提到捷克的哲学教授布尔查诺(B.Bolzano).他开始将严格的论证引入数学分析学中. 1816 年,他在二项展开公式的证明中,明确地提出了级数的收敛性概念,同时对极限、连续和变量也有较深入的理解.特别是他曾写出《无穷的悖论》一书,书中包含有许多真知灼见,可惜直到他去世后两年 (1850 年)才得出版.

分析学的重要奠基人，公认是法国的多产数学家柯西(A. L. Cauchy). 他在 1821～1923 年间出版的《分析教程》和《无穷小计算讲义》，堪称数学史上划时代的著作. 在那里，他给出了分析学一系列基本概念的精确定义.例如,他给出了精确的极限定义,并把函数连续性、导数、微分、积分、无穷级数收敛性等重要概念,都建立在较坚实的基础上. 对此，当年挪威杰出的青年数学家阿贝尔(N. H. Abel),在他 1826 年关于二项展开式的论文中曾如此赞扬了柯西的成就:“每一个在数学研究中喜欢严密性的人，都应该读这本杰出的著作——《分析教程》.”柯西的重要贡献，就是抛弃了欧拉坚持的函数的显式表示以及拉格朗日的形式幂级数，而引进了处理函数的新概念.

分析学的进一步严密化的工作，是由一位大器晚成的数学家外尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass)作出的.这是他在1841～1856年担任中学教师时完成的工作.他的这些成果，直到1859年当他成为柏林大学的教师后，才逐渐为人们所获知. 他首先改善了柯西关于极限概念的描述性定义，提出了免除直观的 ε-δ 和 ε-N 陈述法.这便是今日数学分析教科书中普遍采用的极限表述法.往后，当讨论极限理论时，我们还将回到这个课题.

对于各种极限运算，首先要考虑极限是否总是存在？假如关于无理数还缺乏精确概念，而碰到变量的极限不是有理数时，则极限岂不就成为一个没有确切概念的未知对象？进一步，还可以提出“极限运算可否在实数系中畅行无阻”的问题. 这些都归结为实数系的“完备性问题”.

首要的问题是无理数如何严格定义，以及如何证明它们也适合一般运算规律. 于是，数学分析的最终奠基便归结到建立严格的实数系理论. 这一历史任务是在柯西逝世后十余年，才由戴德金、康托尔(G. Cantor)、海涅(H. E. Heine)、外尔斯特拉斯等人不约而同地完成的.他们采取的途径各不相同，而有关著作竟在同一年（即1872年)发表，这也是数学史上的一个巧合.

数学分析发展到20世纪，已经像棵老树那样，产生了许多粗壮高大的新分支.特别是实变函数论(包括测度论与积分论)成为经典分析学的直接延伸.还应该提到的是，由阿伯拉罕·鲁滨生(Abrahm Robinson)在60年代

创始的"非标准分析学". 这是把久已废黜的莱布尼茨的无穷小分析法在崭新的逻辑基础上重新复活起来的新兴学科.现代数理逻辑学家非常重视这一巨大成就. 例如,不久前故世的权威人物哥德尔(K. Gödel)就曾说过:"不论从哪一方面看,非标准分析将会成为未来的数学分析."我们也同意这一观点,相信非标准分析的巨大功效,必将在今后充分显示出来.后面(本书第 65 页)将对这一学科的思想方法和基本结果作一简要介绍.

一、实数理论

关于实数的构造,已有三大派理论(也就是有三种构造方法),即戴德金的'分划',康托尔-海涅的'基本序列'和外尔斯特拉斯的'有界单调序列'. 这三种构造方法的共同点,都是利用有理数的某些集合来定义无理数. 当然,这是符合逻辑学上的'定义规则'的,即:凡是新概念,都必须根据已知概念来定义.

1. 从有理数集谈起

有理数集 Q 有一个重要性质,叫作'稠密性',是指:对于两个有理数 r_1、r_2,不管如何相接近(即 $|r_1-r_2|$ 不论如何小),在它们之间总有另一个有理数 r_3,例如取 $r_3=\frac{1}{2}(r_1+r_2)$ 即是. 当然,在 r_1、r_3 之间和 r_2、r_3 之间,还分别有另外的有理数. 如此类推,可知 r_1 与 r_2 之间存在

着无穷多个有理数.

在数轴上,以有理数为坐标的点(位置点),叫做有理点.于是,数集 Q 对应于数轴上的有理点集.既然点和数一一对应,即可用点代表数,用数表示点,故在数轴上谈论问题时,分析学上就常常习惯地将'点'和'数'两个名词混用不分.

Q 的稠密性,在数轴(坐标点组成的直线)上即表现为有理点集的稠密性.今后,也同样用Q表示有理点集.设 $r\in\mathbf{Q}$,则由稠密性可知:总存在有理点列 $r_n\in\mathbf{Q}$ (其中 $n=1,2,3,\cdots$)以 r 为极限,即 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=r$,也即 $\lim\limits_{n\to\infty}|r-r_n|=0$.这表明有理点列之间的距离可以缩成零.由此可知,有理点与有理点之间不可能存在着大于零的'最小间距'.同样,也可以说,任何有理点 r 附近都不存在与 r 最近的而又异于 r 的有理点.

众所周知,单位正方形的对角线是长度为 $\sqrt{2}$ 的线段,而 $\sqrt{2}$ 并不是一个有理数.证明这一点是不难的,可用反证法:假设 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$,$p\in\mathbf{Z}_+,q\in\mathbf{Z}_+$,并设 p 与 q 互素(即 p 与 q 不再存在大于1 的公因子);两边取平方,可得$2q^2=p^2$,因此 p 为偶数,可记成 $p=2s$,而 $s\in\mathbf{Z}_+$;再代入原式,得 $2q^2=4s^2$,也即 $q^2=2s^2$,故 q 又必为偶数;于是,p 和 q 都有 2 的公因子.矛盾.

设想我们和古希腊的毕达哥拉斯 (Pythagoras) 一样,头脑中只有有理数概念,而根本不知道无理数为何物.这时,我们心目中的数轴(直线)上就只有坐标为有理

数的有理点. 于是，以原点 O 为心，以长为$\sqrt{2}$的线段为半径画圆，在数轴上就截不出有坐标值的交点了. 换言之，圆的弧线将在有理点集的'隙缝'中穿过去，因而根本得不到交点.

所以，如果不把有理点集间的隙缝填补起来，甚至连平面几何作图过程中"截取交点"一事有时都会遇到麻烦. 更何况在分析学中有理点列的极限有时还可能不是有理点. 因此，无理数的概念非引进不可. 顺便提到，在古代，当毕达哥拉斯学派的门徒发现无理数$\sqrt{2}$时，曾引起了震动，造成了数学史上所谓的第一次危机.

2. 戴德金分划

戴德金引出分划概念的想法，是从分析$\sqrt{2}$的定义方式得来的. 他的原始思想也多少受到了欧几里得(Euclid)《几何原本》中关于'不可公度比'处理方法的启发.

由上段所论，已知$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$. 不难找到有理点序列$r_n<\sqrt{2}$和$r'_n>\sqrt{2}$(其中 $n=1,2,3,\cdots$)，使得根据$\mathbf{Q}$的稠密性能有 $\lim\limits_{n\to\infty}(r'_n-r_n)=0$. 于是，从直观上看，可以认为$\sqrt{2}$恰好成为两个有理点集 $\{r_n\}$与 $\{r'_n\}$的分划点 (或'隙缝'). 但是，我们尚不知无理数$\sqrt{2}$为何物，又如何能选取 r_n 使与$\sqrt{2}$作比较呢? 这问题倒不难回答，因为我们总可以选取 $r_n\in\mathbf{Q}$，使 $r_n^2<2$. 同理，可选取 $r'_n\in\mathbf{Q}$，使 $r'^2_n>2$.

满足上述条件的点集(序列)$\{r_n\}$与 $\{r'_n\}$显然是非常多的. 为了避免特殊性和不确定性，最好的办法就是直接利用点集 $\mathbf{Q}$ 本身作成的二分法. 例如，我们可以把 $\mathbf{Q}$ 分

裂成'左半集'A与'右半集'A'：

$$A=\{r|r\in\mathbf{Q},\text{当 } r>0 \text{ 时 } r^2<2\},$$
$$A'=\{r'|r'\in\mathbf{Q},\text{当 } r'>0 \text{ 时 } r'^2>2\}.$$

当然，$A\cup A'=\mathbf{Q}$，且$A\cap A'=\varnothing$. 这样一来，$\sqrt{2}$便对应于 A 与 A' 两者的分划点(分界处)，可记为$(A|A')$.

同理，无理数$\sqrt{3}$可以用分划$(B|B')$来定义，而 B 与B'的定义是

$$B=\{r|r\in\mathbf{Q},\text{当 } r>0 \text{ 时 } r^2<3\},$$
$$B'=\{r'|r'\in\mathbf{Q},\text{当 } r'>0 \text{ 时 } r'^2>3\}.$$

再例如，自然对数底 $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=2.7182818\cdots$ 也是无理数，可用分划$(E|E')$来界定，其中

$$E=\left\{x|x\in\mathbf{Q},\ x\leqslant\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,k\in\mathbf{Z}+\right\},$$
$$E'=\mathbf{Q}\setminus E.$$

这里仍然有 $E\cup E'=\mathbf{Q}$，$E\cap E'=\varnothing$.

综上所述，便可总结出普遍的分划概念：设 X 与 X' 为有理数集 $\mathbf{Q}$ 的两个非空子集，满足如下三个条件

(i)凡 X 中的有理数，均比 X' 中的有理数为小；

(ii) X 与 X' 的并集为 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q}=X\cup X'$；

(iii) X 中无最大数，即：如果 $r\in X$，则必还有 $r'\in X$，而 $r<r'$.

这样，X 与 X' 便做成一个**戴德金分划**$(X|X')$，它代表一个**实数**.(或者干脆说，"分划就是实数".)

注意上述条件 (iii)，只是要求左半集 X 恒无最大数，但右半集 $X'=\mathbf{Q}\setminus X$ 却可能包含最小数；那个最小

数当然也是有理数. 此时,分划$(X|X')$就代表那个有理数. 另一可能情况是,右半集 X'也不含最小数. 此时,分划$(X|X')$便是一个无理数.

这样，戴德金便完成了利用有理数来定义无理数的工作.

3. 实数系的序结构

由上可知,每一分划$(X|X')$ 都由 $\mathbf{Q}$ 的子集 X 唯一确定. 因此,也可将分划简记为(X),并称(X)为一实数. 特别,当 $X' = \mathbf{Q}\setminus X$ 不含最小数时,(X)便叫作无理数.

任意一对实数(X)和(Y)，如果 $X\subseteq Y$,则规定大小顺序为$(X)\leqslant(Y)$. 这也可记作$(Y)\geqslant(X)$. 容易验证,实数间的顺序关系具有下列性质:

(i) 若$(X)\leqslant(Y)$、$(Y)\leqslant(Z)$, 则$(X)\leqslant(Z)$;

(ii) 若$(X)\leqslant(Y)$且$(Y)\leqslant(X)$, 则$(X)=(Y)$;

(iii) 对任意两个实数(X)和(Y),必有$(X)\leqslant(Y)$或$(Y)\leqslant(X)$成立(也即两关系中必有一者成立).

性质(i)、(ii)是显然的. 现证性质(iii): 假如不等式$(X)\leqslant(Y)$ 不成立，则子集 X 不含于 Y，故必有某元 $r\in X$,但 $r\notin Y$. 于是,由分划性质(i)可知对任意 $r'\in Y$恒有 $r'<r\in Y'$. 又因 $r\in X$,故知 $r'\in X$,这就表明 $Y\subseteq X$,也即$(Y)\leqslant(X)$成立.

既然实数都具备顺序性质(i)、(ii)、(iii),所以由一切实数构成的实数集 $\mathscr{R}$ 是一个有序集. 为了记法简便,今后也常用 x, y, z, t, α, β, γ 等表示实数.

4. 确界存在定理