高等学校教材

复变函数

（第二版）

余家荣 编

高等教育出版社

高等学校教材

复变函数

（第二版）

余家荣　编

高等教育出版社

(京)112号

本书第二版是在第一版的基础上、经过作者多年教学实践，听取了同行们的宝贵意见、并根据理科数学力学教材编审委员会函数论与泛函分析编审组在 1987 — 1989 年期间议定的《复变函数(侧重理论)教材编写提纲》修订而成的.

第二版保持了原有特色，补充了一些重要定理的证明，改写了辐角函数，许多章节都有不同程度的改进. 此外，第二版增添了同调形式及同伦形式的 Cauchy 定理、整函数的无穷乘积展开及亚纯函数的部分分式展开、单值性定理等，尤其增添多复变函数一章，可以扩大学生的知识面.

全书内容包括: 复数及复平面、复变函数、复变函数的积分、级数、留数、保形映射、解析开拓、调和函数以及多复变函数共九章，此外还有两个附录. 对于不属于复变函数课程的一般内容加上了 * 号，供学有余力的学生选学.

本书可供综合大学数学、力学、天文学等专业及师范院校数学专业作为教材，也可供自学者参考.

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教材

复 变 函 数

(第二版)

余家荣　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

高等教育出版社激光照排技术部

天津新华印刷一厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张 10.5　字数 270 000

1979年2月第1版1992年4月第2版　　1992年6月第1次印刷

印数: 0 001—6 417

ISBN 7-04-003754-8/O·1110

定价: 4.00元

第二版序

本书第一版问世至今已经十多年了. 感谢我国数学同行们的支持,在教学中广泛使用了它,并且对它提出了一些宝贵的意见和建议. 高等教育出版社早就要求编者编写修订版,直到现在才完成了这一任务.

近年以来,高等学校理科数学教材编审委员会和高等教育出版社重视教材的更新工作. 关于复变函数的教材更新,曾于1987— 1989年间分别在武汉、郑州及合肥召开讨论会,会议决定编写一本侧重理论、一本侧重应用的复变函数教材,并且分别拟定了编写提纲. 本书第二版是一本侧重理论的复变函数教材.

自从1980年以来,为了吸取外国经验进行教学改革,在武汉大学建立了中法数学班,其专业课由中法两国教师按照法国大学数学专业的教学计划及教学大纲进行教学. 我们了解到,由于复变函数论这一学科比较成熟,近年在法国以及其他各国的有关教学中,除引用了一些新的表述方式及少量新成果(如同调及同伦形式的柯西定理)外,其基本内容大体上没有变化. 至于课程的具体细节,教师则可根据情况安排.

本书第二版对第一版中有关内容参照同行们的意见作了修订,还参照编写提纲增添了一些内容. 增添的内容有的是为了提供教师选讲,有的是为了使本书同时成为供读者进一步学习的参考书. 现对增添的内容说明如下.

当前国际数学界已经比较普遍采用了集的有关概念与逻辑记号,我国有些数学同行在教学中也采用了. 由于有关概念及记号对教与学都比较方便,本书部分地采用了它们,并且把有关的基本知识写成了附录一,以备参阅.

为了使本书能起到参考书的作用,它包含了所有有关结果的

证明；附录二中讲述了约当定理，这属于拓扑学的范围；第六章中讲述了正规族及黎曼定理与边界对应定理的证明.

同调及同伦形式的柯西定理是单复变函数论中一项较近代的发展，多复变函数论是一门正在逐步形成的学科，本书对它们都作了介绍. 关于多复变函数，这里只讲述了两个复变数情形的一些基本结果.

本书还增添了无穷乘积、整函数的无穷乘积展式以及亚纯函数的部分分式展式等比较经典的内容. 此外，还补充了一些习题，其中包含由一些小题组成的大题；在法国数学课的习题及考试题中往往采用这种类型的大题.

对于不属于我国复变函数课程一般教学内容的章节以及有关习题，本书中加上了 * 号作为标志.

本书第一版中包含《解析函数对平面场的应用》一章. 由于这一章有些内容在当前只有历史上的意义，而且现在即将有侧重应用的复变函数教材出版，本修订版中把这一章完全删去了.

与本书第一版一样，本修订版的编写得到了武汉大学及其他兄弟院校同行们的热情帮助. 孙道椿副教授审阅了本书各章及附录一；张敦穆副教授审阅了第六章和附录二；陈方权副教授审阅了全书. 他们都提出了许多重要的意见. 史济怀教授倡议在本书中加入多复变函数一章，并对该章内容提了具体建议. 编者谨向这些同志们热烈致谢!

对于本书中所存在的问题，请读者予以指正. 编者谨在此预致谢意!

余家荣

1991年10月5日于武汉

第一版序(摘录)

本书是以武汉大学数学系 1963— 1965 年复变函数讲义为基础改写的. 这次改写的依据是 1977 年理科数学教学大纲讨论会上所制定的复变函数教材编写大纲.

本书讲述单复变函数的分析理论以及几何理论的基本内容. 其中有些内容在教学中可以根据具体情况决定取舍,例如可不讲多角形映射公式的证明、普阿松公式及狄里克莱问题等. 对多值函数可限于讨论只有一个有限枝点的情况. 如果这样. 第二章第 5— 7 段的内容可以删去一些; 对于对数函数和幂函数可只采用限制辐角使其成为单值函数的方法来处理; 第五章第 4 段的例 3 也可删去. 如果教学时间还不够,可考虑再删去亚纯函数零点与极点的个数、儒歇定理以及保形映射一般原理的证明等. 关于解析函数的应用,采用本书时可根据实际情况选讲. 本书每章后附有较多习题,以备选作.

在本书编写过程中,得到了武汉大学及其他许多兄弟院校同志们的热情帮助. 在审稿定稿时,又受到了四川大学领导和同志们的亲切关怀. 审稿小组的同志们提出了许多宝贵的意见以及改进教材的具体办法; 何成奇、范莉莉同志还帮助改写了有关多值函数的几段,严镇军同志帮助添加了一些习题. 编者谨向所有这些同志表示衷心的感谢!

余家荣

1978 年 8 月 28 日于武汉

引　言

复数是十六世纪人们在解代数方程时引入的. 在十七和十八世纪,随着微积分的发明与发展,人们研究了复变数函数(简称复变函数),特别是把实变数初等函数推广到复变数情形,得到了一些重要结果.

因为复数最初是单纯地从形式上推广而引进的,并且在十八世纪以前,由于人们对于复数的有关概念了解得不够清楚,用它们进行计算得到了一些矛盾,所以复数在历史上长期不能为人们所接受. "虚数"这一名词本身就恰好反映了这一点.

可是复数不是什么神秘的东西,它是由一对实数表示出来的,有许多几何量与物理量,也可用一对实数来表示,例如平面上点的直角坐标、平面向量、平面上的速度与力等等; 而复数恰好可以用来表示这些量. 在一些情况下,应用复数表示这些量计算起来比较方便. 在十八世纪,J. 达朗贝尔(1717 — 1783)与L. 欧拉(1707 — 1783)等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义,澄清了复数的概念,并且应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题. 直到这时,人们才接受了复数,复变函数论才能顺利地建立和发展.

复变函数的理论基础是在十九世纪奠定的. A. L. 柯西(1789 — 1857)、K. 外尔斯特拉斯(1815 — 1897)和G. F. B. 黎曼(1826 — 1866)是这一时期的三位代表人物. 柯西和外尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数,黎曼研究复变函数的映射性质.

复变函数论的建立和发展与解决实际问题的需要有联系. 例如复变函数论的主要基础之一——柯西定理,是柯西在研究水波传播问题时,设法计算一些积分而发现的; 流体力学、电学和空气动

力学的研究都促进了这门学科的发展.

到本世纪,复变函数论是数学的重要分支之一,随着它的领域不断扩大而发展成一门庞大的学科. 这门学科中所研究的问题,有些是由其本身在发展中提出的,有些是由实际问题或其他学科提出的. 对于自然科学其他部门(如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等)以及数学中其他分支(如微分方程、积分方程、概率论、数论等),复变函数论都有重要的应用[①].

从本世纪三十年代开始,我国数学工作者在单复变函数和多复变函数方面,做过许多重要的工作. 在七十年代,杨乐、张广厚同志在单复变函数的值的分布理论和渐近值理论中,得到了首创性的重要成果; 从八十年代起,我国数学工作者在数学的各个领域中开展了富有成果的研究工作. 这些都受到国际数学界的重视. 事实证明,中国人民具有无穷无尽的潜力,一定能在不远的将来,使我国在数学上全面达到世界先进水平.

本书主要讲述单复变函数的基本理论,对于多复变函数只在最后一章作了简单的介绍. 书中内容主要包括单复变函数的导数、积分、级数以及映射性质等,而且主要只限于讨论一类特殊的复变函数,即所谓解析函数.

① 例如可参看: M.A.拉甫伦捷夫及Б.A.沙巴特著, 施祥林、夏定中译,《复变函数论方法》, 高等教育出版社, 1956.

目　录

---

① 黎曼定理及边界对应定理的证明不属于复变函数课程的一般教学内容.

第一章　复数及复平面

§1. 复数及其几何表示

1. 复数域　复变函数论的出发点是复数. 在代数中已经讲述过复数. 为了便于以后讨论，我们把有关复数的基本定义及结论，在这里回顾一下.

每个复数 z 具有 $x+iy$ 的形状，其中 x 和 $y\in\mathbb{R}$ (全体实数所成的集)，i 是虚数单位(也可记作 $\sqrt{-1}$)；x 及 y 分别称为 z 的实部和虚部，分别记作 $x=\mathrm{Re}z$ 及 $y=\mathrm{Im}z$. 如果两个复数 z_1 和 z_2 的实部及虚部分别相等，那么这两个复数称为相等，记作 $z_1=z_2$. 如果 $\mathrm{Im}z=0$, 那么把 z 看作实数，记作 $z=\mathrm{Re}z$; 如果 $\mathrm{Im}z\neq 0$, 那么 z 称为虚数；如果 $\mathrm{Im}z\neq 0$, 而 $\mathrm{Re}z=0$, 那么 z 称为纯虚数，记作 $z=i\mathrm{Im}z$. 全体复数所成的集记作 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子集.

对实数引进加、减、乘、除运算，并且运算满足一些法则(交换律、结合律、分配律等). 这样就是在集 $\mathbb{R}$ 上引进一个代数结构，使其成为实数域 $\mathbb{R}$. 对复数也可以引进加、减、乘、除运算. 设 $a_1, a_2, b_1, b_2\in\mathbb{R}$. 复数的加法和乘法运算由下列等式定义:

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2),$$

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1),$$

在上列第二式中，把乘积展开成“变数”i 的多项式，然后用 -1 代替 i^2, 就得到右边的结果. 减法和除法则定义为加法和乘法的逆运算. 我们有

$$(a_1+ib_1)-(a_2+ib_2)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2),$$

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\quad(a_2+ib_2\neq 0).$$

可以证明，复数的加减乘除与实数的相应运算满足同样的一些法则. 对复数引进这些运算，就是在集 $\mathbb{C}$ 上引进一个代数结构，使其成为复数域$\mathbb{C}$; 它可看作是由实数域 $\mathbb{R}$ 扩张而得的.

2. 复平面 在平面上取直角坐标，平面上的任一点可由一对实数唯一确定. 这时在平面上或对集 $\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x$ 及 $y\in\mathbb{R}\}$引进两点($\mathbb{R}^2$ 中一个元素称为一点)的距离，即引进一种拓扑结构①；这时平面或集 $\mathbb{R}^2$ 称为平面 $\mathbb{R}^2$, 它是一个欧氏空间.

一个复数由它的实部和虚部、亦即由一对实数所唯一确定. 作映射 $\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2: z=x+iy\mapsto(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 于是在集 $\mathbb{C}$ 与平面 $\mathbb{R}^2$ 之间建立了一个双射（即一一对应的映射）. 把$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 看作表示 $x+iy$, 并把它称为点 $x+iy$. 这时平面 $\mathbb{R}^2$ 就称为平面 $\mathbb{C}$, 它是对集 $\mathbb{C}$ 引进两点的距离即一种拓扑结构而得到的一个欧氏空间. 集 $\mathbb{R}$ 与横坐标轴上一切点所组成的集相对应，集 $i\mathbb{R}=\{iy|y\in\mathbb{R}\}$ 与纵坐标轴上一切点所组成的集相对应. 因此把横坐标轴及纵坐标轴分别称为实轴及虚轴. 实轴在原点右方及左方的部分分别称为正实轴及负实轴；虚轴在原点上方及下方的部分分别称为上半虚轴及下半虚轴. 实轴上方及下方的半平面分别称为上半平面及下半平面；虚轴右方及左方的半平面分别称为右半平面及左半平面. 复平面 $\mathbb{C}$ 有时按照表示复数的字母用 $z, w, \cdots$ 而称为 z 平

① 从距离可引进邻域等概念.

面，w 平面，等等.

复数除了可以用复平面 $\mathbb{C}$ 上的点表示外，还可以用 $\mathbb{C}$ 上的向量来表示. 把复平面 $\mathbb{C}$ 上一切向量所组成的集记作 V. V 中向量可以分成一些等价类：一向量经过平行移动(把平行移动记作"关系 P")而得的所有向量，与原向量构成一个等价类. 集 V 对于关系 P 的所有等价类构成一个新的集，称为集 V 对于关系 P 的商集，记作 V/P[①]. 复数 $z=x+iy$(x 及 $y\in\mathbb{R}$) 可以用在实轴及虚轴上的投影分别是 x 及 y 的任一向量来表示，亦即可用一个等价类中的任一向量来表示. 有时我们把"复数"与"向量"用作同义语.

在图 1 中，把向量 $z=x+iy$ 的起点放在原点. 向量 $z=x+iy$ 的长度称为复数 z 的模，记作 $|z|$. 显然 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 实轴的正向与向量 z 之间的夹角(这里假定 $z\neq 0$)称为 z 的辐角，记作 θ, 显然 θ 有无穷多个不同的值，把它们记作

$$\operatorname{Arg} z=\theta+2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}),$$

或简单记作

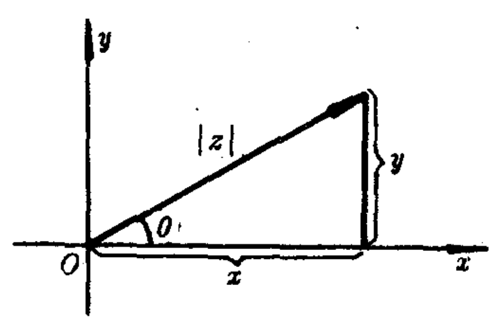

图 1

$$\operatorname{Arg} z=\theta+2\pi\mathbb{Z},$$

其中 $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$. $\operatorname{Arg} z$ 中只有一个值 α 满足条件 $-\pi<\alpha\leqslant\pi$; 它叫做 z 的辐角的主值，记作 $\arg z$. 以后也把 $\operatorname{Arg} z$ 中任一确定的值记作 $\arg z$.

复数 $z(\neq 0)$ 的实部和虚部可以用模和辐角表示为:

$$\operatorname{Re} z=|z|\cos\operatorname{Arg} z,\ \operatorname{Im} z=|z|\sin\operatorname{Arg} z.$$

① 每一等价类是 V/P 的一个元素.

于是 z 本身可以表示为

$$z=|z|(\cos \operatorname{Arg} z+i \sin \operatorname{Arg} z),$$

这个式子称为 z 的三角表示式.

两复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 称为(相互)共轭的. 如果其中之一用 z 表示，那么另一个用 $\bar{z}$ 表示. 显然点 z 和 $\bar{z}$ 关于实轴为对称. 因此

$$|z|=|\bar{z}|;$$

此外，$\operatorname{Arg} z=-\operatorname{Arg} \bar{z}$. 这个式子理解为：把 $\operatorname{Arg} z$ 的每个值乘以 -1，就得到 $\operatorname{Arg} \bar{z}$ 的一个值；反过来也是这样.

现对复数的加法作出几何解释. 根据定义，复数 $z_1=a_1+ib_1$ 及 $z_2=a_2+ib_2$ 相加与向量 z_1 及 z_2 相加的规律一致. 在力学和物理学中，如力、速度、加速度等都可用向量来表示，这就说明了复数可以用来表示实有的物理量. 当向量 $z_1(\neq 0)$ 及 $z_2(\neq 0)$ 的方向不是相同或相反时(图 2)，作起点在原点的向量 z_1 及 z_2，取 z_1 及 z_2 为两边作平行四边形，从原点出发沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2. 当 z_1 及 z_2 的方向相同或相反时，z_1+z_2 也不难作出.

由于 $-z_2$ 表示与 z_2 长度相等、方向相反的向量，而且 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$，可以仿照 z_1+z_2 的情形作出 z_1-z_2(图 2). 显然，复数相减与向量相减的法则也一致.

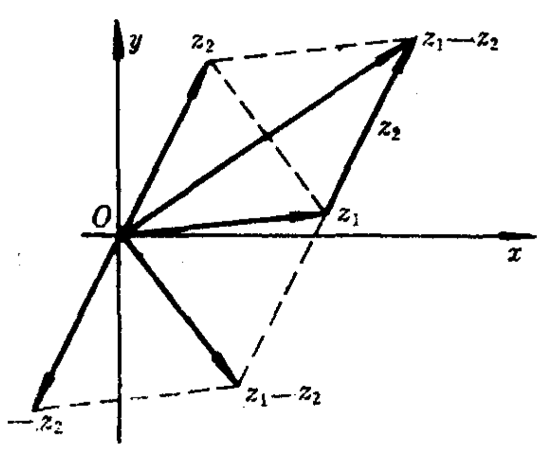

图 2

现在导出关于两复数的和及差的模的几个不等式．如图 2，从点 z_1 出发到点 z_1+z_2 的向量是向量 z_2. 于是向量 z_1, z_2 及 z_1+z_2 构成一个三角形的三边．因为三角形一边的长不能超过另两边长的和，并且不能小于它们的差，所以我们有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{2.1}$$

以及

$$|z_1+z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{2.2}$$

不难证明，即使向量 z_1, z_2 及 z_1+z_2 平行于同一直线，从而不能构成一个三角形的三边时，(2.1)及(2.2)仍然成立．

在(2.1)及(2.2)中用 $-z_2$ 代替 z_2，我们就得到

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{2.3}$$

以及

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{2.4}$$

我们也可直接证明(2.3)及(2.4)．事实上，在图 2 中，从点 z_2 出发到点 z_1 的向量是 z_1-z_2. 考虑向量 z_1, z_2 及 z_1-z_2 所构成的三角形，就可推出这两个不等式．

把 z_1 及 z_2 看作复平面 $\mathbb{C}$ 上的两点，不难看出，$|z_1-z_2|$ 表示 z_1 及 z_2 两点之间的距离．

关于复数的模，有下列结果：设复数 $z=x+iy$, 其中 x 及 y 是实数．显然

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z| \text{ 及 } |\mathrm{Im}z|\leqslant|z|. \tag{2.5}$$

又因 $z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$, 所以

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}\ . \tag{2.6}$$

例 1 试用复数表示圆的方程

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0,$$

其中 a, b, c, d 是实常数(如果 $a=0$, b 及 c 不全为 0, 这是直线方程).

令 $z=x+iy$, 代入方程中：由于