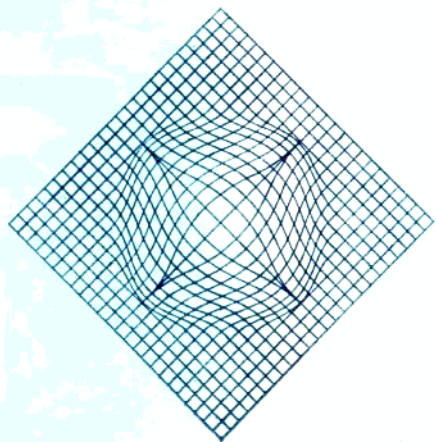


宋卫东 鲍佩恩 桂加谷 编 著

空间解析几何 习题课设计与解题指导



中国科学技术大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教委审定的高等师范院校数学专业《解析几何》教学大纲和编者多年的教学实践与经验编写而成的。全书共分七章,其中空间部分六章为向量代数,平面,空间直线,特殊曲面,二次曲面,一般二次曲线方程的研究,平面部分一章为一般二次曲线方程的研究。每章根据习题课的内容分为若干节,每节内容先作扼要介绍,再举一定数量的例题作详解,最后留有习题让读者思考和练习。

本书可作为综合大学、高等师范院校数学专业空间解析几何课的教学参考书,以及中学数学教师进修参考书。

前 言

本书是为高等学校数学专业空间解析几何习题课而编写的。

全书共分七章,其中空间部分为向量代数,平面,空间直线,特殊曲面,二次曲面,一般二次曲面方程的研究,平面部分为一般二次曲线方程的研究。每章的每节有内容提要,扼要介绍本节的基本概念、公式与重要定理,接着是将例题给出详细解法,有的还给出多种解法,每节中还有部分习题给读者练习。

书中选的例题是编者多年教学实践收集的,具有一定的代表性,有的习题解法具有技巧性,编者还注意了选题与每节内容的衔接。

本书在编写、出版过程中,编者得到了周纪安、孙国汉副教授的指教;在此向他们谨致谢意。

我们在编写过程中,参考了大量的有关书籍上的成果,在此谨向原作者深表感谢。

由于编者学识简陋,加之时间仓促,书中难免有许多缺点,希望得到专家同仁及读者的批评指正。

编者于芜湖赭山

1994年6月

目 次

1	向量代数	(1)
1.1	向量及其线性运算	(1)
1.2	向量的乘法运算及向量运算的坐标表示	(13)
1.3	总复习	(24)
2	平面	(34)
2.1	平面方程的各种形式	(34)
2.2	点与平面、平面与平面间的位置关系 及度量关系	(45)
3	直线	(57)
3.1	直线方程的几种形式	(57)
3.2	直线与点、直线、平面的位置关系 及度量关系	(67)
3.3	平面束与平面把	(82)
4	特殊曲面	(97)
4.1	球面	(97)
4.2	柱面	(110)
4.3	锥面	(118)
4.4	旋转曲面	(129)
5	二次曲面	(138)
5.1	椭圆面和双曲面	(138)
5.2	抛物面	(145)
5.3	二次曲面	(151)

5.4	二次柱面、二次锥面、二次方程表示	
	平面方程	(160)
6	二次曲面方程的研究	(165)
6.1	空间直角坐标变换	(165)
6.2	直线与一般二次曲面的相关位置	(176)
6.3	平面与一般二次曲面的相关位置	(182)
6.4	一般二次曲面的经平面与中心	(187)
6.5	一般二次曲面的主平面与主方向	(194)
6.6	一般二次曲面方程的化简与分类	(201)
7	平面上二次曲线方程的研究	(210)
7.1	直线与二次曲线的相关位置	(210)
7.2	二次曲线的渐近方向、中心、渐近线	(214)
7.3	二次曲线的切线	(220)
7.4	二次曲线的直径	(225)
7.5	二次曲线的主直径与主方向	(231)
7.6	二次曲线的方程的化简与分类	(235)

1 向量代数

本章主要介绍向量代数的基础知识,在后面一些章节中,通过向量这个工具直接把向量运算引到几何中来,这就是向量法。利用这个方法常常能够更简捷地解决一些问题,而且在建立坐标系后,向量和坐标又可以互相转换,这又为我们提供了很大的方便。

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 内容提要

只用一个实数就可以明确表示的量称为数量(或称为纯量),如距离、时间、温度等。而在自然界中,还有一种较复杂的量,它们不但有大小而且还有方向,如力、速度、电场等。我们称这种既有大小又有方向的量为向量(或称为矢量)。

具备大小和方向的最简单的几何图形就是有向线段,因而向量就可以用有向线段 AB 来表示, A 点称为向量的起点, B 点称为终点,记为 $\vec{AB}$ 或 $\vec{a}$ 。向量的大小(称为向量的模)就是线段的长度,记为 $|\vec{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$,而长度为 1 的向量称为单位向量,长度为零的向量称为零向量,记为 $\vec{0}$ 。

大小相等、方向相同的两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 称为相等向量,记为 $\vec{a} = \vec{b}$ 。

大小相等、方向相反的两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 称为相反向量,记为

$$-\vec{a} = \vec{b} \text{ 或 } \vec{a} = -\vec{b}.$$

方向垂直的两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 称为垂直向量,记为 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。

与已知直线平行的两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 称为共线向量(或称为平行向量),记为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行时,记为 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ 。

与已知平面平行的向量,称为共面向量。

定义 1 两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相加是一个向量,称为和向量,记为 $\vec{a} + \vec{b}$ 。这个和向量可用三角形法则构成:从第一个向量的终点作出第二个向量,以第一向量的始点为始点,第二个向量的终点为终点的向量就是它们的和。如图 1。

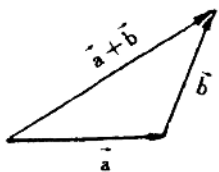


图 1

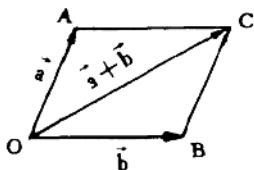


图 2

这个和向量也可以用平行四边形法则构成:在同一点 O 作出向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$,以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为邻边,作平行四边形 OACB,则对角线向量 $\vec{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和,如图 2。

定义 2 两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差是一个向量,它与所减向量的和就是被减向量,记为 $\vec{a} - \vec{b}$ 。

定义 3 向量 $\vec{a}$ 与数 λ 的乘积是一个向量,记为 $\lambda \vec{a}$,它的长度为: $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$,它的方向为:当 $\lambda > 0$ 时,与 $\vec{a}$ 同向;当 $\lambda < 0$ 时,与 $\vec{a}$ 反向。这种运算为数乘。

向量的加、减法及数乘称为向量的线性运算,它有如下运算

规律: 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为向量, λ, μ 为实数, 则

$$(1) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(2) \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$(3) \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$(4) \quad \lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$$

$$(5) \quad (\lambda + \mu) \vec{a} = (\lambda \vec{a}) + (\mu \vec{a})$$

$$(6) \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

由(2), 向量的加法可推广到多个向量的情形。

定理 1 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线的充要条件是存在唯一的非零实数 l , 使得 $\vec{a} = l \vec{b}$ 。

若 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 则 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面的充要条件是存在非零实数 l, m , 使得

$$\vec{c} = l \vec{a} + m \vec{b}$$

1.1.2 例题详解

例 1 自直角三角形直角顶 A 作高线 AD , 沿 $\vec{AB}$ 及 $\vec{AC}$ 之力其大小分别为 $|\vec{AB}|^{-1}$ 及 $|\vec{AC}|^{-1}$ 则其合力将沿 AD 且其数值为 $|\vec{AD}|^{-1}$ 。

证 如图, 设 $BC = a, CA = b, AB = c$, 沿 AB, AC 的力为 $\vec{AP}, \vec{AQ}$, 其合力为 $\vec{AR}$ 。

所以

$$|\vec{AP}| = \frac{1}{c}, |\vec{AQ}| = \frac{1}{b}$$

于是

$$|\vec{AR}| = \sqrt{|\vec{AP}|^2 + |\vec{AQ}|^2} = \frac{a}{bc}$$

但

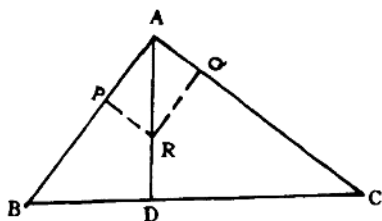


图 3

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}a \cdot |AD|$$

故

$$|\vec{AR}| = \frac{1}{|\vec{AD}|}$$

另一方面

$$\operatorname{tg} \hat{RAP} = \frac{|\vec{AQ}|}{|\vec{AP}|} = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} \hat{ACB} = \operatorname{tg} \hat{BAD}$$

故 $\vec{AR}$ 与 $\vec{AD}$ 重合, 因此合力 $\vec{AR}$ 将沿 AD , 且其值为 $|\vec{AD}|^{-1}$ 。

例 2 设 L, M, N 分别是三角形 ABC 三边 BC, CA, AB 的中点, O 为任意一点, 证明: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON}$

证法 1 如图 4,

$$\vec{OL} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OA})$$

$$\vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

故

$$\vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [(\vec{OB} + \vec{OC}) + (\vec{OC} + \vec{OA}) + (\vec{OA} + \vec{OB})] \\
 &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}
 \end{aligned}$$

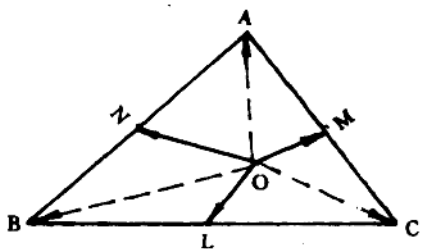


图 4

证法 2 因为

$$\vec{OA} = \vec{ON} + \vec{NA} = \vec{ON} + \frac{1}{2}\vec{BA}$$

$$\vec{OB} = \vec{OL} + \vec{LB} = \vec{OL} + \frac{1}{2}\vec{CB}$$

$$\vec{OC} = \vec{OM} + \vec{MC} = \vec{OM} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CB}) \\
 &= \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON}
 \end{aligned}$$

例 3 已知梯形 ABCD 中, $AB \parallel DC$, 设 E 和 F 分别为对角线 AC 和 BD 的中点, 求证: EF 平行于梯形的底边.

证 令 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{c}$, $\vec{DA} = \vec{d}$

则

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

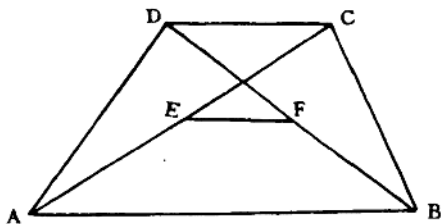


图 5

而

$$\vec{AB} \parallel \vec{DC}$$

故可设

$$\vec{c} = m \vec{a} \quad (m \text{ 为实数})$$

又

$$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BF}$$

但

$$\vec{EA} = \frac{1}{2} \vec{CA} = \frac{1}{2} (\vec{CD} + \vec{DA}) = \frac{1}{2} (\vec{c} + \vec{d})$$

$$\vec{BF} = \frac{1}{2} \vec{BD} = \frac{1}{2} (\vec{BC} + \vec{CD}) = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c})$$

故

$$\begin{aligned} \vec{EF} &= \frac{1}{2} (\vec{c} + \vec{d}) + \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) + \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2} (m+1) \vec{a} \end{aligned}$$

所以 $\vec{EF} \parallel \vec{AB}$

例 4 设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的中心, 证明

$$\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \cdots + \vec{OA}_k = \vec{0}$$

证法 1 由题设有

$$|\vec{OA}_i| = |\vec{OA}_{i+1}| \quad (i=1, 2, \cdots, k-1)$$

且这个正 k 边形被分为 k 个全等的三角形。

在平面上任取一点 B_1 , 接连作

$$\vec{B_1B_2} = \vec{OA_1}$$

$$\vec{B_2B_3} = \vec{OA_2}$$

$$\vdots$$

$$\vec{B_{k-1}B_k} = \vec{OA_{k-1}}$$

且相邻的两个向量 $\vec{B_{i-1}B_i}$ 与 $\vec{B_iB_{i+1}}$ 间的夹角均为 $\frac{2\pi}{k}$ 连接 B_kB_1 , 由正多边形的性质及作法可知 $B_1B_2\cdots B_k$ 为一正多边形。因而

$$\vec{B_kB_1} = \vec{OA_k}$$

所以

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \cdots + \vec{OA_k} = \vec{B_1B_2} + \cdots + \vec{B_kB_1} = \vec{0}$$

证法 2 因为

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_3} = \lambda \vec{OA_2}$$

$$\vec{OA_2} + \vec{OA_4} = \lambda \vec{OA_3}$$

$$\vdots$$

$$\vec{OA_{k-1}} + \vec{OA_1} = \lambda \vec{OA_k}$$

等式两边相加得

$$2(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \cdots + \vec{OA_k}) = \lambda(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \cdots + \vec{OA_k})$$

显然 $\lambda \neq 2$, 所以

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \cdots + \vec{OA_k} = \vec{0}$$

证法 3 i) 当 k 为偶数时, 结论是显然的。对于任一自然数

k , 作正边形外接圆每段弧 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的中点 B_{i-1} , 于是 $A_1B_1A_2B_2\cdots A_kB_k$ 为正 $(2k)$ 边形。由 i) 知

$$\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OB}_2 + \cdots + \vec{OA}_k + \vec{OB}_k = \vec{0} \quad (1)$$

又

$$\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 = \lambda \vec{OB}_1$$

$$\vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 = \lambda \vec{OB}_2 \quad (\lambda > 0)$$

$\vdots$

$$\vec{OA}_k + \vec{OA}_1 = \lambda \vec{OB}_k$$

代入(1)得

$$(1 + \frac{2}{\lambda})(\vec{OA}_1 + \cdots + \vec{OA}_k) = \vec{0}$$

故

$$\vec{OA}_1 + \cdots + \vec{OA}_k = \vec{0}$$

例 5 用向量法证明, P 是 $\triangle ABC$ 的重心的充要条件是

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$$

证法 1 充分性:

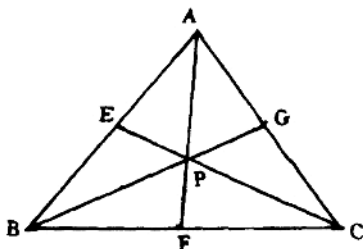


图 6

若 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$

则 $\vec{PA} + \vec{PB} = -\vec{PC} = \vec{CP}$ (1)

取 E 为 AB 中点, 则有

$$\vec{PE} = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PB}) \quad (2)$$

由(1), (2)得 $\vec{CP} = 2\vec{PE}$

同理可证 $\vec{BP} = 2\vec{PG}$ $\vec{AP} = 2\vec{PF}$

故 P 为 $\triangle ABC$ 的重心。

必要性:

若 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则

$$\vec{CP} = 2\vec{PE} = \vec{PA} + \vec{PB}$$

从而有

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$$

证法 2 充分性:

若

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$$

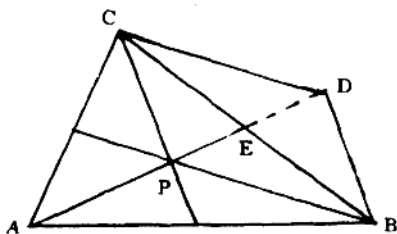


图 7

则

$$\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{AP}$$

延长 AP 至 D, 使得: $\vec{AP} = \vec{PD}$; AD 交 BC 于 E, 则

$$\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{PD}$$

故 PBDC 为平行四边形, 从而 E 为 BC 的中点。

同样可证 BP, CP 延长线交对边的点为 AC, AB 中点。

故 P 为 $\triangle ABC$ 的重心。

必要性:

设 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 从而有

$$\vec{PA} = \frac{1}{3}(\vec{CA} + \vec{BA})$$

$$\vec{PB} = \frac{1}{3}(\vec{CB} + \vec{AB})$$

$$\vec{PC} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{BC})$$

所以

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \frac{1}{3}(\vec{CA} + \vec{BA} + \vec{CB} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}) = \vec{0}$$

例 6 (Menelaus - 定理)

在 $\triangle ABC$ 的三个边 BC, CA, AB 或其延长线上分别取 L, M, N 三点, 则 L, M, N 三点共线的充要条件是

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$$

$$\text{证 令 } \lambda = \frac{BL}{LC}, \quad \mu = \frac{CM}{MA}, \quad \nu = \frac{AN}{NB}$$

则

$$\vec{L} = \frac{\vec{B} + \lambda \vec{C}}{1 + \lambda}, \quad \vec{M} = \frac{\vec{C} + \mu \vec{A}}{1 + \mu}, \quad \vec{N} = \frac{\vec{A} + \nu \vec{B}}{1 + \nu} \quad (1)$$

必要性:

若 L, M, N 共线, 则有 $\vec{M} - \vec{L}$ 与 $\vec{N} - \vec{M}$ 共线, 即存在数 $l \neq 0$, 使得

$$\vec{N} - \vec{M} = l(\vec{M} - \vec{L}) \quad (2)$$

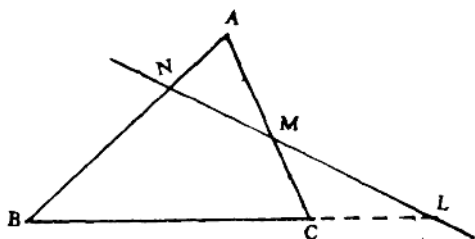


图 8

将(1)代入,并整理为关于 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ 的线性组合,再根据 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ 不共面,有

$$\begin{cases} \frac{1}{1+v} - \frac{\mu(1+l)}{1+\mu} = 0 \\ \frac{1}{1+\lambda} - \frac{v}{1+v} = 0 \\ \frac{l\lambda}{1+\lambda} - \frac{1+l}{1+\mu} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

消去 l 得 $\lambda\mu v = -1$ (4)

充分性:

设(4)成立,则(3)关于 l 有解,使得(2)成立,故 L, M, N 三点共线。

注 研究初等几何,一般来说有三种方法,一种是在中学开始阶段学的综合法,一种是中学后阶段学的坐标法,还有一种方法就是向量法,前面我们已经看到了用向量的线性运算解决了一些初等几何问题,有时还比较简捷的,今后还可以进一步看到这方面的例子。

1.1.3 补充习题

1. 已知三角形 ABC 的中线为 AD, BE, CF, 求 $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF}$.

2. 已知四边形 ABCD, 且 AB 边和 AD 边中点分别为 E 和 F, 求证

$$\vec{EF} = \frac{\vec{BC} + \vec{AD}}{2}$$

3. 已知两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 求证

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \text{ 的充要条件是 } \vec{a} \perp \vec{b}.$$

4. 三个不同点 A, B, C 共线的充要条件是存在三个均不是零的数 l, m, n , 使得

$$l\vec{A} + m\vec{B} + n\vec{C} = \vec{0}, \quad l + m + n = 0.$$

5. 空间四点 A, B, C, D 其中无三点共线, 则其共面的充要条件是存在四个均不是零的数 p, q, r, s 使得

$$p\vec{A} + q\vec{B} + r\vec{C} + s\vec{D} = \vec{0}, \quad p + q + r + s = 0$$

6. 设三角形 ABC 中 $\angle A$ 的分角线为 AD, 试用 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 表示向量 $\vec{AD}$.

7. 证明四面体每一个顶点到对面重心的线段共点, 且这点到顶点的距离是它到对面重心的距离的三倍。

8. 设 ABCD 是一个空间四边形, 又对角线 AC 和 BD 的中点分别是 L, M, 求证:

$$\vec{AB} + \vec{CB} + \vec{AD} + \vec{CD} = 4\vec{LM}$$

9. 设四面体 OABC 的三棱 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$, 且 OA, OB, OC 边上的中点分别为 M, P, R; BC, AC, AB 边上的中点分别为 N, Q, S, 求向量 $\vec{MN}, \vec{PQ}, \vec{RS}$.

10. (Ceva-定理) 在三角形 ABC 的三边 BC, CA, AB 或