中学数学综合题解法新论

重庆出版社

中学数学综合题解法新论

唐 以 荣 著

重 庆 出 版 社
一九八二年·重庆

封面设计：王仲莉

中学数学综合题解法新论　　唐以荣　著

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
四川省新华书店重庆发行所发行
达县新华印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张6.25　插页2　字数133千
1982年9月第一版　　1982年9月第一次印刷
印数　1—21,000

书号：13114·3　　定价：0.54元

J911189/119

目　录

引　论

初中几何课本第一册240页上，有这样一个题目：

"经过$\angle XOY$的平分线上一点A，任作一直线与OX、OY交于P、Q，求证$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=$定值"。紧接着，课本给了提示：

"作$AC\parallel OY$，证明

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OC}"。$$

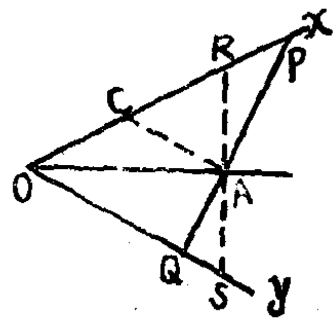

图　1

假定学生提出这样的问题*：

"怎样考虑到作辅助线OC的？"教师怎样回答呢？比较易于为学生接受的回答是：

"假定结论是正确的，那么，经过A并与OA垂直的直线（这是经过A并与$\angle XOY$的两边都相交的全部直线中特殊的一条）若与OX、OY分别交于R、S，（图1）"$\frac{1}{OR}+\frac{1}{OS}$"就应该等于同一个定值。"即

---

* 提出这样的问题是可以理解的，因为：

第一、这个问题本身是一个可以培养、提高逻辑思维能力的问题；

第二、以后在考试中，完全有可能出现难度相当的试题，考题不可能给提示（没有这种先例），对此，学生理应关心。

第三、中学课本中，并未介绍作辅助线的原则。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OR}+\frac{1}{OS} \qquad (A)$$

只要证明了(A)，问题就被证明。因为SR是经过定点A并与OA垂直的唯一直线，它即是定直线，又OX、OY也是定直线，因此R、S是定点，$\frac{1}{OR}+\frac{1}{OS}$就是定值。

由于OA平分$\angle XOY$，$OA\perp RS$，可知$OR=OS$，则(A)可化为

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{2}{OR} \qquad (B)$$

这样(B)就成了证明的目标了。为了使证明更简易，取OR的中点C，化(B)为

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OC} \qquad (C)$$

由于C、A各是OR、SR的中点，根据三角形的中位线定理，知$AC\parallel OY$，因此，C点可从A作OY的平行线而得到”。

分析一下这个解题过程，即可发现，其中不少内容是中学数学课本里的基础知识，但其中很重要的部分即运用特殊的直线确定那个并不知道的“定值”，却并不是中学课本的内容，而是中学课本中的基础知识以外的、正确的解题(即发现一个题目的解法或解答)的基础知识。

这个例证说明(下面还将进一步说明)，一个中学数学教师，在教好中学数学课本中的数学基础知识的同时，还必须教给学生怎样发现一个综合性的数学题目（需要运用若干项基础知识才能作出解答的题目)的解法的一系列基础知识，这对于提高数学教学质量是十分重要的，必不可少的。

特别需要提到的是：解题的基础知识，即是阐明一般的

解题规律的知识，它们的作用与一般的数学知识的作用是不同的。后者是解与之有关的问题的不可缺少的知识，而它们则是解每一个综合性练习题所不缺少的知识。中学生只有具备了、并且通过自己的作业实践比较牢固地掌握了这两方面的知识和经验，他们才可能有较高的解题能力。当他们碰到新的题目时，才会从容不迫、得心应手地作出合要求的解答，而不至于望题兴叹、一筹莫展或者漫无边际地东碰西闯，求助于“运气”。目前“题海”战术之所以盛行，除其它因素外，学生缺乏一般的解题规律的知识也是一个因素。

这个小册子，希望从中学数学教学的实际需要出发，探讨一系列解题规律的基础知识，对提高学生的解题能力，起到点滴的促进作用。限于水平，肯定有疏漏之处，希广大读者批评指正。

第一章　解题的根本要求和必要的基础

我们已在前面论证了中学数学教师在教好课本中的数学基础知识的同时，还必须教好解题规律的一系列基础知识。探讨这一系列基础知识的出发点应该是什么？古人说："擒贼先擒王"。要探讨一个事物并发现其运动变化的规律，首先应抓住它的本质。我们认为，探讨解题的基础知识，应当从探讨"解题的根本要求*是什么"和"解题的必不可少的基础又是什么"开始。下面就进行这两个方面的探讨。

一　解题的根本要求

解题的根本要求是什么？是**有目的、有根据的连续化简**（下面简称连续化简），即在完全合逻辑的前提下，把原题连续地化成比较简单的题目，直到新的题目与原题的结论或条件产生明显的逻辑联系为止。

为什么把这项要求称为解题的根本要求？因为解每个综合性的题目时，只要正确地实行了这项要求，工作就有效，而只要违反这项要求，工作一定无效。下面的例题充分说明这

* 这里所提解题的根本要求，即是指"解题过程的本质"，我们之所以未用后面这个词，仅仅为了便于青年读者接受。

两个方面。

例1　$\triangle ABC$中，已知

$$\sin C=(\sin A+\sin B)/(\cos A+\cos B) \qquad (A)$$

求证　$\angle C=90°$

解：为了作出证明，化条件为

$$\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\Big/2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=\sin\frac{A+B}{2}\Big/\cos\frac{A+B}{2} \qquad (B)$$

由于$\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=90°$,上式即是

$$\sin C=\cos\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{C}{2} \qquad (C)$$

把(C)化简为

$$2\sin(C/2)=1/\sin(C/2) \qquad (D)$$

把(D)化简为

$$\sin^2(C/2)=1/2 \qquad (E)$$

把(E)化简为

$$\sin(C/2)=1/\sqrt{2} \qquad (F)$$

可得

$\angle C/2=45°$

$\therefore\ \angle C=90°$

上面的分析说明，由于实行了连续化简，就迅速地找到了解法。

假定把思考方法改为："要证$\angle C=90°$,先证什么?"情况完全不一样，因为这个"什么"既可能是"$a^2+b^2=c^2$"也可能是下述各项之一。

“$\sin C=1$” “$a/c=\sin A$”

“$a/b=\operatorname{tg}A$” “$\angle C/3=30^\circ$”

谁也无法猜准它们中的哪一项与已知条件能发生 联 系。可见，这种把简单部分化成复杂的东西的作法，只能凭无根据的猜想，只能靠碰运气。断然不是科学的、有效的方法。

这个例题也说明(以后各例将继续说明)：所实 行的 连续化简，即是在完全合逻辑的前提下(即在数学公理、定理和它们的变形，即公式、 法则等的约束下)把原题连续地化成比较明显、简单的题目，到新的题目成为一项已知知识(包括已知条件)为止。

上例中，引出(B)，实质上即是化原题为：

“$\triangle ABC$中，已知$\sin C=\sin\dfrac{A+B}{2}\Big/\cos\dfrac{A+B}{2}$，求证$\angle C=90^\circ$”而引出$(C)$实质上则是化上述题目为 更新 的题目：

“$\triangle ABC$ 中，已 知$\sin C=\cos\dfrac{C}{2}\Big/\sin\dfrac{C}{2}$，求证$\angle C=90^\circ$”以后各步都是继续这种命题转化的工作。

例 2　$\triangle ABC$中，已知　$\angle A=60^\circ$． 求证

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{3}{a+b+c} \tag{A}$$

解　要证(A)，先证

$$(a+b)(a+b+c)+(a+c)(a+b+c)$$
$$=3(a+b)(a+c) \tag{B}$$

将(B)式化简，得

$$b^2+c^2-bc=a^2 \tag{C}$$

由(C)和已知条件$\angle A=60^\circ$，并运用余弦 定理可 直接证

明(A)。

上述解法由于实行了连续化简，迅速找到了解答。

假定采取另外的解法，考虑“当$\angle A=60^\circ$时，可以引出怎样的结论呢?”即令正确地迈出了第一步，得到结论

$$b^2+c^2-bc=a^2$$

下一步能得到上述的(B)吗？只能说千难万难，因为要配上十个项(只b^2、c^2二项未配)。

例3　已知三个正数x、y、z的最小公倍数是300，并且

$$x+3y-2z=0 \tag{3}$$

$$2x^2-3y^2+z^2=0 \tag{4}$$

求　x、y、z。

解：这个题已知条件是四项，即：(1)x,y,z是正数；(2)x,y,z的最小公倍数是300；方程(3)和(4)。“求解”是x,y,z的值。

假定从“求解”出发，考虑：“为了计算出x,y,z的值，必须先计算出什么?”这样考虑行不行得通？稍加思索，就知道不行。因为撇开条件，要计算出这个“什么”是谁也无能为力的。

回过头来，从条件出发，看是否可以引出比较简单的过渡性结论。这时的情况就不一样。因为，虽然看不出把条件(1)、(2)(或条件(2)、(3))联系起来可以产生怎样的过渡性结论，但把条件(3)和(4)联系起来，却可求出$x:y:z$。因为，由(3)可得

$$x=2z-3y \tag{A}$$

代入(4)并化简，可得

$$5y^2-8yz+3z^2=0$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

即

$$(5y-3z)(y-z)=0$$

取

$$5y-3z=0 \qquad (B)$$

由(B)与(A)可得

$\{y=3x,\ z=5x\}$或$\{x:y:z=1:3:5\}$

把以上结论与条件(2)联系起来，可得$15x=300$，所以$x=20$，进一步可得：$y=60$，$z=100$。

以 $y-z=0$ 代替(B)作与上述类似的推理和计算，可得

$$-x=y=z=300$$

这里，x为负，与已知条件冲突，应舍去。

第一个解答思考过程示意如下表*

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}(3)\to(A)\\(4)\end{matrix}\right\}\to(B)\to(C)\\ (2)\end{matrix}\right\}\to x=20\\ (C)\end{matrix}\right\}\to\begin{cases}y=60\\z=100\end{cases}$$

以上三例，充分说明：

第一、解题的根本要求的确是连续化简。化简的对象是题目的条件和结论二部分中的比较复杂或者项目较多的那一部分。解题时，实行了这项根本要求，就有效，不实行这项根本要求，就无效。

第二、题目的复杂部分之所以能够连续化简，那是由于复杂部分本来由若干简单部分组成，完全可以作到每步化简都有充分根据，稳扎稳打，用不着猜想。

---

*表中符号“→”表示“可得到”、“可推导出”或“引出”。以后同。

当题目的已知条件在二项以上时，其所以能连续化简，是因为：可以把二项（或一项条件与另一项条件的明显的推论）联系起来引出过渡性结论，而这一过渡性结论又能与其他的条件（或它的明显的推论）联系起来，引出新的过渡性结论……这样地继续下去，就得到通向结论的一系列过渡性结论。例3正是这样作的。

当然不是说任何两项条件总可以引出一项过渡性结论，例3中的条件(1)与(3)就不能作到这一点。但是在条件项目多的题目中，通常都有这种可以引出共同的过渡性的结论的条件。

总之，**有目的有根据的连续化简，既是解题的需要，也是完全可行的。**

但是，看一个步骤是不是化简？标准不单纯是所得结果在某些数量上是否比原题简单一些，关键是看所得结果是否有助于进一步化简。

比如把方程

$$x^2-6x-6-x\sqrt{x^2-2x-2}=0 \qquad (1)$$

变形为

$$3x^2-6x-6-x\sqrt{x^2-2x-2}-2x^2=0 \qquad (2)$$

看起来项数增加了，但由于(2)可变形为

$$3(x^2-2x-2)-x\sqrt{x^2-2x-2}-2x^2=0 \qquad (3)$$

而(3)又可变形为

$$(3\sqrt{x^2-2x-2}+2x)(\sqrt{x^2-2x-2}-x)=0$$

这说明把(1)化成(2)虽然形式变得更为复杂，仍是化简。

又如解题目“设$\overset{\frown}{AB}$是已知的半圆，圆心是O，M是其上任

意一点，l是以M为切点的切线，直线AP垂直于l并与直线BM交于P，求P的轨迹”。

为了运用l是以M为切点的切线这项条件，作半径OM，从表面上看。图形更复杂了，但这一线段却说明$OM \parallel AP$，结合O是AB的中点，可知M一定是BP的中点，因此P的轨迹正是$\overset{\frown}{AB}$的位似图形，B是位似中心。（图2）

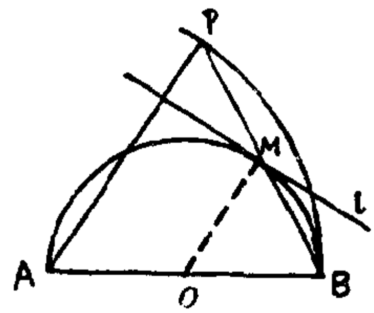

图 2

这两个例证说明，与一切发展着的事物一样，为解题而进行的连续化简，道路是曲折的。

只要我们这样全面而辩证地理解连续化简，那就完全可以得出结论，**解题的根本要求就是连续化简。**

掌握了解题的这一根本要求，既有助于实行正确的解法，也有助于比较迅速地发现并抛弃错误的解法。

如果有这样一道题：

例 4 设A、B、C是锐角三角形$\triangle ABC$的三个内角，求证

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C \qquad (A)$$

为了证(A)，先将(A)化成

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}>1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (B)$$

然后再进一步探讨(B)的前提。这个作法看起来有一定的道理，但仔细分析一下，它并没有化简（因为进一步化简并不容易），按照“**解题的根本要求是连续化简**”，就应看出这一解题方案有问题，应另找解题方案。

找怎样的解题方案呢？对左边使用正弦定理好不好？困

难，因为结论的右边与正弦定理无联系。同样，用余弦定理也有困难，因此考虑到“锐角三角形”和$\sin A$、$\cos A$这些已知条件，这一考虑促使我们作出图3（AD、BE是高，不作高就不便于使用$\sin A$、$\cos A$的定义），由

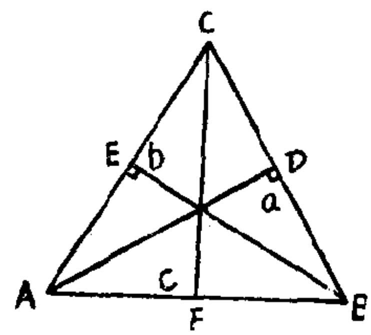

图 3

$$c\cos B = BD$$

$$c\sin A = BE$$

而

$$BE > BD,$$

$\therefore \sin A > \cos B$

同理

$$\sin B > \cos C,$$

$$\sin C > \cos A,$$

所以结论正确。

另解：考察$\sin A+\sin B$与$\cos A+\cos B$的大小关系，可知它们分别为：

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \text{与} 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

由于$\angle C<90°$，可知$\frac{A+B}{2}>\frac{\pi}{4}$，又$\cos\frac{A-B}{2}>0$，上二不等式可得

$$\sin A+\sin B>\cos A+\cos B \qquad (A)$$

同理可得$\sin B+\sin C>\cos B+\cos C$，$\qquad (B)$

$$\sin A+\sin C>\cos A+\cos C \qquad (C)$$

由(A)、(B)、(C)三个不等式，最后得到

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$$

以上的分析和例证，充分说明，为了顺利地解题，掌握

住“解题的根本要求是连续化简”这项总的规律是完全必要的。

二　解题的必要基础——审题

审题即是对题目作一次全面而深入的考察。全面，指理解它的每一个字，每一个词，每一句话，理解它的每一项条件和待求的结论。下列各例具体地说明全面地审题的涵义。

例1　已知 $a>b>0, a+b=1$,求证

$(1+1/a)(1+1/b)>9$。

全面地审题意味着切实掌握住三项条件：

（1）a、b是二个正数；（2）$a>b$；（3）$a+b=1$

同时，掌握住结论

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)>9$$

例2　若$ABCD$是一个正方形；$\odot M$是以AB为直径的圆，$\odot B$是以AB为半径的圆；射线BN经过正方形的内部与$\odot M$、$\odot B$分别交于P、Q。(图4)求证：PQ等于Q与AD的距离QR。

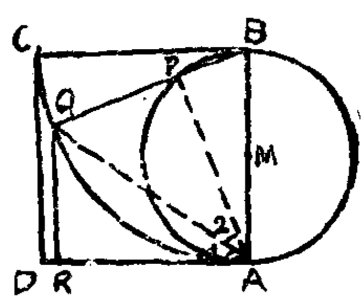

图　4

全面的审题，要求理解正方形、$\odot M$、$\odot B$、直径、射线、经过…内部、点与线段的距离等词和与之有关的那些句子，以及结论“求证：$PQ=QR$”。

由于这个题目涉及一个图形，一定要仔细作出一个清晰、正确的图形。它既有助于全面理解题意，并且还能提供一些

有益的启示，引导我们深入地审题。

例 3　设函数$f(x)=sin(kx/5+\pi/3)$，试求最小的正整数k，使得当自变量x在任意两个整数间（包括整数本身）变化时，$f(x)$至少存在着一个最大值和一个最小值。

审题时，必须理解函数式的意义，最小正整数k即是指函数式中的k所取的最小正整数值，任意两个整数包括任意两个相邻的整数（它们是任意两个整数中间隔最小的）。$f(x)$的最大值和最小值分别是函数的图形中纵坐标最大和最小的。同时，作出下图（图5）。

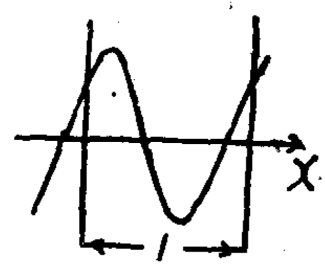

图　5

例 4　已知：两条主轴在同一直线上而开口相反的抛物线在它们的一个交点处的切线互相垂直，求证：它们的焦点相同。

审题时必须明确，若以它们的主轴所在直线为x轴，由于开口相反，它们的方程将分别是：

$$y^2=2px,\ y^2=-2q(x-k)$$

k是第二条抛物线顶点的横坐标，p、$q(>0)$分别是它们的准焦距（即焦系数），由于它们是相交的，必有$k>0$。

为了把“以交点为切点的二切线垂直”这项条件表示出来，可设交点为$P_1(x_1,y_1)$，则它们在该点的切线的斜率分别为：

$$p/y_1,\ -q/y_1,$$

由于两条切线相互垂直，可知$(p/y_1)(-q/y_1)=-1$

而它们的焦点的横坐标分别是：$p/2$，$k-q/2$。

到这一步为止，我们已将原题的“求证”化为证明

$$p/2=k-q/2$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com