

# 板壳理论

[美] S. 铁摩辛柯 S. 沃诺斯基 著

科学出版社

# 板壳理论

[美] S. 铁摩辛柯 S. 沃诺斯基 著

《板壳理论》翻译组 译

科学出版社

1977

## 内 容 简 介

本书为 S. 铁摩辛柯一系列著作之一。全书共十六章，除第十三章讨论板的大挠度问题外，其余各章都是讨论板和壳的小挠度问题。

该书的特点是：内容丰富，层次分明，机理阐述深入浅出，数学推导精简扼要，所得解决问题的方程或公式，也多易于实际应用。它是研究板和壳体理论以及进行数值计算(例如有限元法)的有价值读物。

本书可供航空、航宇、航海、机械、桥梁、建筑等方面的科研工作者、工程设计人员、大专院校有关专业师生和研究生参考。

S. Timoshenko S. Woinowsky-Krieger  
THEORY OF PLATES AND SHELLS  
(second edition)

McGraw-Hill Book Company, Inc.

1959

## 板 壳 理 论

〔美〕S. 铁摩辛柯 S. 沃诺斯基 著  
《板壳理论》翻译组 译

\*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1977 年 10 月 第 一 版 开本：850×1168 1/32  
1977 年 10 月 第 一 次 印 刷 印张：19 5/8  
印数：0001—8,150 字数：514,000

统一书号：13031·489

本社书号：728·13—2

定价：2.40 元

## 译者前言

在毛主席的无产阶级革命路线指引下,在毛主席和党中央的亲切关怀下,我国的力学研究工作和在工程设计方面的应用,已经有了很大的发展。为了配合这种大好形势发展的需要,我们遵照伟大领袖毛主席关于“洋为中用”的教导,翻译出版“板壳理论”一书以供读者使用。

原书是 S. 铁摩辛柯的一系列著作之一,曾被各国译成多种文字,熟习外文者需要时可以互相参阅。

全书共有 16 章,除第 13 章讨论板的大挠度问题外,其余各章都是讨论板壳的小挠度问题。第 11 章还讨论了板的各向异性问题,第 14, 24, 38, 119, 129 等节中又讨论了一些关于板的温度效应。解题方法,在绝大部分章节中,是用分析法,在若干章节中,例如第 80, 81, 100, 101, 122 等节中,应用了能量法,第 83 节中也应用了有限差分法。在这书中,数值计算法讨论得比较少,也没有讲到有限元法(著者写书时,这方法还不成熟),但书中所写的位移应变关系、应力应变关系、板壳的平衡原理、协调原理、能量原理、虚位移原理等的应用成果以及边界条件的考虑等,不仅对分析法是很重要的,并且对于数值计算法例如有限元法仍然是很重要的理论基础,还要继续取用。

该书的特点,是内容丰富、层次分明,对机理阐述深入浅出,对数学推导精简扼要。它可以作为航空、航宇、航海、机械、桥梁、建筑等工程在板壳力学方面的科研工作者、工程设计人员、工程院校师生的重要参考资料。

本书是根据原著 1959 年英文本第二版和参考 1963 年俄文译本译出的。

限于政治与业务水平,译稿还会有错误,希望读者及时予以批评和指正。

## 序 言

自从此书第一版印行后，板壳理论在实际上的应用范围已经相当地扩大了，而且在其中又引入了一些新的方法。为了将这些事实考虑进去，本书新版必须作出许多变动和补充。主要增添的有(1)关于板受横向剪切所引起的挠度的一节；(2)关于在受弯曲板圆孔周围的应力集中的一节；(3)关于弹性基支板的弯曲的一章；(4)关于各向异性板的弯曲的一章；(5)关于评述一下若干用在板件分析中的特殊方法和近似方法的一章。新版书也扩充了关于板的大挠度这一章，增加了若干变厚板的新问题和为便于板件分析工作的一些数值表。

在该书论述壳体理论的部分中，我们仅限于在壳体薄膜理论中增加了应力函数法和在壳体弯曲理论中作了一些小补充。

近年来，壳体理论正在迅速发展，并且在这领域里出现了若干新的著作。由于这些新的进展不宜于在本书内详细讨论，书中仅提供了一些新的文献，以备对该领域有特殊要求的读者从中找到需要的线索。

S. 铁摩辛柯

S. 沃诺斯基

## 符 号

$x, y, z$	直角坐标
$r, \theta$	极坐标
$r_x, r_y$	板中面在 $xz$ 和 $yz$ 平面内的曲率半径
$h$	板或壳的厚度
$q$	连续分布载荷的强度
$p$	压力
$P$	集中载荷
$\gamma$	单位体积的重量
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	与 $x, y, z$ 轴平行的正应力分量
$\sigma_n$	与 $n$ 方向平行的正应力分量
$\sigma_r$	极坐标中的径向正应力
$\sigma_t, \sigma_\theta$	极坐标中的切向正应力
$\tau$	剪应力
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	直角坐标中的剪应力分量
$u, v, w$	位移分量
$\varepsilon$	单位伸长
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	$x, y, z$ 方向的单位伸长
$\varepsilon_r$	极坐标中的径向单位伸长
$\varepsilon_t, \varepsilon_\theta$	极坐标中的切向单位伸长
$\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\theta$	壳在经线方向和平行圆方向的单位伸长
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	直角坐标中的剪应变分量
$\gamma_{r,\theta}$	极坐标中的剪应变
$E$	拉压弹性模数
$G$	剪切弹性模数
$\nu$	泊松比

- $V$  应变能
- $D$  板或壳的抗弯刚度
- $M_x, M_y$  板在分别垂直于  $x$  轴和  $y$  轴的二截面的单位长度上的弯矩
- $M_{xy}$  板在垂直于  $x$  轴的截面的单位长度上的扭矩
- $M_n, M_{nt}$  板在垂直于  $n$  方向的截面的单位长度上的弯矩和扭矩
- $Q_x, Q_y$  板在分别垂直于  $x$  轴和  $y$  轴的二截面的单位长度上平行于  $z$  轴的剪力
- $Q_n$  板在垂直于  $n$  方向的截面的单位长度上平行于  $z$  轴的剪力
- $N_x, N_y$  板在分别垂直于  $x$  轴和  $y$  轴的二截面的单位长度上的法向力
- $N_{xy}$  板在垂直于  $x$  轴的截面的单位长度上平行于  $y$  轴的剪力
- $M_r, M_t, M_{rt}$  极坐标中的径向弯矩、切向弯矩和扭矩
- $Q_r, Q_t$  径向剪力和切向剪力
- $N_r, N_t$  单位长度上的径向法向力和切向法向力
- $r_1, r_2$  旋转面形壳在经线平面内和垂直于经线的平面内的曲率半径
- $\chi_\varphi, \chi_\theta$  壳在经线平面内和垂直于经线的平面内的曲率变化
- $\chi_{\theta\varphi}$  壳的扭转
- $X, Y, Z$  壳上平行于  $x, y, z$  轴的外载荷强度分量
- $N_\varphi, N_\theta, N_{\varphi\theta}$  壳在主法截面的单位长度上的薄膜力
- $M_\theta, M_\varphi$  壳在经线截面和垂直于经线的截面的单位长度上的弯矩
- $\chi_x, \chi_\varphi$  柱形壳在轴向平面内和垂直于轴的平面内的曲率变化
- $N_\varphi, N_x, N_{x\varphi}$  柱形壳在轴向截面和垂直于轴的截面的单位长度

- 上的薄膜力
- $M_\varphi, M_x$  柱形壳在轴向截面和垂直于轴的截面的单位长度上的弯矩
- $M_{x\varphi}$  柱形壳在轴向截面的单位长度上的扭矩
- $Q_\varphi, Q_x$  柱形壳在轴向截面和垂直于轴的截面的单位长度上平行于  $z$  轴的剪力
- $\log$  自然对数
- $\log_{10}, \lg$  以 10 为底的常用对数



## 引 论

如将各维作比较时，板的弯曲性质在很大程度上决定于它的厚度。在以下的讨论中将板划分为三类：(1)具有小挠度的薄板；(2)具有大挠度的薄板；(3)厚板。

具有小挠度的薄板 如果板的挠度  $w$  较之于板厚  $h$  为小量，则在作了如下假设后就能建立起一套很有效的承受侧向载荷的板弯曲近似理论：

1. 板的中面没有变形。在弯曲时此面保持中性。
2. 板中原来在中平面法线上的各点，弯曲后仍在中曲面的法线上。
3. 板的横向正应力可以不予考虑。

用了这些假设，所有应力分量可由板的挠度  $w$  表示，而  $w$  是板平面中两个坐标的函数。此函数须满足一线性偏微分方程，这个方程连同边界条件就能完全确定  $w$ 。这样，这个方程的解，对计算板中任一点的应力就提供了所有需要的条件。

第二个假设等价于不考虑剪力对板挠度的影响。此假设一般是令人满意的，但在某些情况下(例如板中有孔)，剪切的影响变为很重要，此时应对薄板理论作一些修正(参看第 39 节)。

如果除了侧向载荷还有外力作用在板的中面内，则第一个假设不再成立，此时需要考虑作用在板的中面内的应力对板弯曲的影响。在上述板的微分方程中引入一些附加项便能作到这一点(参看第 90 节)。

具有大挠度的薄板 只要板被弯曲成可展曲面，第一个假设便完全满意。对于其他情形，板的弯曲伴有中面内的应变。但计算表明，如板的挠度较之于板厚为小量，则相应的中面内的应力可以忽略不计。如果挠度不是小量，在推导板的微分方程时就必须考

虑这些附加应力。这样,便得到非线性方程,从而问题的解变成复杂得多(参看第 96 节)。对于大挠度的情况,还必须区分不可动的边缘及在板平面内可动的边缘。边缘情况对板挠度和应力的尺寸可能产生重大影响(参看第 99 和 100 节)。由于板的变形中面的曲率,附加拉应力占主要地位,其作用方向与所受的侧向载荷的方向相反。因此现在所受的外载荷,部分由弯曲刚度承受,部分由板的薄膜力平衡。由此可见,对抵抗弯曲的能力可以忽略不计的非常薄的板,其作用如同薄膜;但对于很狭的边缘部分应该除外,这是由于加在板上的边界条件,使弯曲可以发生的缘故。

板弯曲成可展曲面的情况,特别是展成柱面,应当作为例外来考虑。这样的板,当挠度与板厚同阶时,可以不产生薄膜应力,也不影响弯曲理论的线性性质。如果这种板的边缘在板平面内不可移动,而挠度又充分地大,那么薄膜应力将会产生(参看第 2 节)。由上可见,在“具有小挠度的板”中,由板平面内不可移动边缘所引起的薄膜力,实际上可不予考虑。

厚板 以上讨论的薄板近似理论对厚度相当大的板是不可靠的,特别是在承受高度集中载荷的情况下更是如此。对于这种情况应该采用厚板理论。厚板理论把板的问题当作三维弹性问题来考虑,因而应力分析变得更加复杂,至今只是对于少数特殊情形,问题才得到完全解决。用这种分析,在有集中载荷的诸点上对薄板理论就能作必要的修正。

薄板理论的主要假设也构成了薄壳一般理论的基础。然而在外载荷作用下,板和壳的性质有重大差异。在承受侧向载荷时,板单元体的静力平衡只是在弯矩和矩扭(通常伴随有剪力)的作用下才成为可能;然而,壳体一般能用“薄膜”应力传递面载荷,这薄膜应力的方向平行于中面上已知点的切平面,并沿壳厚均匀分布。一般来说,在同样条件下壳的这个性质使它成为比板刚度大的多、经济性较好的结构。

在原则上薄膜力与弯曲无关,并由静力平衡条件完全确定。这些力的确定方法就是所谓“壳体的薄膜理论”。然而,由薄膜理论

得到的壳体边界上的反作用力和变形经常是和实际边界条件不协调的。为了消除这个矛盾,在边缘区域内必须考虑壳的弯曲,此弯曲可能稍微影响原来算得的薄膜力的大小。然而这种弯曲往往是非常局部性的<sup>1)</sup>,并且可以根据用在薄板小挠度问题中的相同假设进行计算。但是对于有些问题,特别是有关壳的弹性稳定性问题,应该终止使用小挠度假设,而应当采用“大挠度理论”。

如果壳的厚度能与曲率半径相比,或者,考虑集中力附近的应力,则应该采用更严格的、与厚板理论相似的理论。

---

1) 有几类壳,特别是具有负高斯曲率的壳,向我们提供了许多例外情况。在可展曲面情况下,如柱面和锥面,大挠度而无中曲面应变是可能的。在有些情况下,薄膜应力可以忽略不计,只考虑弯曲应力便已足够。

# 目 录

译者前言 .....	i
序言 .....	ii
符号 .....	ix
引论 .....	xii
<b>第一章 长矩形板的柱形面弯曲</b> .....	<b>1</b>
1. 板的柱形弯曲微分方程 .....	1
2. 承受均匀载荷的简支矩形板的柱形弯曲 .....	3
3. 承受均匀载荷的固支矩形板的柱形弯曲 .....	10
4. 承受均匀载荷的弹性固支矩形板的柱形弯曲 .....	15
5. 纵长边在板平面内的小位移对应力和挠度的影响 .....	18
6. 计算参数 $\mu$ 的近似法 .....	23
7. 具有初始小柱形曲率和承受均匀载荷的长矩形板 .....	26
8. 弹性基支板的柱形弯曲 .....	29
<b>第二章 板的纯弯曲</b> .....	<b>33</b>
9. 微小弯曲板的斜度与曲率 .....	33
10. 板在纯弯曲时弯矩和曲率的关系 .....	38
11. 纯弯曲的特殊情况 .....	43
12. 板在纯弯曲时的应变能 .....	47
13. 前述公式在应用上的限制 .....	48
14. 夹支板的热应力 .....	50
<b>第三章 圆形板的对称弯曲</b> .....	<b>52</b>
15. 承受侧向载荷的圆形板的对称弯曲微分方程 .....	52
16. 承受均匀载荷的圆形板 .....	55
17. 中心有圆孔的圆形板 .....	59
18. 承受同心圆载荷的圆形板 .....	65
19. 承受中心载荷的圆形板 .....	70

20. 对圆形板对称弯曲初等理论的修正 .....	75
<b>第四章 承受侧向载荷的板的小挠度 .....</b>	<b>82</b>
21. 挠度曲面的微分方程 .....	82
22. 边界条件 .....	86
23. 推导边界条件的另一方法 .....	92
24. 板的弯曲问题化成薄膜的挠度问题 .....	96
25. 弹性常数对弯矩值的影响 .....	101
26. 板的精确理论 .....	102
<b>第五章 简支矩形板 .....</b>	<b>110</b>
27. 承受正弦曲线形载荷的简支矩形板 .....	110
28. 简支矩形板的纳维埃 (Navier) 解 .....	114
29. 纳维埃解的进一步应用 .....	116
30. 对承受均匀载荷的简支矩形板的不同解 .....	119
31. 承受静水压力的简支矩形板 .....	130
32. 承受三角形载荷的简支矩形板 .....	136
33. 部分受载的简支矩形板 .....	141
34. 承受集中载荷的简支矩形板 .....	143
35. 承受集中载荷的简支矩形板的弯矩 .....	151
36. 无限长简支矩形板 .....	158
37. 承受矩形均匀载荷的简支矩形板的弯矩 .....	167
38. 简支矩形板的热应力 .....	171
39. 横向剪切变形对薄板弯曲的影响 .....	174
40. 变厚度矩形板 .....	183
<b>第六章 各种边缘情况的矩形板 .....</b>	<b>189</b>
41. 沿边缘承受分布力矩的矩形板的弯曲 .....	189
42. 二对边简支另二对边夹支的矩形板 .....	194
43. 三边简支一边固支的矩形板 .....	202
44. 四边固支的矩形板 .....	206
45. 一边或二邻边简支而其余边固支的矩形板 .....	217
46. 一对边简支 第三边自由 第四边固支或简支的矩形板 .....	219
47. 三边固支一边自由的矩形板 .....	223
48. 对边简支另二边自由或弹性支的矩形板 .....	226

49. 四边弹性支或四角点支四边自由的矩形板 .....	230
50. 承受均匀压力的半无限矩形板 .....	233
51. 承受集中载荷的半无限矩形板 .....	238
<b>第七章 连续矩形板 .....</b>	<b>242</b>
52. 简支连续板 .....	242
53. 等跨度连续板的近似设计 .....	250
54. 数行等距柱支板的弯曲——(无梁板) .....	260
55. 九节间无梁板及二边自由的无梁板 .....	269
56. 固连的支柱对无梁板的弯矩的影响 .....	273
<b>第八章 弹性基支板 .....</b>	<b>275</b>
57. 中心对称弯曲 .....	275
58. 贝塞尔函数在圆形板问题上的应用 .....	281
59. 弹性基支连续矩形板 .....	286
60. 承载数行等距柱的板 .....	293
61. 半无限弹性基支板的弯曲 .....	295
<b>第九章 杂形板 .....</b>	<b>300</b>
62. 板弯曲的极坐标方程 .....	300
63. 承受线形变化载荷的圆形板 .....	303
64. 承受集中载荷的圆形板 .....	308
65. 沿边界有若干点支的圆形板 .....	312
66. 扇形板 .....	314
67. 变厚度圆形板 .....	318
68. 线性变厚度环形板 .....	322
69. 线性变厚度圆形板 .....	325
70. 圆形板弯曲的非线性问题 .....	328
71. 椭圆形板 .....	331
72. 三角形板 .....	334
73. 斜形板 .....	339
74. 孔周围的应力分布 .....	341
<b>第十章 板理论中的特殊方法和近似方法 .....</b>	<b>346</b>
75. 板弯曲的奇点 .....	346
76. 影响面在板设计中的应用 .....	349

77. 影响函数和特征函数 .....	356
78. 无限积分和变换的应用 .....	357
79. 复变数法 .....	363
80. 应变能法对计算挠度的应用 .....	364
81. 应变能法的另一应用形式 .....	369
82. 各种近似法 .....	371
83. 有限差分法在简支板弯曲上的应用 .....	375
84. 实验法 .....	386
<b>第十一章 各向异性板的弯曲 .....</b>	<b>389</b>
85. 板的弯曲微分方程 .....	389
86. 在各种特殊情形中刚度的决定 .....	391
87. 各向异性板理论对网格板计算的应用 .....	394
88. 矩形板的弯曲 .....	397
89. 圆形和椭圆形板的弯曲 .....	402
<b>第十二章 板在侧向载荷和中面力联合作用下的弯曲 .....</b>	<b>405</b>
90. 挠度曲面的微分方程 .....	405
91. 均匀侧向载荷和均匀拉力联合作用下的简支矩形板 .....	407
92. 能量法的应用 .....	409
93. 侧向载荷和中面力联合作用下的简支矩形板 .....	414
94. 侧向载荷和拉力(或压力)联合作用下的圆形板 .....	418
95. 具有微小初始曲率的板的弯曲 .....	421
<b>第十三章 板的大挠度 .....</b>	<b>425</b>
96. 沿边缘承受均匀分布力矩的圆形板的弯曲 .....	425
97. 承受均匀载荷的大挠度圆形板的近似公式 .....	429
98. 承受均匀载荷的夹支圆形板的精确解 .....	434
99. 承受均匀载荷的简支圆形板 .....	438
100. 中心受载的圆形板 .....	441
101. 大挠度的板的一般方程 .....	446
102. 承受均匀载荷的矩形板的大挠度 .....	451
103. 简支矩形板的大挠度 .....	455
<b>第十四章 壳体的无弯曲变形 .....</b>	<b>459</b>
104. 定义和符号 .....	459

105. 承受轴对称载荷的旋转面形壳 .....	463
106. 旋转面形壳的特殊情况 .....	465
107. 等强度壳 .....	472
108. 承受对称载荷的旋转面形壳的位移 .....	476
109. 承受非对称载荷的旋转面形壳 .....	478
110. 风压产生的应力 .....	480
111. 若干点支球形壳 .....	485
112. 柱形壳的薄膜理论 .....	488
113. 应力函数对计算壳体薄膜力的应用 .....	493
<b>第十五章 柱形壳的一般理论 .....</b>	<b>499</b>
114. 承受轴对称载荷的圆柱形壳 .....	499
115. 对称变形的圆柱形壳的特殊情况 .....	506
116. 受压容器 .....	516
117. 等壁厚圆柱形箱 .....	520
118. 变壁厚圆柱形箱 .....	523
119. 柱形壳的热应力 .....	534
120. 非胀大变形的圆柱形壳 .....	538
121. 柱形壳变形的一般情况 .....	544
122. 简支柱形壳 .....	552
123. 柱形壳截体的挠度 .....	554
124. 柱形壳弯曲的近似分析 .....	558
125. 应变和应力函数的应用 .....	561
126. 柱形屋顶壳的应力分析 .....	563
<b>第十六章 承受轴对称载荷的旋转面形壳 .....</b>	<b>573</b>
127. 平衡方程 .....	573
128. 平衡方程化为两个二阶微分方程 .....	577
129. 等厚度球形壳 .....	580
130. 球形壳应力分析的近似法 .....	588
131. 具有边环的球形壳 .....	596
132. 扁球壳的对称弯曲 .....	599
133. 锥形壳 .....	605
134. 旋转面形壳的一般情况 .....	609



# 第一章

## 长矩形板的柱形面弯曲

**1. 板的柱形弯曲微分方程** 我们将以沿板长受有不变横向载荷的长矩形板弯曲的简单问题,作为板弯曲理论的开始,这样的板在离二端相当远的部分<sup>1)</sup>,其挠曲面可以假设是柱轴与板长相平行的柱面。因此对于这个问题,可用相距为一单位长并与板长相垂直的二平行面由板上截取一单元条,而仅仅研究这单元条的弯曲。这单元条的挠度可用和受弯曲梁的挠度方程相似的微分方程表示。

为了得到此挠度方程,可讨论一厚度为  $h$  的等厚板,并且取  $xy$  平面为受载荷前的中面,即在板二表面中间的平面。令  $y$  轴与板的一个长边缘重合,且令  $z$  轴的正方向向下,如图 1

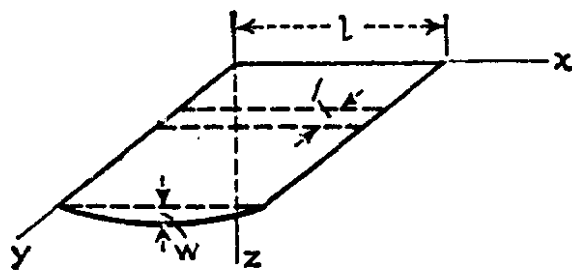


图 1

所示。如果用  $l$  表示板的宽度,那么这个单元条可以视作长为  $l$ 、深为  $h$ 、横截面为矩形的杆。在计算这样的杆的弯曲应力时,可用普通梁

的理论,假设杆的横截面在弯曲时仍保持为平面,从而这些横截面仅对它们的中性轴作旋转。如果没有正交力作用于杆的两端横截面上,则杆的中性面将与板的中面重合,并且与  $x$  轴平行的纤维的单位伸长将与它和中面的距离  $z$  成正比。此挠曲线的曲率可以取作等于  $-d^2w/dx^2$ ; 式中  $w$  是杆在  $z$  方向的挠度,可以假设它较之

1) 为使板的最大应力与无限长板的最大应力相近似,板的长与宽应满足一定关系,这些关系将在以后讨论,参看第 126 页和第 132 页。