

连续介质力学引论

[美] W. M. 赖 D. 鲁宾 E. 克莱勃 著

康振黄 陈君楷 译
邹盛铨 杨惊途

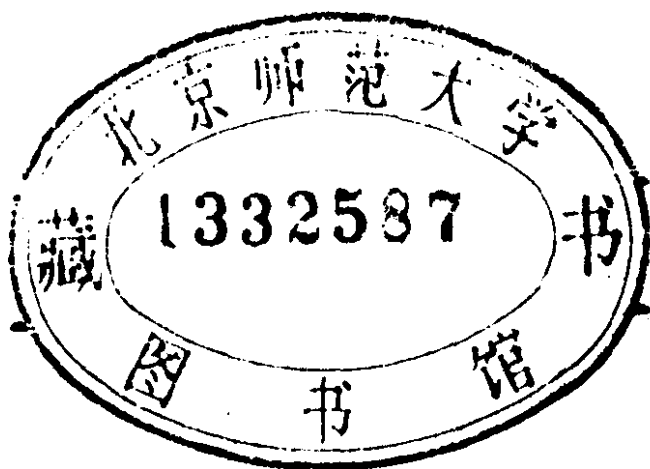
四川科学技术出版社

连续介质力学引论

[美]W·M·赖 D·鲁宾 E·克莱勃 著

康振黄 陈君楷 邹盛铨 杨惊途 译

JU1/21/50



四川科学技术出版社

一九八五年·成都

责任编辑：杨先庚
封面设计：陈家伟、陈曼蓉
版面设计：翁宜民

连续介质力学引论
[美]W·M·赖 D·鲁宾 E·克莱勃著
康振黄等译

出 版：	四川科学技术出版社
印 刷：	重 庆 印 制 一 厂
发 行：	新华书店重庆发行所
开 本：	850×1168毫米 1/32
印 张：	11 插页：2
字 数：	287千
印 数：	1—3,380
版 次：	1985年10月 第一版
印 次：	1985年10月 第一次印刷
书 号：	15298·123
定 价：	2.80元

作 者 序

本书是为连续介质力学理论的初学者准备的引论性教材。题材的提法上，特别注意使已有很好的微积分、某些微分方程和固体力学基础的读者可以掌握。为了教学，内容并不太深。只是足以更好地理解以后的连续介质力学各分支课程和有关学科作准备。大部分教材均已对伦塞勒多科性工学院本科生讲授过。然而作者相信，本书也适于低年级研究生用。

我们就第二章顺便作些说明。这一章导出了三维空间中作为矢量线性变换的二阶张量。根据我们的教学经验，入门的方法用线性变换最为有效。它是独立的一章。所以线性变换的预备知识虽是有益的，但并非必需的。三阶或更高阶的张量，可通过对二阶张量的线性变换规律的推广而导出。使用指标记法可以节省书写方程的数目。为了简化计算，也使用矩阵，对于不熟悉矩阵的读者，可以参考书末的附录。

此外，我们再对连续介质物理的基本原理的提法说明一下。本书对这些原理的微分和积分形式，二者都作了介绍。在三、四、六章中给出微分形式的公式，定义了这些章节公式中必要的物理量。积分公式在第七章中给出，这是为了便于教学。所提供的积分公式，对于初学者来说，要求稍复杂的数学技巧，可以放在后面或者略去，并不影响本书的主要部分。（下略）。

W. Michael Lai, David Rubin

Erhard Krempf

1973. 9.

译 者 序

这是一本关于连续介质力学引论性质的教材，对于近代连续介质力学提供了非常清楚的概念和必要的数学工具，例题和习题都不少，对本科生和低年级研究生都是很适用的。就译者所知，本书在美国是得到普遍好评的一本流行读物。我们在成都科技大学为力学专业的研究生开设的连续介质力学引论课程，曾用此书作为主要教材，实践证明效果是较好的。此外，原书的作者们，和我们在学术交往上也是很友好诚挚的，这更增加了我们将原书译出问世的兴趣。

目前，在物理学的物质构造理论中，有两种基本的数学模型：离散体模型和连续统模型。前者认为物体是由大量的、具有确定物理性质的（例如质量、电荷等）、彼此相互吸引而聚集在一起的几何点的集合所组成。原子模型即其一例。后者引用场的概念去描述物体的几何点，而不必区分构成该物体的一个个粒子间的差异。在全部空间或部分空间里的每一点，都对应着某个物理量的一个确定值，就说在这空间里确定了该物理量的场。利用场的概念，在物体任一点上可以确定一个密度，例如质量密度、电荷密度、能量密度等等，而不再把它们加以量子化。事实上，任何数学模型只能在一定的准确程度上表达物质的物理学规律。正如美国普林斯登大学的A.C.Eringen教授在其主编的《连续统物理》中指出的，物体对外界作用的响应，取决于外部特征长度（和/或时间）与物体内部特征长度（和/或时间）之比。当外加载荷

的波长远大于颗粒（原子）之间的距离时，场论的结果与实测相符，因而连续统模型适用；当两者之比接近时，离散体模型适用；而当外加载荷的波长小于颗粒之间的距离时，点粒子本身具有连续统的特性，因而物体被认为是由离散的连续体集合所组成，即属于混合模型。我们提出如上的一段内容，目的在于使读者学习连续介质力学时，对于它的数学模型的内涵和外延都有一个概括的印象。

物质的连续统 (Material continuum) 概念是从数的连续统 (Continuum of Numbers) 概念推演而来的。从科学的发展来看，自古以来关于连续地变化、生长和运动的直观概念，一直在向科学的见解挑战。但是，直到十七世纪，当现代科学和微分学、积分学以及数学分析密切相关地产生并且迅速发展起来的时候，才开辟了理解连续变化的道路。我们知道，“实数连续统”概念是进行一切极限运算的基础，而极限运算则是微积分和数学分析的基础。正整数（自然数）用来表示离散元素的个数是有用的；但是用来表示各种量的度量（例如曲线的长度、物体的体积或重量等等）则是不够用的。自然数经过有理运算（加、减、乘、除）扩充为有理数。有理数在数轴上的点是稠密的，但作为变量工具来说，还是不够用的。只有把不可通约的无理数也包括在内，形成实数系，则形成数的连续统，即表现为在实轴上没有空隙存在。这样，我们还可以建立四维连续统，即将时间表示为 t 的实数系；三维空间表示为 x, y, z 的实数系，于是以时间与空间作为四维连续统。

物质连续统即连续介质。设有一定质量的物质充满一定的空间，并设 P 为空间内的一点。取一系列子空间，使其收敛于 P 。以 S_n 表示第 n 子空间，其体积为 V_n ，其中的物体质量为 M_n ，则如果

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{M_n}{V_n}$$

存在,则将此定义为在 P 点处物体的质量分布密度。如果在所设空间内各点处都有这样定义的密度,则质量被认为是连续分布的。同样,可以定义动量密度、能量密度等等。所谓物质连续统或连续介质,即指这样一类物体,它的质量密度、能量密度、动量密度等,从上述数学意义上说,都是存在的。关于这样的连续体的力学,即连续介质力学。事实上,物质是基本粒子结构体,不是连续体。但是,当我们使上述的 S_n 变得越来越小的时候,只要始终保持其中含有足够多的质点在内,而不至于使上述极限值或者不存在或者发生突跃,则用这种模型来表示物体是可行的。实际上,这在通常情况下,不会有什么困难。水的分子的尺寸约为 $1\text{\AA}(10^{-8}\text{cm})$,只要我们所涉及的尺寸较此大几个数量级,例如 10^{-6}cm ,则可把水作为连续介质。空气在地面处常温下的平均自由程约为 $5 \times 10^{-6}\text{cm}$,飞机的机身尺寸比这大得多,因此流经飞机周围的空气,完全可以作为连续介质。当然,如果在高空,情况就会不同。在离地面100公里处,空气分子的平均自由程即达几个厘米;而在200公里处,空气分子的平均自由程就比一般飞机的机身还要长些。显然,在这种情况下,仍把空气看作是连续介质就不切合实际。以人体来说,红血球的直径约为 $8 \times 10^{-4}\text{cm}$,当它们在直径约为 0.5cm 的动脉内流动时,血液可以作为连续介质对待。但是,在毛细血管或在动脉血管的分岔和狭窄处,则不得不放弃连续介质模型,而采用离散模型。我们提出如上叙述的内容,目的在于使读者认识到,连续介质力学有它一定的适用条件;同时,也对原书序言中的观点,即在给定情况下,连续介质

理论是否得到证实是一个实验的问题而不是道理的问题，予以强调。

连续介质是对物质质点的大集合体的抽象。连续介质力学的目的即是描述在外力作用下，作为其响应的这些质点在空间内和时间内运动、平衡以及变形。在古典力学中，物体的质量设为守恒的，即物体的质量在各个时刻都相同；在连续介质力学中，还要进一步假设质量是体积的连续函数。和弹性力学、流体力学等学科比较，连续介质力学也有其特点。正象现代数学的基本趋势是朝着用越来越一般的、系统的方法，代替对个别情况的分别讨论一样，连续介质力学更着重一般方法论方面；并且，引入更广阔的现象领域和有关的规律。这从连续介质力学的主要内容可以看出。一部分主要内容是对各种介质都适用的一般性原理，另一部分主要内容则是对特定的理想化介质所适用的本构方程。本构方程(Constitutive Equations)是指描述物质的一定性质的方程。所以称为“本构”，是指构成物体的物质本身的性质，区别于物体所受的外在作用。这个术语，可能最早是在电动力学中出现的，表示物体的物性，区别于它所受的电磁场作用。而后，由C. A. Truesdell把它引用到力学中来。在力学意义上，本构方程也称“流变学状态方程”，这是因为从“流变学(Rheology)”一词的形成来看，在一定意义上说，连续介质力学也即是流变学。有这样一段历史：1928年Markus Reiner到达Easton Pa.时，Bingham对他说：“你是一位土木工程师，我是一个化学家，我们在联合课题上共同工作。随着胶体化学的发展，这种情况还会更加普遍。所以，我们必须建立一个物理学分支，来研究这样的课题。”Reiner说：“这样的物理学分支已经有了，它叫作连续介质力学或连续体力学。”Bingham回答说：“不，这不行，这样

的命名会把化学家吓跑。” Bingham找古典语言学教授商量,提出“流变学”的命名,取自古希腊的一句格言,意思是说,“万物皆流”。其后,在1929年,在Bingham的倡议下,美国成立了流变学协会。由此可见,连续介质力学的形成,反映了力学研究中加强有关物性研究的趋势。从力学的发展来看,从19世纪末到20世纪中叶,力学界主要着眼于传统力学在生产实际中的应用,即传统力学与技术的结合。航空、航天便是其中突出的事例。这段时期,总的看来,力学研究在物性和动性两方面,后者居多。但是,到本世纪五、六十年代以来,随着工业生产的发展,新的材料问题变得更为突出,原有材料的使用范围也有新的扩展,反映在力学研究中,物性研究有所上升,本构关系的研究有所发展,连续介质力学的发展反映力学研究的一个方面的新的时代特征。生物力学研究之密切依赖于连续介质力学基础,高分子材料力学研究之密切依赖于连续介质力学基础,高温状态下工程材料和结构力学研究之密切依赖于连续介质力学基础,以及其它与此类似的情形,都反映这一特征。我们在这篇译者序中补充如上的说明,目的在于使读者从事连续介质力学的学习时,意识到它所反映的力学进展的趋势,从而更加重视它,更好地掌握它,使它更好地为我国的社会主义现代化建设服务。

康振黄执笔

一九八三年二月于成都科技大学

作者中译本序

1984年夏天，康振黄教授访问我校时告诉我，成都科学技术大学的学者们正把我同Rubin博士和 Krempl 博士合著的《连续介质力学引论》译成中文，康教授希望我为中译本写几句话，我感到非常荣幸，并对成都科学技术大学的学者们为此做出的努力倍觉欣慰。

首先，我完全同意康教授的看法，近代工程的学生要具备处理和解决许多一般工程和生物工程问题的能力，必须有扎实连续介质力学的功底。我衷心希望这本著作能对成都科学技术大学的中国工程师们实现这一目标有所裨益。

其次，对成都科学技术大学和伦塞勒多科性工学院之间的友谊，我也殊有感受。这两所大学都是教育、造就出类拔萃青年的高等学校，这些青年将对科学技术做出贡献，为人类造福。近年来，我们两校学者之间进行了许多学术交流。其间有以伦塞勒多科性工学院毛昭宪博士为首的美国矫形专家组1979年和1981年对成都科学技术大学的访问，以及康教授（1981年、1984年）和成都科学技术大学其他学者和学生们对伦塞勒多科性工学院的访问。

我借此机会，为加深我们之间的友谊、扩大卓有成效的学术交流致以最良好的祝愿。

W. Michael Lai

1984年7月5日

目 录

第一章 引言

- § 1—1 连续介质理论..... (1)
- § 1—2 连续介质力学的内容..... (2)

第二章 张量

- A 指标记法..... (4)
 - § 2A—1 求和约定, 哑指标..... (4)
 - § 2A—2 自由指标..... (6)
 - § 2A—3 克隆内克尔符号..... (8)
 - § 2A—4 置换符号..... (9)
 - § 2A—5 指标记法的变换..... (10)
 - 习题..... (11)
- B 张量..... (13)
 - § 2B—1 张量——一种线性变换..... (13)
 - § 2B—2 张量的分量..... (14)
 - § 2B—3 张量的加法..... (17)
 - § 2B—4 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的并矢乘积..... (18)
 - § 2B—5 两个张量的乘积*..... (19)
 - § 2B—6 单位张量..... (21)
 - § 2B—7 张量的转置..... (22)
 - § 2B—8 正交张量..... (22)
 - § 2B—9 矢量和张量的笛卡儿分量的变换法则..... (24)
 - § 2B—10 对称张量与反对称张量..... (31)

* 译者注: 严格说来, 张量的乘积一般有三种, 一是点积, 二是叉积, 三是并积。此处所谓乘积, 实际是指点积。

§ 2B—11 反对称张量的对偶矢量·····	(31)
§ 2B—12 张量 $\mathbf{T}$ 的特征值和特征矢量·····	(34)
§ 2B—13 实对称张量的主值和主方向·····	(38)
§ 2B—14 张量相对于主方向的矩阵·····	(39)
§ 2B—15 张量的标量不变量·····	(40)
§ 2B—16 标量的张量值函数·····	(42)
§ 2B—17 标量场, 标置函数的梯度·····	(44)
§ 2B—18 矢量场, 矢量场的梯度·····	(47)
§ 2B—19 二阶张量的“痕迹”·····	(49)
§ 2B—20 矢量场的散度和张量场的散度·····	(50)
§ 2B—21 矢量场的旋度·····	(51)
§ 2B—22 极坐标·····	(52)
习题·····	(56)

第三章 连续介质的运动学

§ 3—1 连续介质运动的描述·····	(65)
§ 3—2 物质描述和空间描述·····	(67)
§ 3—3 物质导数·····	(68)
§ 3—4 从给定的速度场求质点的加速度·····	(70)
§ 3—5 变形·····	(73)
§ 3—6 主应变·····	(82)
§ 3—7 膨胀率·····	(83)
§ 3—8 变形率·····	(83)
§ 3—9 质量守恒方程·····	(89)
§ 3—10 无限小应变分量的相容条件·····	(90)
§ 3—11 变形率分量的相容条件·····	(95)
习题·····	(95)

第四章 应力

§ 4—1 应力矢量·····	(105)
§ 4—2 应力张量·····	(106)
§ 4—3 应力张量的分量·····	(107)
§ 4—4 应力张量的对称性——动量矩原理·····	(107)
§ 4—5 主应力·····	(113)

§ 4—6 最大剪应力·····	(113)
§ 4—7 运动方程——线性动量原理·····	(118)
§ 4—8 应力张量的边界条件·····	(120)
习题·····	(121)

第五章 线性弹性固体

§ 5—1 力学性质·····	(126)
§ 5—2 线性弹性固体·····	(130)
§ 5—3 各向同性线弹性固体·····	(131)
§ 5—4 杨氏模量, 泊松比, 剪切模量及体积模量·····	(134)
§ 5—5 微小弹性变形理论的方程·····	(138)
§ 5—6 迭加原理·····	(141)
§ 5—7 弹性动力学的若干实例·····	(142)
A 平面无旋波动·····	(142)
B 平面等容波动·····	(145)
C 平面弹性波的反射·····	(151)
D 无限大平板的振动·····	(154)
§ 5—8 弹性静力学问题的若干实例·····	(157)
A 简单拉伸·····	(157)
B 圆柱体的扭转·····	(161)
C 非圆柱的扭转·····	(168)
D 梁的纯弯曲·····	(171)
E 平面应变·····	(176)
习题·····	(182)

第六章 牛顿粘性流体

§ 6—1 流体·····	(192)
§ 6—2 可压缩与不可压缩流体·····	(193)
§ 6—3 流体静力学方程·····	(194)
§ 6—4 牛顿流体·····	(197)
§ 6—5 λ 和 μ 的说明·····	(198)
§ 6—6 不可压缩牛顿流体·····	(199)
§ 6—7 边界条件·····	(203)
§ 6—8 流线、轨线, 定常、非定常、层流和湍流·····	(203)

§ 6—9 不可压缩牛顿流体的层流举例.....	(207)
A 平面Couette流动.....	(207)
B 平面Poiseuille流动.....	(207)
C Hagen—Poiseuille流动.....	(208)
D 不可压缩双层平面Couette流动.....	(211)
E Couette流动.....	(214)
F 靠近振动平板的流动	(215)
§ 6—10 对一个质点作的功率.....	(216)
§ 6—11 进入微元体的热流量.....	(219)
§ 6—12 能量方程.....	(220)
§ 6—13 旋度矢量.....	(223)
§ 6—14 无旋流动.....	(227)
§ 6—15 均匀密度的无粘性不可压缩流体的无旋流动.....	(228)
§ 6—16 作为纳维—司托克斯方程解的无旋流动.....	(232)
§ 6—17 具有恒值密度的不可压缩粘性流体的旋度输运方 程.....	(233)
§ 6—18 边界层概念.....	(237)
§ 6—19 可压缩牛顿流体.....	(238)
§ 6—20 用热焓表示的能量方程.....	(240)
§ 6—21 声波.....	(242)
§ 6—22 无粘性可压缩流体的无旋正压流动.....	(246)
§ 6—23 可压缩流体的一维流动.....	(250)
习题	(255)

第七章 一般原理的积分形式

§ 7—1 Green定理	(261)
§ 7—2 散度定理.....	(264)
§ 7—3 通过控制容积的积分和通过物质容积的积分.....	(267)
§ 7—4 质量守恒原理.....	(268)
§ 7—5 线动量原理.....	(272)
§ 7—6 关于运动控制容积.....	(278)
§ 7—7 动量矩原理.....	(281)
§ 7—8 能量守恒原理.....	(284)

习题	(287)
第八章 不可压缩简单流体	
§ 8—1 作为参考构型的现时构形	(293)
§ 8—2 相对变形张量	(294)
§ 8—3 变形张量随时间的历史, Rivlin-Ericksen 张量	(296)
§ 8—4 不可压缩简单流体	(301)
§ 8—5 Rivlin-Ericksen 流体	(302)
§ 8—6 不可压缩简单流体的测粘性流动	(307)
§ 8—7 不可压缩简单流体的测粘性流中的应力	(310)
§ 8—8 简单剪切流动	(312)
§ 8—9 渠道流动	(314)
习题	(315)
附录: 矩阵	(320)
习题答案	(325)

第一章 引 言

§ 1-1 连续介质理论

物质是由分子构成的，分子又是由原子和亚原子的粒子所构成。因此，物质并不是连续的。然而，在涉及物质性质的许多日常经验方面，例如一根钢杆在已知力作用下的伸长量，在给定水头下水管的流量，或物体在空气中运动时所受的阻力等等，都可以用一些不考虑物质的分子结构的理论来描述和预测。这种目的在于描述宏观现象间的关系而不考虑微观尺度上的物质结构的理论，称为连续介质理论。连续介质理论认为物质是无限可分的。因此，按照这种理论，就有这样的概念，即物质的一个无限小的体积，可以认为是连续介质中的一个质点；并且在每个质点的周围，总有物质存在。连续介质理论是否正确，要看给定的情况。举例来说，连续介质理论描述钢的性质，在许多情况下是适当的，但对于波长特别短的波在钢中的传播来说，连续介质理论就和实验观察到的结果不一致。另一方面，对于稀薄气体来说，在某些情况下，也可适当地作为连续介质来描述。但无论如何，根据一定体积内的分子数量去证明连续介质研究是否合理，则会导致误解。最终，在极限情况下的无限小体积根本不包含分子。同时，对于在连续介质理论中出现的量，也没有必要一定是指某种特定的统计平均值。事实上，我们已经知道，同一连续介质方程，可以由分子结构的各种假设和宏观参数的不同定义得出。当然，只要有可用的分子统计理论，确会加深对连续介质理论的理解的，这里要着重指出的只是：在给定情况下，连续介质理论是

否得以证实，不是一个学理探讨问题，而是一个实验检测问题。只要指出这样的事实就够了，即一百多年来的试验已经证实，在各种广泛的情况下，这样一种理论是正确的。

§ 1-2 连续介质力学的内容

连续介质力学研究物质在各种载荷情况下的响应。其主题可以分成两大部分：(1)对各种介质都共同的普遍原理；(2)确定理想化物质的本构方程。这些普遍原理，是我们对物质世界的经验中认为是不需证明的一些通则，如质量守恒，线性动量原理，动量矩原理，能量守恒，熵原理，电荷与磁通量守恒等等。为了本课题的初学者，本书讨论只需用前四种原理的情形。从数学上说，表示普遍原理有两种相当的形式：(1)积分形式，对于连续介质中物质的有限体积列出；(2)对于所研究的场中的每一点处，所列出的物质（质点）的微分体积的场方程。场方程常由积分形式导出。它们也可以直接由一个微分体积的隔离体导出。对于初学者来说，后者更适合一些。在本书中，两种方式都讲到了，积分形式在接近书末讲到。当在场中的场变量本身的变化需要知道，或需要用以求得所需资料时，场方程是很重要的。另一方面，各种守恒定律的积分形式则有助于求某些近似解。

连续介质力学的第二个主要部分，是关于“本构方程”，这些方程是用以确定理想化物质的。理想化物质代表自然界物质的力学特性的某些方面。例如，在一定限制条件下，载荷对很多物质引起的变形，当载荷除去时即行消失。这方面的物质特性，即表示为弹性体的本构方程。在更加限制的条件下，在一点处的应力状态，和从外力与内力都消失时的状态量得的长度变化以及在此点的单元段之间的交角变化，是成线性关系的。这种关系所指的，即线性弹性固体。另一个例子是由粘性的古典的定义所提供的，这种粘性的定义是基于如下的假设，即应力状态与长度和夹角的瞬变率成线性关系。这种本构方程所确定的物质，即线性