

0441.4

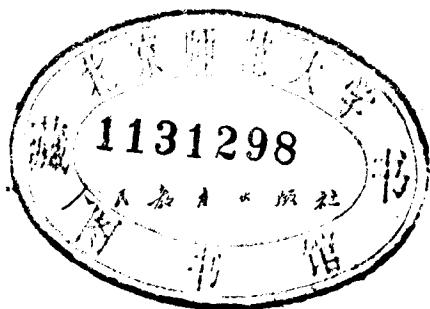
高等学校物理学小丛书

电磁场的基本物理量

E, D, B, H

杨诚明 编

741/185/08



本书是《物理学小丛书》的一册，是配合高等学校物理课教学而编写的参考读物。

书中第一部分通过对电场强度 E 和电感强度 D 的讨论，阐明静电场的性质。第二部分通过对磁感强度 B 和磁场强度 H 的讨论，阐明稳恒磁场的性质。第三部分着重分析了电磁场理论的建立过程，并说明了电磁波的一般性质。

本书主要供高等工科院校一、二年级学生作为普通物理课的课外读物，也可供教师或其他有关读者参考。

本书责任编辑：奚静平

高等学校物理学小丛书

电磁场的基本物理量 E 、 D 、 B 、 H

杨 诚 明 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 4.25 字数 100,000

1982年1月第1版 1983年8月第1次印刷

印数 00,001—11,800

书号 13012·0716 定价 0.38 元

前 言

这是为高等工科院校学生学习普通物理电磁学部分而编写的教学参考书。编写时注意了与普通物理的配合，学生在学习电磁学时可以对此书进行自学。

本书在静电场部分，从库仑定律出发推证真空中的高斯定理，然后根据电介质的极化现象推证有电介质时的高斯定理，从而说明了在引入电场强度 $\mathbf{E}$ 之后，再引入电感应强度 $\mathbf{D}$ 的必要性，以便对基本物理量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 建立正确的概念。

在稳恒电流的磁场部分，从毕奥-沙伐-拉普拉斯定律出发推证磁通量连续性原理以及真空中的安培环路定律，然后根据磁介质的磁化现象推证有磁介质时的安培环路定律，因此有关磁场的这些原理和定律就能够统一和连贯起来，从而也说明了在引入磁感应强度 $\mathbf{B}$ 之后，再引入磁场强度 $\mathbf{H}$ 的必要性，以便对基本物理量 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 建立正确的概念。讨论磁荷和磁标位的目的，是为了把磁铁和电流两者的磁现象统一起来，并由此进一步说明 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 的物理意义。

在电磁场部分，从稳恒电磁场的基本方程在不稳恒情况下必须加以修改和推广的观点，说明了麦克斯韦电磁场理论。由麦克斯韦方程的积分形式导出微分形式后，从平面电磁波的解，讨论了电磁波的一般性质，以加深对麦克斯韦电磁场理论的理解。

由于编者水平有限，本书的缺点和错误在所难免，诚恳地希望读者予以指正。

编 者

1980年2月

目 录

第一章 静电场	1
§ 1-1 电场强度.....	1
§ 1-2 电场力所作的功 电位和电位差.....	3
§ 1-3 真空中的高斯定理.....	16
§ 1-4 电介质的极化 电极化强度.....	23
§ 1-5 有电介质时的高斯定理 电感强度.....	31
第二章 稳恒电流的电场和磁场	48
§ 2-1 稳恒电流与电场.....	48
§ 2-2 磁感强度.....	55
§ 2-3 真空中的安培环路定律.....	61
§ 2-4 磁介质的磁化 磁化强度.....	70
§ 2-5 有磁介质时的安培环路定律 磁场强度.....	76
§ 2-6 假想磁荷 磁标位.....	87
第三章 电磁场	98
§ 3-1 稳恒电磁场的基本方程.....	98
§ 3-2 法拉第电磁感应定律 涡旋电场.....	100
§ 3-3 位移电流 全电流定律.....	104
§ 3-4 统一的电磁场方程.....	111
§ 3-5 电磁场的波动性和物质性.....	121

第一章 静 电 场

§ 1-1 电 场 强 度

我们知道,静止电荷周围空间里存在着的电场称为静电场.实验证明,把某一电荷放在静电场中时,这个电荷要受到电场力的作用.在研究电场的性质时,可以利用试验电荷.试验电荷是电量和线度都很小的电荷,也就是说试验电荷是电量很小的点电荷.当试验电荷引入给定电场时,试验电荷不仅在电场中占有确定的位置,而且还不致因它的引入而引起给定电场的变化,这样就可以根据试验电荷在电场中受力的情况,研究给定电场中每一点的性质.

设试验电荷 q_0 放在电场中某点时, q_0 所受的电场力为 F , 从实验上发现 F/q_0 和试验电荷 q_0 无关而仅仅与该点处电场性质有关,因此我们可以用 F/q_0 作为描述静电场中给定点客观性质的一个物理量,称为电场强度或简称场强.以符号 E 表示电场强度,则

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (1-1)$$

可以看出,试验电荷 q_0 的作用是用来测量电场中各点电场强度的,经过测量所得到的电场强度就可以直接用来表征电场的性质,而与试验电荷 q_0 不再有任何关系.然而我们为了对电场强度在数值和方向上有一个明确的概念,可在式(1-1)中,令 $q_0 = +1$ 单位,则得 $E = F$, 这就表示,电场中某点的电场强度不仅在数值上而且在方向上与单位正电荷在该点所受到的电场力相同.这一点对电场强度的计算是很方便的.

由上面的介绍，再根据确定真空中两个点电荷间作用力的库仑定律，我们便可以得到点电荷的电场强度表示式。设点电荷 q 在真空中产生电场，从电荷 q 指向电场中某一点的矢径为 $\mathbf{r}$ ，则试验电荷 q_0 在该点所受到的电场力应为

$$\mathbf{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \quad (1-2)$$

式中 $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} = 8.855 \times 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ ，称为真空的介电常数或电容率。由此，这一点的电场强度可表示为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \quad (1-3)$$

如果电场是由一系列点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 共同产生的，那么要计算电场中某一点 P 的总场强 $\mathbf{E}$ 时，就要利用电场强度的迭加原理。我们从式(1-3)中看到，电荷及其产生的电场强度间有线性关系，而且实验结果还表明，一个点电荷在电场中某点产生的电场强度与电场中是否有其它点电荷存在无关，这就是说，任何一个点电荷产生的电场具有独立性。由于这种独立性以及电荷与电场强度间的线性关系，所以多个点电荷在某一点的总电场强度应该是它们分别产生的电场强度的迭加。因为电场强度是矢量，所以这种迭加要用矢量加法。若 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ 为各点电荷分别在电场中某点 P 产生的电场强度，则在该点的总电场强度 $\mathbf{E}$ 应为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{r}_1 + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{r}_2 + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \mathbf{r}_n \end{aligned} \quad (1-4)$$

式中 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ 分别为电荷 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 到 P 点的矢径。

如果电荷 q 连续分布在带电体上，取电荷元 dq 到电场中某点 P 的矢径为 $\mathbf{r}$ ，则电荷 q 在 P 点产生的场强可表示为

$$\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \quad (1-5)$$

以上就是静电学中计算带电系统产生的电场强度的几个表示式。

为了能形象地表明电场中电场强度的分布情况，我们可以在电场中画出一系列曲线，使这些曲线每一点的切线方向都和该点的电场强度方向一致，这些曲线叫做电力线或 E 线。电力线不仅可以表示电场强度的方向，同时还可以表示电场强度的大小，为此我们对电力线的密度作如下规定：经过电场中任何一点，作一个面积元 dS 和该点处电场强度 E 的方向垂直，如果通过面积元 dS 的电力线数为 dN ，则我们可使

$$\frac{dN}{dS} = E \quad (1-6)$$

电力线密度 $\frac{dN}{dS}$ 就与该点处电场强度的大小联系起来了。

§ 1-2 电场力所作的功 电位和电位差

我们继续对电场强度进行讨论，希望了解静电场的重要性质。

电场力所作的功 从上面的介绍可以知道，当试验电荷 q_0 在电场中某点时，它所受到的电场力为

$$F = q_0 E \quad (1-7)$$

因此当 q_0 作很小的位移 dl 时，电场力所作的功

$$dA = q_0 E \cos \theta dl = q_0 E \cdot dl \quad (1-8)$$

式中 θ 为 F 及 dl 之间小于 π 的夹角。可见将单位正电荷作微小位移 dl 时，电场力所作功

$$dA = E \cdot dl$$

如果单位正电荷沿某一路径 l 移动，电场力所作的功

$$A = \int_l E \cdot dl \quad (1-9)$$

我们将此积分称为电场强度沿路径 l 的线积分。

一般说来, 电场力沿给定的路径 l 所作的功, 既可以和路径的起点和终点有关, 也可以和路径的形状有关。但是, 我们即将证明, 静电场具有一个很重要的特点, 就是静电场力沿某一路径所作的功只和这一路径的起点、终点位置有关而和路径的形状完全无关。具有这种特点的力场, 我们称为保守力场或有位场。

我们先研究一个点电荷 q 所产生的静电场。试验电荷 q_0 从场中给定点 a 经过任意路径 acb 到达 b 点(图 1-1)。在路径中任一点 c 附近, 取位移元 $d\mathbf{l}$, 在这位移元上 q_0 所受的电场力 $\mathbf{F}$ 可以看作恒量, 则电场力 $\mathbf{F}$ 在 $d\mathbf{l}$ 上所作的功为

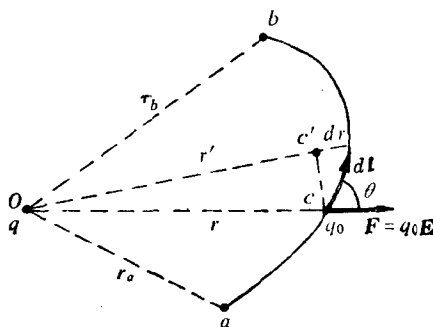


图 1-1 电场力作功的计算

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 E \cos \theta dl$$

设从点电荷 q 所在点 O 到 $d\mathbf{l}$ 两端的距离分别为 r 及 r' , 并从 c 作 cc' 垂直于 r' , 则由图可见 $dl \cos \theta = r' - r = dr$, dr 是 r' 和 r 之差。由此得

$$dA = q_0 E dr$$

q_0 在 $d\mathbf{l}$ 上所受力的大小可表示为

$$F = q_0 E = \frac{q_0 q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

因此

$$dA = q_0 E dr = \frac{q_0 q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr$$

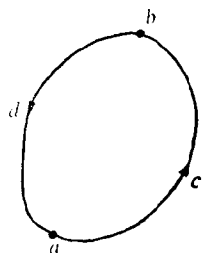
当电荷 q_0 从 a 点到 b 点时, 电场力作的功 A_{ab} 可由积分求得:

$$\begin{aligned} A_{ab} &= q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q_0 q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \end{aligned} \quad (1-10)$$

式中 r_a 与 r_b 分别为电荷 q 到试验电荷 q_0 沿路径移动时的起点和终点的距离。可见在电荷 q 产生的电场中, 电场力所作的功 A_{ab} 仅与试验电荷 q_0 的大小以及 q_0 的起点和终点位置有关, 而与路径的形状无关。

上述论断虽然由点电荷 q 产生的电场这一特殊情况得出, 但并不失去一般性。因为无论电荷以何种形式分布, 我们总可以把它分成许多具有点电荷性质的电荷元, 每个电荷元的静电场既然具有上述性质, 所以由这些电荷元的静电场迭加起来的总电场, 显然也具有这种性质。因而得到结论: 试验电荷在任何静电场中移动时, 电场力作的功仅与这试验电荷的大小以及路径的起点、终点位置有关而与路径的形状无关。

上面讲的静电场的性质, 还可以用另一种形式表示。现在让我们来研究试验电荷 q_0 在任何静电场中沿某一闭合路径 $acbda$ 移动一周时电场力作功的情形 (图



1-2)。因为 q_0 从 a 点经 acb 路径到 b 点时电场力所作的功等于 q_0 从 a 点经 adb 路径到 b 点时电场力所作的功, 所以应有

$$q_0 \int_{acb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_{adb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

但是

$$q_0 \int_{adb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q_0 \int_{bda} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

即 q_0 从 a 点经路径 adb 到 b 点时电场力所作功等于 q_0 从 b 点经路径 bda 到 a 点时电场力所作功的负值，因而试验电荷 q_0 从 a 点经 acb 到 b 点，再从 b 点经 bda 回到 a 点时，电场力所作总功应为

$$A = q_0 \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_{acb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + q_0 \int_{bda} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

这就是说，试验电荷在任何静电场中沿任一闭合路径 l 移动一周时，电场力作功为零。显然这个结果与前面讲的静电场力作功与路径形状无关的结论是完全等效的，只是表达的形式不同。

由于上式中 q_0 不为零，因此我们又可得到

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-11)$$

这个方程具有很重要的意义，它表明在静电场中电场强度 $\mathbf{E}$ 沿任一闭合路径的线积分等于零。因为 $\mathbf{E}$ 等于单位正电荷在电场中所受电场力，所以这个方程也可理解为单位正电荷在静电场中绕任一闭合路径一周时，电场力作的功等于零。由于电场强度 $\mathbf{E}$ 是表征电场性质的物理量，因此这个方程也就说明了静电场的这个重要性质。

应用上述方程，还可以说明静电场中的 $\mathbf{E}$ 线是有起点和终点的，绝不能形成闭合曲线。因为如果它形成闭合曲线，我们就可以沿这个闭合的 $\mathbf{E}$ 线来积分，由于在路径上 $\mathbf{E}$ 与 $d\mathbf{l}$ 到处有一致的方向，所以全部的 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0$ ，结果将有 $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0$ ，这显然是不正确的。

电位和电位差 方程(1-11)还使我们有可能去研究静电场的电位这个重要概念。我们定义：静电场中任何两点间的电位差等

于电场强度沿任一路径从第一点到第二点的线积分的负值，也就等于单位正电荷从第一点移动到第二点时静电力所作的功的负值。因而相距为 dl 的无限接近的两点间的电位差 dU 应为

$$dU = -dA = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-12)$$

距离非无限小的两点 P 和 P_0 间的电位差 $U - U_0$ 可由下列积分表示：

$$U - U_0 = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-13)$$

式中的积分可以沿着任一连接 P_0 点和 P 点的路径来计算。电位差的概念之所以能够有唯一确定的意义，只是由于电场强度的线积分和路径形状无关的性质，即静电场中电场力作的功与路径形状无关的性质。

现在我们要进一步确定电场中每点的电位。我们发现，依靠电场强度的线积分，即依靠功的量度只能定出电场中两点的电位差，而不能确定任一点电位的数值。只有先规定场中某一点电位的数值之后，才可以由式(1-13)唯一地确定场中其它各点电位的数值。当产生电场的电荷分布在有限空间时，通常我们选取无限远处各点的电位 U_∞ 等于零(在实用时往往选取地球的电位为零)。在这样的条件下，由式(1-13)可以得到电场中任一点 P 的电位

$$U = U_\infty - \int_\infty^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_\infty^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-14)$$

因此在静电场中，任一点 P 的电位等于电场强度沿任一路径从 P 点到无限远处的线积分，即等于单位正电荷从 P 点移到无限远处时静电力所作的功。

利用上面的概念，我们可以计算出在点电荷 q 的电场中，任意两点间的电位差。设点电荷 q 到 P 点和 P_0 点的距离分别为 r 及 r_0 ，按式(1-10)和式(1-13)，可得到 P 点和 P_0 点的电位差

$$U - U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad (1-15)$$

要确定 P 点的电位, 应满足条件 $U_\infty = 0$, 我们可取 P_0 在无限远处, 则 $r_0 = \infty, U_0 = U_\infty = 0$, 所以在点电荷 q 的电场中, 距离 q 为 r 处的电位为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1-16)$$

任何点电荷系 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 在某一点 P 产生的电位, 显然应等于每一点电荷在 P 点产生的电位的代数和:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (1-17)$$

式中 r_i 为 P 点到点电荷 q_i 的距离.

如果电荷 q 在带电体上是连续分布的, 可取电荷元 dq 到电场中某点 P 的距离为 r , 则电荷 q 在 P 点产生的电位可表示为

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1-18)$$

总之, 电位概念的引入, 完全是从方程(1-11)得到的, 即根据静电场中电场强度具有的性质得到的. 反之, 若方程(1-11)不成立, 那么我们是绝对不能引入电位这个概念的.

自然, 根据电位的概念, 也可以用等位面来形象地描绘电场. 这是我们已经熟悉的, 对它的讨论在此略去.

必须指出: 电场强度和电位的关系可以根据式(1-14)用积分形式表示, 也可以用微分形式表示. 下面我们来介绍这个问题. 我们从式(1-12)看到

$$dU = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

在直角坐标系中

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

所以

由此得到

$$F = ql \frac{\partial E}{\partial l} = p \frac{\partial E}{\partial l} \quad (1-23)$$

可见,作用在电偶极子上的合力 F 的大小,有赖于电场在电偶极子轴线方向的变化率.在均匀电场中,作用在电偶极子正电荷与负电荷上的力,大小相等而方向相反,此时 $\frac{\partial E}{\partial l} = 0, F = 0$.

电偶极子除受到合力 F 外,还受到力矩的作用.可以看出,对负电荷所在点的力矩

$$M = ql \times E' = p \times E'$$

在极限情形中,当 l 充分小时,可认为 E' 与 E 相同,则

$$M = p \times E \quad (1-24)$$

这个力矩将使电偶极子发生转动,电偶极子的电矩将转向外电场的方向,当电矩的方向与外电场方向完全一致时,力矩才等于零.

下面举几个已知电荷分布求电位分布和场强分布的例题.

例题 1 求均匀带电细棒中垂面上电位分布和场强分布.设棒长为 $2l$,带电总量为 q .

解 以细棒中点为原点,取坐标轴 z 沿细棒向上.

由于细棒有轴对称性,即在包含 z 轴的每一个平面内情况都相同,我们选图1-5中的纸面作代表,细棒的中垂面与纸面的交线是细棒的中垂线,设为坐标轴 x .

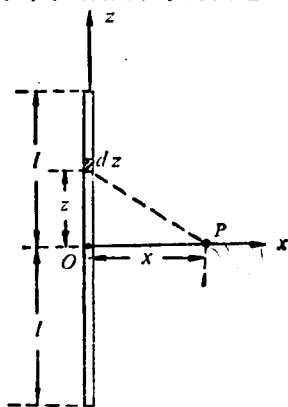


图 1-5 带电细棒

在细棒上取线元 dz ,由于细棒的电荷线密度 $\lambda = \frac{q}{2l}$,所以线电荷元为 λdz ,此电荷元在 x 轴上任一点 P 产生的电位为

点 P 产生的电位等于

$$U = q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \right)$$

式中 r_1 及 r_2 分别为两电荷 $-q$ 和 $+q$ 到 P 点的距离。若电偶极子轴线中心 O 点到 P 点的矢径为 r ，则因为 $r \gg l$ ，所以可令

$$r_1 r_2 = r^2, \quad r_1 - r_2 = l \cos \theta$$

式中 θ 为电偶极子的电矩方向与矢径 r 间的夹角(在 $l \ll r$ 时, r_1 和 r_2 分别与电矩方向夹角也可作为 θ)。因此电偶极子的电位可表为

$$U = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1-20)$$

利用公式(1-19)可求得电偶极子在 P 点产生的场强

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1-21)$$

在球坐标系 r, θ, φ (原点在偶极子上, 极轴与电矩 $\mathbf{p}$ 平行) 中, 场强 $\mathbf{E}$ 的分量等于

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\varphi = 0 \quad (1-22)$$

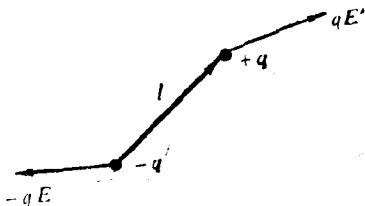
电偶极子在外电场中还要受到外电场的作用。如图 1-4 所示, 设 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E}'$ 是外电场分别在负电荷与正电荷所在点上的电场强度, 因此作用在电偶极子上的合力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}' - q\mathbf{E} = q(\mathbf{E}' - \mathbf{E})$$

图 1-4 外电场中的电偶极子

式中 $\mathbf{E}' - \mathbf{E}$ 是矢量 $\mathbf{E}$ 沿电偶极子轴线方向长为 l 的线段上的增量, 由于这一线段很小, 因此这一增量可表示为

$$\mathbf{E}' - \mathbf{E} = l \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}$$



由此得到

$$\mathbf{F} = q l \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} = \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} \quad (1-23)$$

可见,作用在电偶极子上的合力 $\mathbf{F}$ 的大小,有赖于电场在电偶极子轴线方向的变化率.在均匀电场中,作用在电偶极子正电荷与负电荷上的力,大小相等而方向相反,此时 $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} = 0, \mathbf{F} = 0$.

电偶极子除受到合力 $\mathbf{F}$ 外,还受到力矩的作用.可以看出,对负电荷所在点的力矩

$$\mathbf{M} = q \mathbf{l} \times \mathbf{E}' = \mathbf{p} \times \mathbf{E}'$$

在极限情形中,当 l 充分小时,可认为 $\mathbf{E}'$ 与 $\mathbf{E}$ 相同,则

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (1-24)$$

这个力矩将使电偶极子发生转动,电偶极子的电矩将转向外电场的方向,当电矩的方向与外电场方向完全一致时,力矩才等于零.

下面举几个已知电荷分布求电位分布和场强分布的例题.

例题 1 求均匀带电细棒中垂面上电位分布和场强分布.设棒长为 $2l$,带电总量为 q .

解 以细棒中点为原点,取坐标轴 z 沿细棒向上.

由于细棒有轴对称性,即在包含 z 轴的每一个平面内情况都相同,我们选图1-5中的纸面作代表.细棒的中垂面与纸面的交线是细棒的中垂线,设为坐标轴 x .

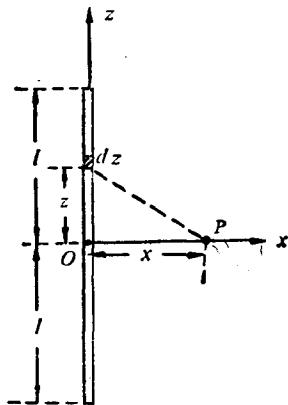


图 1-5 带电细棒

在细棒上取线元 dz , 由于细棒的电荷线密度 $\lambda = \frac{q}{2l}$, 所以线电荷元为 λdz , 此电荷元在 x 轴上任一点 P 产生的电位为

$$dU = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+z^2}}$$

式中 x 为 P 点到细棒的垂直距离。故整个带电细棒在 P 点产生的电位为

$$U = \int_{-l}^l \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x^2+l^2}+l}{\sqrt{x^2+l^2}-l} \quad (1-25)$$

由于 P 点对细棒是对称的, 所以在 P 点的场强只有 x 分量, 即在 P 点的场强

$$E = E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 x \sqrt{x^2+l^2}} \quad (1-26)$$

以上是本题要求的结果。

若保持细棒的线电荷密度 λ 不变, 而让 $l \rightarrow \infty$, 则细棒成为无限长, 此时从式(1-26)可得到在 P 点的场强

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \quad (1-27)$$

即在 P 点的场强与 P 点到细棒的垂直距离成反比。但从上述计算电位的公式(1-25)中可以看到, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, 在 P 点的电位 $U \rightarrow \infty$ 。可见这个计算电位的公式已不适用于无限长带电细棒的情况了, 需要从新确定计算电位的公式。我们不再选取无限远处电位为零, 而选取电场中某点处的电位为零。例如选取到棒的垂直距离为 x_0 处电位为零, 则与棒的垂直距离为 x 的 P 点处的电位为

$$U = -\int_{x_0}^x E dx = -\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x_0}{x} \quad (1-28)$$

例题 2 求均匀带电细圆环轴线上的电位分布和场强分布。设环的半径为 R , 环所带总电量为 q 。

解 如图 1-6 所示, 取细圆环的圆心为原点, 轴线为 z 轴。 P 为轴线上任一点, 其坐标为 z , 它到细圆环上某一线元 dl 的距离为

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

细圆环的电荷线密度 $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$, 线电荷元 λdl 在 P 点产生的电位为

$$dU = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

故整个带电细圆环在 P 点产生的电位为

$$U = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{dl}{r} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \quad (1-29)$$

由于对称性, 场强的方向是沿 z 轴方向, 故在 P 点的场强

$$E = E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\lambda z R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1-30)$$

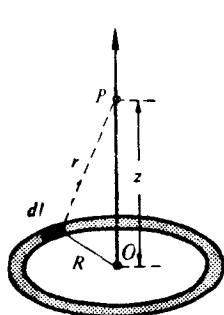


图 1-6 带电细圆环

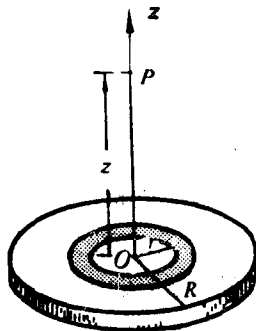


图 1-7 带电薄圆盘

例题 3 求均匀带电薄圆盘轴线上的电位分布和场强分布. 设圆盘的半径为 R , 所带总电量为 q .

解 如图 1-7 所示, 取圆盘中心为原点, 圆盘轴线为 z 轴, P 为轴线上任一点, 其坐标为 $(0, 0, z)$

利用例题 2 的结果, 可以把薄圆盘分成很多同心的细圆环. 设某一细圆环半径为 r , 则此细圆环在盘上的面积为 $2\pi r dr$, 由于薄圆盘电荷面密度 $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$, 所以细圆环所带电荷为