高等学校教学参考书

# 广义测量平差

崔希璋　於宗俦
陶本藻　刘大杰

测绘出版社

高等学校教学参考书

# 广义测量平差

崔希璋　於宗俦
陶本藻　刘大杰

测绘出版社

广义测量平差

崔希璋　於宗俦

陶本藻　刘大杰

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本　850×1168　1/32·印张 11 1/2·插页 2·字数 299 千字

1982 年 6 月第一版·1984 年 6 月第二次印刷

印数 6.501—12.000 册·定价 1.45 元

统一书号：15039·新 209

# 前　言

随着近代统计估计理论、矩阵代数和大型快速数字电子计算机的发展，同时也由于物理大地测量、测绘空间技术和地球动力学等领域对数据处理的需要，测量平差的方法和理论有了很大的发展。

自十九世纪初高斯（Gauss）和勒让德尔（Legendre）创立最小二乘法以来，在测量平差计算中，主要是根据一组独立观测值来求未知参数的最佳估值。本世纪四十年代，钦斯特拉（Tienstra）提出了相关平差理论，使得具有相关性的观测值也能直接参与平差，但它仍然属于经典的最小二乘平差的范畴。经典的最小二乘平差的基本方法主要是间接平差法和条件平差法，混合平差可以说是基本平差方法的概括，它也为解决各种平差方法的分区和拼接问题提供了理论根据。

近代的测量平差方法包括滤波和最小二乘配置等方法。滤波本来是应用于通讯和自动控制等领域中的数据处理方法，六十年代初，测绘界开始注意运用滤波方法。在物理大地测量中，运用滤波方法导出了最小二乘推估法，用来解决重力异常和垂线偏差的内插计算问题。七十年代初，克拉鲁普(Krarup)和莫里兹(Moritz)等又提出了最小二乘配置法，用来解决物理大地测量上的数据处理问题。

近代的滤波和配置等平差方法，虽然与经典的最小二乘平差法有所区别，但都是由带有正态随机误差的观测值根据统计估计理论来求定参数的最佳估值的方法；同时，经典的最小二乘平差法已不再局限于用某种基本平差方法对独立观测值进行平差。因此，我们将经典的平差方法（包括相关平差、混合平差）和近代平差方法统称为广义测量平差法。

编写本书的目的在于对经典的和近代的平差方法和理论作一

总结。编写时力求以现代统计估计理论为基础，并以测绘工作者较熟悉的方法阐述各种平差方法的原理、它们的内在联系以及平差结果的最优性质。全书分为六章。第一章介绍概率论基本知识；第二章叙述各种参数定值估计方法和广义测量平差原理；第三章简述经典的独立观测值的基本平差方法，并导出混合平差法；第四章叙述点联系数平差法和三角网按方向的混合平差法；第五章讨论相关观测值的平差方法；第六章介绍近代平差方法，包括滤波、推估、配置和卡尔曼滤波。

为了便于测绘工作者理解和掌握近代平差方法和理论，我们在第二章中着重讨论了各种参数定值估计方法相互之间的联系，从而归纳出广义最小二乘原理；在第六章中从不同的途径导出滤波和配置的计算公式，并从静态逐次滤波导出卡尔曼滤波的递推公式。

当前，国内外都很重视近代平差方法的理论及其应用的研究，许多学者正在从理论上和实用上对现有的方法进行更深入的探讨或提出新的方法，这也是值得广大测绘工作者今后进一步研究的重要课题。

**编著者　1980 年 8 月**

# 目　录

# 第一章　概率基本知识

## §1-1　随机事件和概率的基本运算

人们在实践中早就有了这样的感性认识，某一事件可能发生，也可能不发生。这样的可能发生也可能不发生的事件，在概率论里称为“随机事件”，或简称为“事件”。例如，射击时可能命中靶心，也可能不命中靶心，那么，射击一次的结果，“恰好命中靶心”就是一个随机事件。此外，象抛硬币一次，“恰好出现正面向上”(或出现“反面”向上)；对某个量观测一次时，“恰好出现正误差”(或出现负误差)等等，也都是随机事件。而射击一次，抛硬币一次，对某个量观测一次等等，则统称为一次实验。

在一定条件下，进行一次独立的实验，它可能出现各种不同的结果，即出现不同的随机事件，记这些事件为$A$、$B$、……，有时也可记为$A_1$、$A_2$、……或$B_1$、$B_2$、……等等。抛硬币一次，它可能出现“正面向上”或“反面向上”这两种事件，我们可记为$A$、$B$；又例如，在装有两个黑球、三个白球和五个红球的口袋中任意取出一球，它可能出现取出的球“恰好是黑球”、“恰好是白球”、“恰好是红球”这三种事件，我们可记它为$A_1$、$A_2$ $A_3$。

如果在相同条件下，对同一实验重复进行$n$次，若事件$A$出现的次数是$m$次，$m$与总实验次数$n$的比值$\frac{m}{n}$称为在$n$次实验中事件$A$出现的频率。随着实验次数$n$的增加，$\frac{m}{n}$将逐渐稳定于某一常数，所稳定到的这一常数就叫做理论频率。我们把这个理论频率称为在已知条件下事件$A$出现的概率，并记为$P(A)$。

例如，抛硬币一次，它要么出现正面，要么出现反面，但多次重复实验，则出现正面和出现反面的频率将随着抛掷次数的增加而稳定到$\frac{1}{2}$。因此“出现正面”这一事件$A$和“出现反面”这一事件$B$的概率均为$\frac{1}{2}$。又例如，在上述口袋中任意取出一球，所取出的球要么是黑球，要么是白球，要么是红球。如果重复进行实验，则随着实验次数的增加，取出这三种球的频率将逐渐分别稳定到$\frac{2}{10}$、$\frac{3}{10}$和$\frac{5}{10}$。因此取出黑球的概率为$\frac{2}{10}$，取出白球的概率为$\frac{3}{10}$，取出红球的概率为$\frac{5}{10}$。由此可见，概率总是描述随机事件的集体规律性的，而不是反映个别实验的结果。

显然，当$n$次实验中，若事件$A$总是出现，此时$m=n$，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=1, \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

即在实验中一定发生的事件，其概率为1。这种事件就叫做“必然事件”。

当$n$次实验中，若事件$A$总是不出现，此时$m=0$，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=0, \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

即在实验中不会出现的事件，其概率为0。这种事件就叫做“不可能事件”。

当$n$次实验中，若事件$A$有时出现，有时不出现，此时$m<n$。可见，任何事件$A$的概率$P(A)$都应满足不等式

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1。 \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

即任一事件$A$的概率$P(A)$总是介于0与1之间的某一个真分数。不难理解，概率愈大，就表示事件$A$出现的可能性愈大，概率

愈小，则表示事件$A$出现的可能性愈小。当$P(A)$虽不等于1，但非常接近于1时，则称它为实际上的必然事件，反之，概率接近于0的事件，就称为小概率事件，或称为实际上不可能事件。

在实际问题中，需要根据一些简单事件的概率来计算某些综合（复杂）事件的概率，下面将给出几个有关概率运算的常用公式。在给出这些公式之前，先阐述几个辅助概念。

1）完全事件组。若实验的结果必然要在某些事件中出现一件，这些事件的总体便称为一个完全事件组。例如：抛一硬币出现正面和出现反面是一个完全事件组，因为除了这两种结果（事件），再不会有第三种结果；同样地，射击两次至少有一次中靶和一次也不中靶；一个观测误差为正误差和负误差等等，也都是完全事件组。

2）互斥事件。在一次实验中，出现了其中任一事件，其他事件就不可能同时出现，则称这些事件为互斥事件。例如，抛一硬币出现正面和出现反面是互斥事件，因为在一次实验中，出现了正面，就不可能同时出现反面，反之亦然。又如射击两次，恰好中靶一次和恰好中靶两次；从上述口袋中任取一球，取出的球为黑球和白球等等，也都是互斥事件。

3）事件和。如果事件$C$是由事件$A$或事件$B$实现的，或者是由两者同时实现所组成的综合事件，则称$C$为事件$A$与事件$B$之和，记为$A+B$。特别是当$A$和$B$为互斥事件时，则事件$C$就是事件$A$出现或事件$B$出现的综合事件。例如，从上述口袋中任取一球，则事件$C_1=A_1+A_2$就是“取出的球恰好是黑球或白球”的事件。同样，事件$C_2=A_2+A_3$则是“取出的球恰好是白球或红球”的事件。

4）逆事件。若事件$A+B$为必然事件，且$A$与$B$为互斥事件，即在一次实验中，$A$出现了，$B$就不出现，但其中必出现一个，则称$A$和$B$为互逆事件。一般记$\overline{A}$为$A$的逆事件。例如：抛

一硬币不是出现正面（事件$A$），就是出现反面（事件$B$），且$A$、$B$事件为互斥事件，因此，$A$、$B$互为逆事件；从上述口袋中任取一球，事件$A_1$和事件$A_2+A_3$为互逆事件，即“取出黑球”和“取出白球或红球”的事件为互逆事件。

5） 事件积。如果事件$C$是由事件$A$与$B$同时实现所组成的综合事件，则称事件$C$为事件$A$与$B$之积，记为$AB$。例如，设以$A$表示第一次射中靶心的事件，$B$表示第二次射中靶心的事件，则事件$C=AB$是表示“两次射击都射中靶心”的事件。又如，在甲口袋中装有两个黑球和一个白球，在乙口袋中装有四个黑球和三个白球，现从甲、乙口袋中各取一球，若以$A_1$、$B_1$和$A_2$、$B_2$分别表示从甲、乙口袋中取出黑球和白球的事件，则事件$C_1=A_1B_2$是表示“取出的都是黑球”的事件。同样，事件$C_2=A_2\cdot B_1$是表示“从甲口袋中取出的是白球，乙口袋中取出的是黑球”的事件，余此类推。

6） 独立事件与相关事件。如果事件$A$的出现不影响事件$B$的出现，则称事件$A$与$B$相互独立。例如，上面讲的第一次射击是否射中靶心并不影响第二次是否射中靶心。同样，从甲口袋中取出什么颜色的球并不影响从乙口袋中取出什么颜色的球。因此，这些都是互为独立事件。

反之，如果事件$A$的概率是随事件$B$的是否出现而改变，则称事件$A$与$B$互为相关事件。例如现在只从上述甲口袋中由两人从中各取一球，若以$B$表示第一人取出的为黑球，$A$表示第二人取出的也为黑球，如果没有事件$B$，事件$A$的概率等于2/3，如果已知事件$B$发生，则事件$A$的概率等于1/2，因而$A$与$B$相关。

在事件$B$已经发生的条件下计算事件$A$的概率，这一概率就称为事件$A$的条件概率，记为$P(A|B)$。对于上述例子

$$P(A)=\frac{2}{3},\qquad P(A|B)=\frac{1}{2}。$$

可见，若

$$P(A)=P(A|B)\quad(\text{或}P(B)=P(B|A)),\qquad(1\text{-}1\text{-}4)$$

则表示$A$与$B$独立。若

$$P(A)\neq P(A|B)\quad(\text{或}P(B)\neq P(B|A)\qquad(1\text{-}1\text{-}5)$$

则表示$A$与$B$相关。

现在我们给出几个常用的概率运算公式。

1. 概率加法定理。若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互斥，并设事件$A$为各事件之和，即设

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n,\qquad(1\text{-}1\text{-}6)$$

若事件$A_i(i=1, 2, \cdots, n)$中的任一事件出现就算是事件$A$出现，则

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)。\qquad(1\text{-}1\text{-}7)$$

即事件和的概率等于各事件概率之和。

当上述$n$个互斥事件构成一个完全事件组时，换句话说，实验的结果必然出现其中之一，再不可能出现其他结果，显然，此时事件$A$就成为必然事件。因此

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1,\qquad(1\text{-}1\text{-}8)$$

顾及（1-1-6）式，上式也可写成

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1。\qquad(1\text{-}1\text{-}9)$$

特别需要指出的是，当$A$、$B$为互逆事件时（记$B=\overline{A}$），既然在实验中不是出现事件$A$，就是出现$\overline{A}$，因此，$A$与$\overline{A}$构成一个完全事件组，由（1-1-9）式可以写出

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1,\qquad(1\text{-}1\text{-}10)$$

由此得

$$P(A)=1-P(\overline{A})。\qquad(1\text{-}1\text{-}11)$$

在实际计算中，如果计算$P(\overline{A})$比计算$P(A)$方便，则可先求出$P(\overline{A})$，然后由（1-1-11）式计算$P(A)$。

2. 概率乘法定理。两事件$A$与$B$同时出现的概率等于其中一个事件的概率和另一事件对前一事件的条件概率的乘积。即

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)。\quad (1\text{-}1\text{-}12)$$

由上式可以写出

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad (1\text{-}1\text{-}13)$$

及

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}。\quad (1\text{-}1\text{-}14)$$

当已知事件积的概率以及某一事件的无条件概率时，则可通过上式求出另一事件对前一事件的条件概率。

若$A$、$B$互相独立时，顾及（1-1-4）式，则（1-1-12）式可以写成

$$P(AB)=P(A)P(B)。\quad (1\text{-}1\text{-}15)$$

推广之，如有$n$个独立事件$A_1$、$A_2\cdots A_n$，则其事件积的概率

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)。\quad (1\text{-}1\text{-}16)$$

即独立事件$A_1$，$A_2$，$\cdots A_n$在一次实验中同时出现的概率$P(A_1A_2\cdots A_n)$等于各事件概率之积。

3．全概率公式。

若事件$A_1$，$A_2$，$\cdots A_n$为两两互斥事件，设事件$B$能而且只能与这些互斥事件$A_i$（$i=1$，2，$\cdots$，$n$）中的一个事件同时发生，换句话说，就是假设事件$B$是这样的一个事件，即

$$B=A_1B+A_2B+\cdots+A_nB,\quad (1\text{-}1\text{-}17)$$

由于事件$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$是两两互斥事件，所以$A_1B$，$A_2B$，$\cdots$，$A_nB$也是两两互斥的事件，于是由概率的加法定理可以写出

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)=\sum_1^n P(A_iB)。\quad (1\text{-}1\text{-}18)$$

上式中$A_iB$是表示事件$A_i$与事件$B$同时发生的事件，根据概率的乘法定理可以写出

$$P(A_iB)=P(A_i)P(B|A_i),$$

因此（1-1-18）式可以写成

$$P(B)=\sum_{1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)。\tag{1-1-19}$$

上式称为全概率公式

4. 贝叶斯公式

设事件$B$能而且只能与两两互斥事件$A_1$、$A_2$、…、$A_n$中的任一事件同时发生，即事件$B$仍是（1-1-17）式中所表达的事件。

根据乘法定理（1-1-13）及（1-1-14）式可以写出

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}$$

及
$$P(B|A_i)=\frac{P(A_iB)}{P(A_i)},$$

即
$$P(A_iB)=P(B)P(A_i|B)=P(A_i)P(B|A_i),$$

故得

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)},\quad (i=1,2,\cdots,n)\tag{1-1-20}$$

将全概率公式（1-1-19）式代入，则得

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}。\quad (i=1,2,\cdots,n)\tag{1-1-21}$$

上式称为贝叶斯公式。它是用来计算在事件$B$已发生的条件下事件$A_i(i=1,2,\cdots,n)$发生的概率。

## §1-2　随机变量及其分布

上一节中谈到了三种事件，即必然事件、不可能事件和随机事件。概率论的研究对象就是大量随机事件的客观的集体规律性。

我们知道，当进行某项实验时，由于受到种种偶然因素的影响，将导致该项实验得到不同的结果。换句话说，该项实验的结果将通过各种随机事件的形式表现出来。譬如说，进行一次“抛掷三个硬币出现正面的个数”的实验，实验的结果将出现下述四种情况之一，也就是出现下述四个随机事件之一：（1）三个都不是正面；（2）一个正面；（3）两个正面；（4）三个都是正面。如果我们用大写字母$X$表示这一试验中硬币出现正面的个数，而以小写字母$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$分别表示上述四种情况中正面出现的个数，则可写出

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=2,\quad x_4=3。$$

在这里我们把$X$看成一个变量，而$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$则是该变量可能取得的数值大小。显然，在进行实验之前，我们不可能确切地预知这个变量究竟取得这四个数值中的哪一个数值。对于这种在一个试验结果中可能取这个或那个数值，但不可能预先知道取什么值的变量，就称为随机变量。类似于这样的随机变量的例子还可以举出很多，例如：

（1）发射5发子弹命中目标的次数（可能值为0,1,2,3,4,5）；

（2）在空战中击落敌机的架数（可能值为0，1，2，…，$N$）；

（3）试验100粒麦种的发芽率，发芽麦种的粒数（可能值为0，1，2，…，100）。

在上述各例中，随机变量的一切可能值都是可以预先一一排列出来的有限个数值。例如有的是0、1、2、…、5，有的是0、1、2、…、$N$，等等，这种随机变量称为离散型随机变量。除了离散型随机变量之外，还有一种非离散型随机变量。例如：

（1）射击命中点的横（纵）坐标；

（2）命中点到靶中心的距离；

（3）三角形闭合差的数值；

（4）观测误差的数值。

以上这些例子中的点的横(纵)坐标、离靶心的距离、闭合差的数值……等等，它们的可能值都是不能预先一一排列出来的，而是连续地充满着某一个区间($a$，$b$)($a$可以是$-\infty$，$b$可以是$+\infty$)，所以非离散型的随机变量也称为连续型随机变量。

因为随机事件总是和一定的概率相联系的，所以随机变量的取值也总是和一定的概率相联系的。也就是说，一个随机变量是以不同的概率取得不同的数值。现以取可能值$x_1$，$x_2$，…，$x_n$的离散型随机变量$X$为例，在一次试验中，变量$X$将以某种概率来取得这些值中的一个，而且当取得其中的某一个值时，就不会同时取得其他值。因此，这是一个互斥的完全事件组。若以

$$P(X=x_1)=p_1,\ P(X=x_2)=p_2,\ \cdots,\ P(X=x_n)=p_n \tag{1-2-1}$$

分别表示当$X$取$x_i$($i=1$，2，…，$n$)时的概率，则有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1。 \tag{1-2-2}$$

即随机变量取所有可能值的概率之和等于1。这些概率以不同的大小分布在不同的数值上。从概率的观点来看，如果我们给定了这个分布，更确切地说，也就是给出了每一事件($X=x_i$)发生的概率，那么随机变量就完全被描述出来了。因此，我们要了解一个随机变量的变化规律，除了要知道它可能取得哪些值之外，还必须知道取得各个值时的概率大小。

确定随机变量的可能值与该可能值所对应的概率之间的任一种对应关系，就称为随机变量的概率分布规律，或简称为概率分布。

一般而言，如果已知某随机变量$X$所可能取的值为$x_1$、$x_2$、…、$x_n$，其相应的概率为$p_1$、$p_2$、…、$p_n$，我们就可以作出如下表格：