

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B=0 \Rightarrow A=0)$$

$$R = t(R) \Leftrightarrow R^2 \subset R$$

《离散数学导论》

习题选解

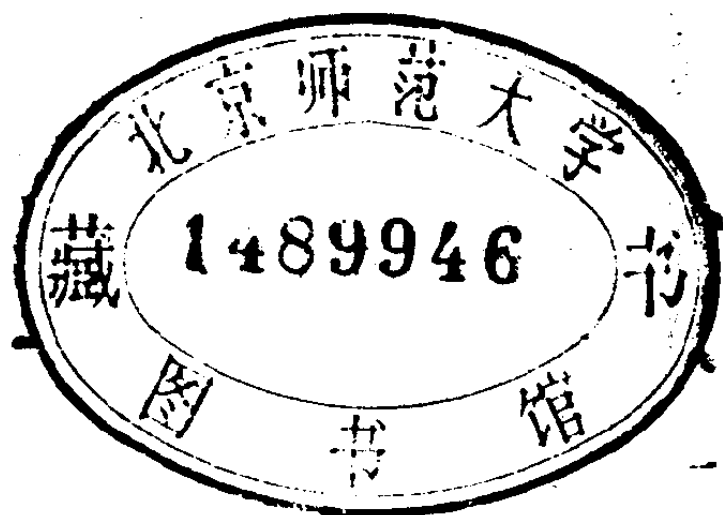
黄和之 编著



《离散数学导论》习题选解

黄和之 编著

511/217/07



北京经济学院出版社

1988年·北京

《离散数学导论》习题选解

黄 和 之 编著

北京经济学院出版社出版

(北京市朝阳区红庙)

北京经济学院出版社永乐印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 32开 10.625印张 238千字

1988年11月第1版 1988年11月第1版第1次印刷

印数: 00 001—10 100

ISBN7—5638—0024—7/O·1

定价: 3.50元

7/1/217/07

前 言

近几年来, 计算机科学工作者和工程技术人员中自学离散数学的人数逐渐增多。第一次接触这门学科的人, 独立完成全部作业有一定困难, 对某些难题或技巧性较高的题, 花费时间过多, 对业余学习也是不利的。我们编写的这本习题选解, 所选习题都取自《离散数学导论》。该书每一章节都配有习题, 门类比较齐全, 后面章节的习题有的与前面的内容相呼应, 便于复习和巩固已学过的知识。

对使用本书的读者, 我们提出以下的忠告: 学习必须依靠自己刻苦努力, 应该独立思考, 独立完成作业。这不但是掌握基本概念, 巩固已学知识的重要手段, 而且, 由于不受别人思路影响, 有时能得出巧妙的构思与简易的解法, 使所学知识融汇贯通, 收到事半功倍的效果。因此, 希望读者学习《离散数学导论》与本《习题选解》时, 在自己动手做题的基础上, 再与本书解答相比较。如果自己的想法与“解答”一致, 说明思路基本正确, 此时需要用明确的语言按逻辑层次将解题过程表述出来。反之, 如果自己的思路与“解答”存在距离, 这就需要分析思路遇到什么阻碍; 方法、步骤上有什么缺失, 或许通过分析会使你豁然开朗, 感到每做一个题均有所得。经常在解题中总结得与失, 就能够逐步地正确进行推理、判断, 提高逻辑思维能力, 并获得解题的技能与技巧。这样, 本习题选解也才可以认为发挥了它应有的作用。

书中的十二、十三章的习题解答，主要由邹德林同志完成，特此致谢。

编者 1987年8月

内 容 简 介

本书所列习题选自《离散数学导论》一书。全部 457 个习题(计上小题共600余个),均经过精心挑选,内容丰富全面,解题方法简明扼要,思路清晰。适合作计算机、信息管理等专业以及电视大学有关专业“离散数学”课程的教学参考书,也是自修《离散数学》的重要参考材料。

所选习题由浅入深。难度较低的只列出答案;中等难度的给出提示;难度较大的列出详细的解题步骤与题解。书中对某些繁难问题,用新颖的解题方法做了简明处理。数理逻辑中的快速证明,图论中的折边破回路法等均有其独到之处。这些方法对初学者是十分有益的。

目 录

第一章 命题逻辑	(1)
§ 1.1 命题.....	(1)
§ 1.2 逻辑联结词.....	(2)
§ 1.3 真值表.....	(3)
§ 1.4 逻辑恒等式.....	(3)
§ 1.5 逻辑蕴涵式.....	(4)
§ 1.6 范式.....	(6)
§ 1.7 推理规则和推理格式.....	(9)
§ 1.8 证明方法.....	(13)
第二章 逻辑蕴涵式的快速证明	(15)
§ 2.1 引言.....	(15)
§ 2.2 快速证明的理论和方法.....	(18)
§ 2.3 快速证明的作用.....	(20)
§ 2.4 构造永真式.....	(23)
§ 2.5 关于命题演算的机器证明.....	(25)
第三章 谓词逻辑初步	(29)
§ 3.1 谓词与量词.....	(29)
§ 3.2 量词与逻辑运算符.....	(30)
§ 3.3 推理规则与推理格式.....	(38)
§ 3.4 证明方法.....	(40)
§ 3.5 判定谓词公式非普遍有 效的简易方法.....	(42)

第四章 集合	(46)
§ 4.1 集合的朴素定义	(46)
§ 4.2 集合论的悖论	(47)
§ 4.3 集合间的关系	(47)
§ 4.4 集合上的运算	(49)
§ 4.5 自然数	(54)
§ 4.6 数学归纳法	(56)
§ 4.7 递归定义和递推关系	(63)
§ 4.8 Σ^* 上的集合运算	(71)
第五章 二元关系	(78)
§ 5.1 二元关系和有向图	(78)
§ 5.2 具有特殊性质的二元关系	(84)
§ 5.3 关系的复合	(89)
§ 5.4 关系上的闭包运算	(92)
§ 5.5 序关系	(102)
§ 5.6 等价关系与划分	(115)
§ 5.7 相容关系	(127)
第六章 函数	(129)
§ 6.1 函数的基本性质	(129)
§ 6.2 几种特殊类型的函数	(132)
§ 6.3 利用函数概念研究集合	(142)
第七章 无限集合	(149)
§ 7.1 有限集合与无限集合	(149)
§ 7.2 可数集合与不可数集合	(151)
§ 7.3 基数的比较	(159)
§ 7.4 基数算术	(165)

第八章 代数系统	(169)
§ 8.1 代数结构和代数系统	(169)
§ 8.2 一些代数系统	(169)
§ 8.3 同构与同态	(172)
§ 8.4 同余关系	(178)
§ 8.5 用原有代数系统生成新的代数系统	(180)
第九章 半群和群	(190)
§ 9.1 半群和有么半群	(190)
§ 9.2 半群的同态	(194)
§ 9.3 群和子群	(198)
§ 9.4 循环群、阿贝尔群	(203)
§ 9.5 群子集乘积、陪集、子群的阶	(208)
§ 9.6 置换群	(212)
§ 9.7 群的同态与同构	(216)
§ 9.8 正规子群与商群	(221)
第十章 格和布尔代数	(228)
§ 10.1 格的定义和性质	(228)
§ 10.2 子格, 格的同态	(231)
§ 10.3 一些特殊的格	(233)
§ 10.4 布尔代数的定义和性质	(234)
§ 10.5 布尔代数的子代数和直接积	(238)
§ 10.6 布尔代数的同态	(240)
§ 10.7 布尔表达式和布尔函数	(243)
第十一章 环和有限域	(250)
§ 11.1 环和子环, 环的同态	(250)
§ 11.2 理想和商环	(256)

§ 11.3	域	(265)
§ 11.4	环和域上的多项式	(268)
§ 11.5	域上的多项式理想	(273)
§ 11.6	子域和扩域	(278)
§ 11.7	伽罗华域	(284)
§ 11.8	在 $\mathbb{Z}_p$ 域上构造 m 次不可约多项式	(295)
§ 11.9	本原多项式	(299)
第十二章	图及其表示法	(303)
§ 12.1	图的实例	(303)
§ 12.2	图的概念和术语	(304)
§ 12.3	路、可达性与连通性	(306)
§ 12.4	有向图的矩阵表示	(309)
§ 12.5	图的同构	(310)
§ 12.6	欧拉回路和欧拉路	(312)
§ 12.7	二分图	(314)
第十三章	树	(318)
§ 13.1	有向树及其性质	(318)
§ 13.2	搜索树和树的遍历算法	(320)
§ 13.3	无向树	(322)
符号表		(326)

第一章 命题逻辑

习题 §1.1 命题

1(11.1) 下列语句哪些是命题？哪些不是？若不是命题，说明理由。

(i) 看球赛去！~~×~~

(ii) 鸡有三只脚。✓

(iii) 天下之中央，在燕之北与越之南。✓

(iv) 所有哺乳动物都是脊椎动物。✓

(v) 考试是为了学习，学习不是为了考试。✓

解 (i) 不是，因不是陈述句，其余都是。

注 (ii)(iii) 是《庄子·天下篇》中所载惠施等辩者提出的命题。

2(1.1.3) 确定下列命题的真假。

(iv) 李善兰是清代的数学家或宋代的词人。✓

(v) 孟轲喜欢吃鱼，也喜欢吃熊掌。✓

(vi) 白马非马。~~×~~

解 (iv) 这是由“或”联结的两个肢命题：“李善兰是清代数学家”，“李善兰是宋代女词人”，前一肢命题为真，按逻辑联结词规定，这是真的复合命题。

(v) 《孟子》中有“鱼我所欲也，熊掌亦我所欲也”。故此命题为真（有文献根据）。是由“且”联结起来的复合命题。

(vi) 这是战国时公孙龙提出的著名命题，是假的命题（参看正文表1.7.1后例a）。

习 题 § 1.2 逻辑联结词

3(1.2.1) 研究下列语句，在自然语言中是否有意义？在逻辑中是真或假？

(i) 如果今天是星期一，则明天是星期六。

(ii) 如果今天是一号，则昨天是二十九号。

(iii) $2 + 2 = 5$

(iv) $2 + 2 = 5$ ，则雪是黑的。

(v) 不能入地且不能上天。

(vi) 诗中有画且画中有诗。

解 (a) 在自然语言中无意义，在逻辑中可能是真的，有：

(i) 在不是星期一的一天说这话，逻辑上是真的。

(ii) 在不是一号的一天说这话是真的，在公元纪年数字能被4整除但不能被100整除及是400的倍数的年份的三月一号，说这话是真的（注 只考虑阳历，不考虑阴历）。

(iv) 因前件假，整个蕴涵式真。

(b) 在自然语言中有意义，但在逻辑中为假，有：

(v) 在逻辑中应把有人乘航天飞机等作为上天。

(vi) 自然语言中是指意境，是有意义的。逻辑上的“中”，应指形式上的中，诗中有画为假。

(c) (iii) 在自然语言中无意义，在逻辑中也是假的。

4(1.2.2) 将下列语句符号化

(i) 李宁或楼云将被评为优秀运动员。

(ii) 明天上午十点正，我在天安门广场或者美术馆。

(iv) 并非所有整数都是正数。

(vi) 要使 $x^2 > 0$ 就要 $x \neq 0$ ，反之亦然。

解 (i) $P \vee Q$

(ii) $P \nabla Q$ 因两处相距较远，不可能同时在两处。

(iV) $\neg P$ P 表示“所有整数都是正数”

(Vi) $F \leftrightarrow Q$

5(1.2.4) P 表示“正在下雪”， Q 表示“我将进城”， R 表示“我有空闲时间”。

(a) 把语句符号化

(i) $\neg P \wedge R \rightarrow Q$

(ii) $Q \rightarrow R$ 即有空是进城的必要条件

(b) 用自然语言写出下列命题公式

(iii) $(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$ 等价于 $Q \leftrightarrow R$

有空是我进城的充分必要条件。(我进城当且仅当我有空。)

(iv) $\neg(R \vee Q)$ 等价于 $\neg R \wedge \neg Q$

我没有空也不进城。

习题 §1.3 真值表

6(1.3.1) 答案 $\wedge, \vee$ 可交换, $\rightarrow$ 不可交换。

7(1.3.2) 答案 $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ 可结合, $\rightarrow$ 不可结合。

8(1.3.3) (a) $4 \mid x$ 且 $2 \mid x$ 只是 $8 \mid x$ 的必要条件。

习题 §1.4 逻辑恒等式

9(1.4.2) 简化下列命题公式

(a) $[(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)] \wedge C$

(c) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$

(d) $[(A \rightarrow B) \wedge B \wedge C] \vee C$

答案 (a) C (c) $B \wedge C$ (d) C

10(1.4) 3(c) 将 $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 用 $\wedge$ 和 $\neg$ 表出

解 $P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P) \Leftrightarrow (\neg P \vee P) \vee \neg Q \Leftrightarrow T \vee \neg Q \Leftrightarrow T$

4(b) 将 $[P \rightarrow (Q \vee \neg R)] \wedge \neg P \wedge Q$ 用 $\vee$ 和 $\neg$ 表出

解 $[P \rightarrow (Q \vee \neg R)] \wedge \neg P \wedge Q \Leftrightarrow [\neg P \vee (Q \vee \neg R)] \wedge \neg P \wedge Q$

$$\begin{array}{l} E_4, E_{26} \\ \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \Leftrightarrow \neg (P \vee \neg Q) \end{array}$$

5(b) 证明 $P \vee Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$

$$\begin{array}{l} \text{证 } (P \rightarrow Q) \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q) \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee Q \\ \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge T \Leftrightarrow P \vee Q \end{array}$$

11 (1.4.6) * 答案 “我根本没有打过我父亲，也就谈不上停止不停止了。”

12 (1.4.7) 将 $\xi \rightarrow \lambda \vee \neg \phi \vee \rho$ 化为不含否定词的蕴涵式

$$\begin{array}{l} \text{解 } \xi \rightarrow \lambda \vee \neg \phi \vee \rho \Leftrightarrow \neg \xi \vee \lambda \vee \neg \phi \vee \rho \Leftrightarrow (\neg \xi \vee \neg \phi) \vee (\lambda \vee \rho) \\ \Leftrightarrow \neg (\xi \wedge \phi) \vee (\lambda \vee \rho) \Leftrightarrow \xi \wedge \phi \rightarrow \lambda \vee \rho. \end{array}$$

13 (1.4.8) 将 $\xi \rightarrow \lambda \vee (\phi \wedge \psi) \vee \rho$ 化为符号 $\rightarrow$ 后不含符号 $\wedge$ 的两个蕴涵式的合取，

$$\begin{array}{l} \text{解 } \xi \rightarrow \lambda \vee (\phi \wedge \psi) \vee \rho \Leftrightarrow \neg \xi \vee \lambda \vee (\phi \wedge \psi) \vee \rho \Leftrightarrow (\neg \xi \vee \lambda \vee \\ \phi \vee \rho) \wedge (\neg \xi \vee \lambda \vee \psi \vee \rho) \Leftrightarrow (\xi \rightarrow \lambda \vee \phi \vee \rho) \wedge (\xi \rightarrow \lambda \vee \\ \psi \vee \rho). \end{array}$$

习题 §1.5 逻辑蕴涵式

14 (1.5.2) 证 I_6

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$\begin{array}{l} E_{18} \\ \Leftrightarrow \neg [(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)] \vee (\neg P \vee R) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} E_8 \\ \Leftrightarrow [\neg (\neg P \vee Q) \vee \neg (\neg Q \vee R)] \vee (\neg P \vee R) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} E_7 \\ \Leftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R)] \vee (\neg P \vee R) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} F_3, E_6 \\ \Leftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \vee \neg P] \vee [(Q \wedge \neg R) \vee R] \end{array}$$

$$\stackrel{E_{10}, E_{15}}{\Leftrightarrow} [T \wedge (\neg Q \vee \neg P)] \vee [(Q \vee R) \wedge T] \stackrel{E_{12}, E_3, E_{15}}{\Leftrightarrow} T$$

证 I_8

$$[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \rightarrow [P \wedge R \rightarrow Q \wedge S]$$

$$\stackrel{E_{18}}{\Leftrightarrow} \neg [(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S)] \vee [\neg(P \wedge R) \vee (Q \wedge S)]$$

$$\stackrel{E_8}{\Leftrightarrow} \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg R \vee S) \vee \neg(P \wedge R) \vee (Q \wedge S)$$

$$\stackrel{E_7, E_8}{\Leftrightarrow} (P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg S) \vee (\neg P \vee \neg R) \vee (Q \wedge S)$$

$$\stackrel{E_3, E_5}{\Leftrightarrow} [(P \wedge \neg Q) \vee \neg P] \vee [(R \wedge \neg S) \vee \neg R] \vee (Q \wedge S)$$

$$\stackrel{E_{10}}{\Leftrightarrow} [\neg Q \vee \neg P] \vee [\neg S \vee \neg R] \vee (Q \wedge S)$$

$$\stackrel{E_5}{\Leftrightarrow} (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee \neg S) \vee (Q \wedge S)$$

$$\stackrel{E_{10}, E_{15}, E_{12}}{\Leftrightarrow} T \wedge T \Leftrightarrow T.$$

15 (1.5.3) (a) $[P \wedge Q \rightarrow P] \Leftrightarrow T$

$$P \wedge Q \rightarrow P \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee P$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee P \Leftrightarrow (\neg P \vee P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow T \vee Q \Leftrightarrow T.$$

(d) $(P \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg P) \wedge (P \vee P)$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge P \Leftrightarrow F$$

6 (1.5.5) 答案

永真式 (b), (c), (h), (i), (k)

偶真式 (a), (d), (f), (g)

永假式 (e), (j)

习题 § 1.6 范 式

17 (1.6.1) (a) 求 $\neg P \wedge Q \rightarrow R$ 的标准析取范式

$$\text{解 } \neg P \wedge Q \rightarrow R \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee \neg Q \vee R$$

$$= M_{010} = \pi \{2\} = \Sigma \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\begin{aligned} \therefore \neg P \wedge Q \rightarrow R &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee \\ &(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee \\ &(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \end{aligned}$$

18 (1.6.2) 求两种标准范式

$$(c) \quad \alpha = \neg(A \vee \neg B) \wedge (C \rightarrow \neg D)$$

$$\text{解 } n = 4$$

$$\alpha \Leftrightarrow \neg A \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg D)$$

$$= (m_{0100} \vee m_{0101}) \vee (m_{0100} \vee m_{0110})$$

$$= m_4 \vee m_5 \vee m_4 \vee m_6 = \Sigma \{4, 5, 6\}$$

$$= \pi \{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$\therefore \alpha \Leftrightarrow (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D)$$

$$\vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \wedge \Leftrightarrow (A \vee B \vee C \vee D)$$

$$\wedge (A \vee B \vee C \vee \neg D) \wedge (A \vee B \vee \neg C \vee D)$$

$$\wedge (A \vee B \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D)$$

$$\wedge (\neg A \vee B \vee C \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee C \vee \neg D)$$

$$\wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee \neg D)$$

$$\wedge (\neg A \vee \neg B \vee C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C \vee \neg D)$$

$$\wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D)$$

19 (1.6.3) 研究下列各组 α, β 的逻辑关系

$$(b) \quad \alpha = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R) \vee (\neg R \wedge P)$$

$$\beta = (P \vee \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg P)$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \alpha &= (m_{010} \vee m_{011}) \vee (m_{001} \vee m_{101}) \vee (m_{100} \vee m_{110}) \\ &= m_2 \vee m_3 \vee m_1 \vee m_5 \vee m_4 \vee m_6 \\ &= \Sigma \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= (m_{100} \vee m_{101}) \vee (m_{010} \vee m_{110}) \vee (m_{001} \vee m_{011}) \\ &= m_4 \vee m_5 \vee m_2 \vee m_6 \vee m_1 \vee m_3 \\ &= \Sigma \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha \Leftrightarrow \beta$$

$$(e) \alpha = P \vee R \rightarrow Q \vee S$$

$$\beta = P \wedge R \rightarrow Q \vee S$$

$$\text{解 } n = 4$$

$$\begin{aligned} \alpha \Leftrightarrow \neg(P \vee R) \vee Q \vee S &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee Q \vee S \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee S) \wedge (Q \vee \neg R \vee S) \\ &= (M_{1000} \wedge M_{1010}) \wedge (M_{0010} \wedge M_{1010}) \\ &= M_8 \wedge M_{10} \wedge M_2 \wedge M_{10} = \pi \{2, 8, 10\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta \Leftrightarrow \neg(P \wedge R) \vee Q \vee S &\Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee \neg R \vee S \\ &= M_{1010} = \pi \{10\} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha \Rightarrow \beta$$

$$(f) \alpha = P \vee R \rightarrow Q \vee S$$

$$\beta = P \wedge R \rightarrow Q \wedge S$$

$$\text{解 } \alpha \Leftrightarrow \neg(P \vee R) \vee Q \vee S = \pi \{2, 8, 10\} \quad (\text{见 e 中结果})$$

$$\begin{aligned} \beta \Leftrightarrow \neg(P \wedge R) \vee (Q \wedge S) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg R \vee (Q \wedge S) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S) \\ &= (M_{1010} \wedge M_{1011}) \wedge (M_{1010} \wedge M_{1110}) \\ &= M_{10} \wedge M_{11} \wedge M_{10} \wedge M_{14} = \pi \{10, 11, 14\} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 无逻辑关系。}$$

20(1.6.4) 下面含三个变元的命题公式有遗漏, 试予以补正。

$$(a) (P \rightarrow Q) \wedge (\square \triangle \square \rightarrow \square) \Leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (\square \triangle \square \rightarrow \square)$$

$$\begin{aligned} \text{解 左} &= (P \rightarrow Q) \wedge x \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge x \\ &= (M_{100} \wedge M_{101}) \wedge x = M_4 \wedge M_5 \wedge x \end{aligned}$$