$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B=0 \Rightarrow A=0)$$

$$R = t(R) \Leftrightarrow R^2 \subset R$$

《离散数学导论》习题选解

黄和之 编著

《离散数学导论》习题选解

黄和之 编著

北京经济学院出版社

1988年·北京

《离散数学导论》习题选解

黄 和 之 编著

北京经济学院出版社出版
（北京市朝阳区红庙）
北京经济学院出版社永乐印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 32开 10.625印张 238千字
1988年11月第1版 1988年11月第1版第1次印刷
印数：00 001—10 100

ISBN7—5638—0024—7／O・1

定价： 3.50元

前 言

近几年来，计算机科学工作者和工程技术人员中自学离散数学的人数逐渐增多。第一次接触这门学科的人，独立完成全部作业有一定困难，对某些难题或技巧性较高的题，花费时间过多，对业余学习也是不利的。我们编写的这本习题选解，所选习题都取自《离散数学导论》。该书每一章节都配有习题，门类比较齐全，后面章节的习题有的与前面的内容相呼应，便于复习和巩固已学过的知识。

对使用本书的读者，我们提出以下的忠告：学习必须依靠自己刻苦努力，应该独立思考，独立完成作业。这不但是掌握基本概念，巩固已学知识的重要手段，而且，由于不受别人思路影响，有时能得出巧妙的构思与简易的解法，使所学知识融汇贯通，收到事半功倍的效果。因此，希望读者学习《离散数学导论》与本《习题选解》时，在自己动手做题的基础上，再与本书解答相比较。如果自己的想法与“解答”一致，说明思路基本正确，此时需要用明确的语言按逻辑层次将解题过程表述出来。反之，如果自己的思路与“解答”存在距离，这就需要分析思路上遇到什么阻碍；方法、步骤上有什么缺失，或许通过分析会使你豁然开朗，感到每做一个题均有所得。经常在解题中总结得与失，就能够逐步地正确进行推理、判断，提高逻辑思维能力，并获得解题的技能与技巧。这样，本习题选解也才可以认为发挥了它应有的作用。

书中的十二、十三章的习题解答，主要由邹德林同志完成，特此致谢。

编者　　1987年8月

内 容 简 介

本书所列习题选自《离散数学导论》一书。全部457个习题（计上小题共600余个），均经过精心挑选，内容丰富全面，解题方法简明扼要，思路清晰。适合作计算机、信息管理等专业以及电视大学有关专业“离散数学”课程的教学参考书，也是自修《离散数学》的重要参考材料。

所选习题由浅入深。难度较低的只列出答案；中等难度的给出提示；难度较大的列出详细的解题步骤与题解。书中对某些繁难问题，用新颖的解题方法做了简明处理。数理逻辑中的快速证明，图论中的折边破回路法等均有其独到之处。这些方法对初学者是十分有益的。

目　　录

第一章　命题逻辑

习题§1.1　命　题

1（11.1）　下列语句哪些是命题？哪些不是？若不是命题，说明理由，

（i）　看球赛去！

（ii）　鸡有三只脚。

（iii）天下之中央，在燕之北与越之南。

（iV）所有哺乳动物都是脊椎动物。

（V）　考试是为了学习，学习不是为了考试。

解（i）不是，因不是陈述句，其余都是。

注　(ii)(iii)是《庄子·天下篇》中所载惠施等辩者提出的命题。

2（1.1.3）　确定下列命题的真假。

（iV）李善兰是清代的数学家或宋代的词人。

（V）　孟轲喜欢吃鱼，也喜欢吃熊掌。

（Vi）白马非马。

解　（iV）　这是由"或"联结的两个肢命题："李善兰是清代数学家"，"李善兰是宋代女词人"，前一肢命题为真，按逻辑联结词规定，这是真的复合命题。

（V）　《孟子》中有"鱼我所欲也，熊掌亦我所欲也"，故此命题为真（有文献根据）。是由"且"联结起来的复合命题，

（Vi）　这是战国时公孙龙提出的著名命题，是假的命题（参看正文表1.7.1后例a）。

习 题 §1.2 逻辑联结词

3（1.2.1） 研究下列语句，在自然语言中是否有意义？在逻辑中是真或假？

（i） 如果今天是星期一，则明天是星期六。

（ii） 如果今天是一号，则昨天是二十九号。

（iii） $2+2=5$

（iV） $2+2=5$，则雪是黑的。

（V） 不能入地且不能上天。

（Vi） 诗中有画且画中有诗。

解 （a） 在自然语言中无意义，在逻辑中可能是真的，有：

（i） 在不是星期一的一天说这话，逻辑上是真的。

（ii） 在不是一号的一天说这话是真的，在公元纪年数字能被4整除但不能被100整除及是400的倍数的年份的三月一号，说这话是真的（注 只考虑阳历，不考虑阴历）。

（iV） 因前件假，整个蕴涵式真。

（b） 在自然语言中有意义，但在逻辑中为假，有：

（V） 在逻辑中应把有人乘航天飞机等作为上天。

（Vi） 自然语言中是指意境，是有意义的。逻辑上的“中”，应指形式上的中，诗中有画为假。

（c） （iii） 在自然语言中无意义，在逻辑中也是假的。

4（1.2.2） 将下列语句符号化

（i） 李宁或楼云将被评为优秀运动员。

（ii） 明天上午十点正，我在天安门广场或者美术馆。

（iV） 并非所有整数都是正数。

（Vi） 要使$x^2>0$就要$x\neq 0$，反之亦然。

解 （i） $P\vee Q$

（ii） $P\overline{\vee}Q$ 因两处相距较远，不可能同时在两处。

(iV) $\neg P$ P表示"所有整数都是正数"

(Vi) $P \leftrightarrow Q$

5(1.2.4) P表示"正在下雪"，Q表示"我将进城"，R表示"我有空闲时间"。

(a) 把语句符号化

(i) $\neg P \wedge R \rightarrow Q$

(ii) $Q \rightarrow R$ 即有空是进城的必要条件

(b) 用自然语言写出下列命题公式

(iii) $(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$ 等价于 $Q \leftrightarrow R$

有空是我进城的充分必要条件。(我进城当且仅当我有空。)

(iV) $\neg(R \vee Q)$ 等价于 $\neg R \wedge \neg Q$

我没有空也不进城。

习题 §1.3 真值表

6(1.3.1) 答案 $\wedge$，$\vee$ 可交换，$\rightarrow$ 不可交换。

7(1.3.2) 答案 $\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$ 可结合，$\rightarrow$ 不可结合。

8(1.3.3) (a) $4 \mid x$ 且 $2 \mid x$ 只是 $8 \mid x$ 的必要条件。

习题 §1.4 逻辑恒等式

9(1.4.2) 简化下列命题公式

(a) $[(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)] \wedge C$

(c) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$

(d) $[(A \rightarrow B) \wedge B \wedge C] \vee C$

答案 (a) C (c) $B \wedge C$ (d) C

10(1.4) 3(c) 将 $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 用 $\wedge$ 和 $\neg$ 表出

解 $P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P) \Leftrightarrow (\neg P \vee P) \vee \neg Q \Leftrightarrow$
$T \vee \neg Q \Leftrightarrow T$

4（b） 将 $[P\to(Q\vee\neg R)]\wedge\neg P\wedge Q$用$\vee$和$\neg$表出

解 $[P\to(Q\vee\neg R)]\wedge\neg P\wedge Q \Leftrightarrow [\neg P\vee(Q\vee\neg R)]\wedge\neg P\wedge Q$

$\overset{E_4,E_{26}}{\Leftrightarrow}\neg P\wedge Q\Leftrightarrow\neg(P\vee\neg Q)$

5（b） 证明 $P\vee Q\Leftrightarrow(P\to Q)\to Q$

证 $(P\to Q)\to Q\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee Q\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee Q$

$\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge T\Leftrightarrow P\vee Q$

11（1.4.6）* 答案 “我根本没有打过我父亲，也就谈不上停止不停止了。”

12（1.4.7） 将 $\xi\to\lambda\vee\neg\phi\vee\rho$化为不含否定词的蕴涵式

解 $\xi\to\lambda\vee\neg\phi\vee\rho\Leftrightarrow\neg\xi\vee\lambda\vee\neg\phi\vee\rho\Leftrightarrow(\neg\xi\vee\neg\phi)\vee(\lambda\vee\rho)$

$\Leftrightarrow\neg(\xi\wedge\phi)\vee(\lambda\vee\rho)\Leftrightarrow\xi\wedge\phi\to\lambda\vee\rho$。

13（1.4.8） 将 $\xi\to\lambda\vee(\phi\wedge\psi)\vee\rho$ 化为符号$\to$后不含符号$\wedge$的两个蕴涵式的合取，

解 $\xi\to\lambda\vee(\phi\wedge\psi)\vee\rho\Leftrightarrow\neg\xi\vee\lambda\vee(\phi\wedge\psi)\vee\rho\Leftrightarrow(\neg\xi\vee\lambda\vee\phi\vee\rho)\wedge(\neg\xi\vee\lambda\vee\psi\vee\rho)\Leftrightarrow(\xi\to\lambda\vee\phi\vee\rho)\wedge(\xi\to\lambda\vee\psi\vee\rho)$。

习题 §1.5 逻辑蕴涵式

14（1.5.2） 证 I_6

$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\to(P\to R)$

$\overset{E_{18}}{\Leftrightarrow}\neg[(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)]\vee(\neg P\vee R)$

$\overset{E_8}{\Leftrightarrow}[\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg(\neg Q\vee R)]\vee(\neg P\vee R)$

$\overset{E_7}{\Leftrightarrow}[(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)]\vee(\neg P\vee R)$

$\overset{F_3,E_6}{\Leftrightarrow}[(P\wedge\neg Q)\vee\neg P]\vee[(Q\wedge\neg R)\vee R]$

$\xLeftrightarrow{E_{10},E_{15}} [T\wedge(\neg Q\vee\neg P)]\vee[(Q\vee R)\wedge T]\xLeftrightarrow{E_{12},E_3,E_{15}} T$

证I_8

$[(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)]\rightarrow[P\wedge R\rightarrow Q\wedge S]$

$\xLeftrightarrow{E_{18}} \neg[(\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee S)]\vee[\neg(P\wedge R)\vee(Q\wedge S)]$

$\xLeftrightarrow{E_8} \neg(\neg P\vee Q)\vee\neg(\neg R\vee S)\vee\neg(P\wedge R)\vee(Q\wedge S)$

$\xLeftrightarrow{E_7,E_8} (P\wedge\neg Q)\vee(R\wedge\neg S)\vee(\neg P\vee\neg R)\vee(Q\wedge S)$

$\xLeftrightarrow{E_3,E_5} [(P\wedge\neg Q)\vee\neg P]\vee[(R\wedge\neg S)\vee\neg R]\vee(Q\wedge S)$

$\xLeftrightarrow{E_{10}} [\neg Q\vee\neg P]\vee[\neg S\vee\neg R]\vee(Q\wedge S)$

$\xLeftrightarrow{E_5} (\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee\neg S)\vee(Q\wedge S)$

$\xLeftrightarrow{E_{10},E_{15},E_{12}} T\wedge T\Leftrightarrow T$。

15（1.5.3） （a） $[P\wedge Q\rightarrow P]\leftrightarrow T$

$P\wedge Q\rightarrow P\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee P$

$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee P\Leftrightarrow(\neg P\vee P)\vee Q$

$\Leftrightarrow T\vee Q\Leftrightarrow T$。

（d） $(P\rightarrow\neg P)\wedge(\neg P\rightarrow P)\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg P)\wedge(P\vee P)$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge P\Leftrightarrow F$

6（1.5.5） 答案

永真式（b），（c），（h），（i），（k）

偶真式（a），（d），（f），（g）

永假式（e），（j）

习题§1.6 范 式

17（1.6.1）（a）求 $\neg P\wedge Q\to R$的标准析取范式

解 $\neg P\wedge Q\to R\Longleftrightarrow\neg(\neg P\wedge Q)\vee R\Longleftrightarrow P\vee\neg Q\vee R$

$=M_{010}=\pi_{\{2\}}=\Sigma_{\{0,1,3,4,5,6,7\}}$

$\therefore\neg P\wedge Q\to R\Longleftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee$

$(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee$

$(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

18（1.6.2） 求两种标准范式

（c） $\alpha=\neg(A\vee\neg B)\wedge(C\to\neg D)$

解 $n=4$

$\alpha\Longleftrightarrow\neg A\wedge B\wedge(\neg C\vee\neg D)\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow(\neg A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg D)$

$=(m_{0100}\vee m_{0101})\vee(m_{0100}\vee m_{0110})$

$=m_4\vee m_5\vee m_4\vee m_6=\Sigma_{\{4,5,6\}}$

$=\pi_{\{0,1,2,3,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}}$

$\therefore\alpha\Longleftrightarrow(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge D)$

$\vee(\neg A\wedge B\wedge C\wedge\neg D)\wedge\Longleftrightarrow(A\vee B\vee C\vee D)$

$\wedge(A\vee B\vee C\vee\neg D)\wedge(A\vee B\vee\neg C\vee D)$

$\wedge(A\vee B\vee\neg C\vee\neg D)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C\vee\neg D)$

$\wedge(\neg A\vee B\vee C\vee D)\wedge(\neg A\vee B\vee C\vee\neg D)$

$\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C\vee D)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C\vee\neg D)$

$\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C\vee D)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C\vee\neg D)$

$\wedge(\neg A\vee\neg B\vee\neg C\vee D)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee\neg C\vee\neg D)$

19（1.6.3） 研究下列各组α，β的逻辑关系

（b） $\alpha=(\neg P\wedge Q)\vee(\neg Q\wedge R)\vee(\neg R\wedge P)$

$\beta=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge\neg P)$

解 $\alpha=(m_{010}\vee m_{011})\vee(m_{001}\vee m_{101})\vee(m_{100}\vee m_{110})$

$=m_2\vee m_3\vee m_1\vee m_5\vee m_4\vee m_6$

$=\Sigma\{1,2,3,4,5,6\}$

$\beta=(m_{100}\vee m_{101})\vee(m_{010}\vee m_{110})\vee(m_{001}\vee m_{011})$

$=m_4\vee m_5\vee m_2\vee m_6\vee m_1\vee m_3$

$=\Sigma\{1,2,3,4,5,6\}$

$\therefore\ \alpha\Leftrightarrow\beta$

(e) $\alpha=P\vee R\to Q\vee S$

$\beta=P\wedge R\to Q\vee S$

解 $n=4$

$\alpha\Leftrightarrow\neg(P\vee R)\vee Q\vee S\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg R)\vee Q\vee S$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee S)\wedge(Q\vee\neg R\vee S)$

$=(M_{1000}\wedge M_{1010})\wedge(M_{0010}\wedge M_{1010})$

$=M_8\wedge M_{10}\wedge M_2\wedge M_{10}=\pi\{2,8,10\}$

$\beta\Leftrightarrow\neg(P\wedge R)\vee Q\vee S\Leftrightarrow\neg P\vee Q\vee\neg R\vee S$

$=M_{1010}=\pi\{10\}$

$\therefore\ \alpha\Rightarrow\beta$

(f) $\alpha=P\vee R\to Q\vee S$

$\beta=P\wedge R\to Q\wedge S$

解 $\alpha\Leftrightarrow\neg(P\vee R)\vee Q\vee S=\pi\{2,8,10\}$（见e中结果）

$\beta\Leftrightarrow\neg(P\wedge R)\vee(Q\wedge S)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg R\vee(Q\wedge S)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg R\vee S)$

$=(M_{1010}\wedge M_{1011})\wedge(M_{1010}\wedge M_{1110})$

$=M_{10}\wedge M_{11}\wedge M_{10}\wedge M_{14}=\pi\{10,11,14\}$

$\therefore$ α与β无逻辑关系。

20（1.6.4） 下面含三个变元的命题公式有遗漏，试予以补正，

(a) $(P\to Q)\wedge(\square\triangle\square\to\square)\Leftrightarrow(P\to R)\wedge(\square\triangle\square\to\square)$

解 左$=(P\to Q)\wedge x\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge x$

$=(M_{100}\wedge M_{101})\wedge x=M_4\wedge M_5\wedge x$