最新实用三角函数不定积分手册

彭日昌 著

$$\int(\arcsin ax)^m dx = ?$$

$$\int(\arccos ax)^m dx = ?$$

$$\int(\arctan ax)^m dx = ?$$

水利电力出版社

最新实用
三角函数不定积分手册

彭日昌 著

水利电力出版社

最新实用三角函数不定积分手册
彭日昌 著
*
水利电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号）
各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米 16开本 53印张 1215千字
1989年7月第一版 1990年2月北京第一次印刷
印数0001—1050册 平装定价35.25元
ISBN 7-120-00582-0/O·6

内 容 提 要

本书是一本三角函数不定积分工具书，全书共分十九章，主要内容有三角函数、反三角函数的不定积分，三角函数之积、之商的不定积分，反三角函数之和、之积、之商的不定积分。书中三角函数不定积分显式除个别的以外，均是国内外数学手册和数学文献所未有的，本书有七百余表达简练的显式，并对一些重要显式作出了证明。本书手稿曾得到我国数学界权威人士的好评。

本书在国防工业及科研、教学领域中有实用价值，可供大学师生和科研人员查阅参考。

序

本书不同于一般三角函数积分公式表，也不同于一般数学手册中的有关内容。其主要区别有以下两点。

第一，一般积分表或数学手册中关于积分的递推公式，只是在理论上指出当被积函数含有自然数参数n时，积分公式是能够用递推法来求的，特别当n是一个已知的某一自然数时，就可反复运用递推公式求出解的显式表示，但对于一般的n却并没能给出解的表示，这是递推公式的不足之处。本书对这类积分都归纳出了解的一般形式的显式表示，使答案具有更明显的构造性，弥补了递推公式的不足。

第二，一些较复杂的三角函数积分，是一般积分表和数学手册所未能包含的，本书在一定程度上也都给出了解的显式表示。

显然本书的核心部分是八个重要的定理，这些定理的证明是初等而且简练的，至于归纳出定理结果的一般形式，确实凝结了作者多年的心血，是有其独创的地方。本书的许多公式都可以看作这些定理的推论，作为工具书查用，足以补一般国内外三角函数积分表之不足，在实用上是有价值的。这部份内容也包括许多新的公式。正如作者自序中提到的，本书难免有疏漏和谬误的地方，希望得到广大读者的指正。

由于本书有上述两个特点，其应用必较普通积分表更为广泛，是为序。

程民德

一九八七年七月于北京

自　序

本书初稿完成于1960年。但不幸，凝结了我多年心血的研究成果在十年浩劫中全部散失，我本人也遭受了种种不幸。

1978年底我重新推导整理自己的研究成果，其间，多次得到数学界前辈、中国科学院学部委员程民德先生的指导和教诲，使得这本书终于和读者见面了。本书书名，就是由程先生审定的。本书完稿后承蒙北京大学副教授许忠勤同志审稿，对本书提出了许多宝贵意见，在此谨表感谢。

本书的主要内容是三角函数和反三角函数的不定积分。在写作过程中，除程先生外还得到了水利电力部总工程师陆延昌同志，北京热电总厂党委书记和厂长的鼓励，在此谨向这些同志致以衷心谢忱。

由于本书是作者在业余时间的研究成果，受到条件和水平的限制，本书的逻辑性不够，还会有许多疏漏和谬误之处，恳请读者不吝赐教。

彭日昌

一九八六年七月一日

目　　录

第一章　三　角　函　数

本章为三角函数不定积分由浅入深作了一些必要的准备工作，并归纳了一些常用的三角公式，反三角函数的准备工作，见第九章。

1.1　全书的七个规定

1.1.1　$a>0$.

1.1.2　$\sum_{r=0}^{n}=0$.（$n<r$）

1.1.3　$\binom{n}{m}=c_n^m=0$.（$n<m$）

1.1.4　一个公式中的n如$\int\frac{xdx}{\sin^{2n+1}ax}$与该显式$B_n$或$E_n$中的$n$各自独立进行计算，例如

$$\int\frac{xdx}{\sin^{2n+1}ax}=-\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left\{\frac{x}{a}\cos ax\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!\sin^{2r+2}ax}\right.$$

$$+\frac{1}{a^2}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!(2r+1)\sin^{2r+1}ax}$$

$$\left.-\frac{1}{a^2}\left[ax+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!}B_n(ax)^{2n+1}\right]\right\},$$

式中B_n为伯努利数.

1.1.5　公式的右上角标有记号（r）或（ρ）者，表示该函数求导的次数. 例如

$$\int x^n\sin ax dx=-\sum_{r=1}^{n+1}\frac{(x^{n+1})^{(r)}(\sin ax)^{(r)}}{(n+1)a^{2r}},$$

表示一个变量x的两个函数连续导数之积.

1.1.6　括号的次序由小至大是：（ ），[ ]，{ }，〈 〉，〔 〕.

1.1.7　正弦积分与余弦积分：

〔正弦积分的定义与级数表达式〕

$$\mathrm{si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt.\quad(|x|<\infty)$$

$$\mathrm{si}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!(2r+1)}.\quad(|x|<\infty)$$

$$\mathrm{si}(x)=-\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\mathrm{si}(x)-\frac{\pi}{2}.\quad(|x|<\infty).$$

它们都是x的整函数.

[余弦积分的定义与级数表达式]

$$\mathrm{Ci}(x)=\mathrm{Ci}(x)=-\int_{*}^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt.\quad(|\arg x|<\pi)$$

$$\mathrm{Ci}(x)=r+\log_e x+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r(x)^{2r}}{(2r)!(2r)}=r+\log_e x-\int_0^x\frac{1-\cos u}{u}du.\quad(\arg x<\pi)$$

它在除去半轴（$-\infty$，0）的x平面内单值解析，式中r为欧拉常数．本书中只在通用公式用“$*$”表示变上限积分，（见人民教育出版社1979年5月第一版的《数学手册》P596）.

1.2 代数函数

1.2.1 $(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$

$$\times a^{n-r}b^r+\cdots+b^n=\sum_{r=0}^{n}c_n^r a^{n-r}b^r=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r.$$

1.2.2 $(a-b)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r c_n^r a^{n-r}b^r=\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}a^{n-r}b^r.$

1.2.3 $(a+bx)^n=a^n\left(1+\dfrac{b}{a}x\right)^n=a^n\sum\limits_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\dfrac{bx}{a}\right)^r.$

1.2.4 $(a-bx)^n=a^n\left(1-\dfrac{b}{a}x\right)^n=a^n\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\left(\dfrac{bx}{a}\right)^r.$

1.2.5 二项式定理的每一项系数以c_n^r或$\binom{n}{r}$表示其绝对值列表如下：

杨辉三角形	
	系数$\binom{n}{r}$：列上的字表示n，行上的字表示$\binom{n}{r}$的值
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1.3 二项式定理系数的性质

1.3.1 $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$.

证 $$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$\binom{n}{n-m}=\frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!}=\frac{n!}{(n-m)!m!},$$

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}.$$

1.3.2 $\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\binom{n+1}{m+1}$.

证 $$\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}+\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}$$
$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(1+\frac{n-m}{m+1}\right)$$
$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{n+1}{m+1}$$
$$=\frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}=\binom{n+1}{m+1}.$$

1.3.3 $\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}=\binom{n+1}{m}$.

证 $$\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}=\frac{n!}{(m)!(n-m)!}+\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}$$
$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(1+\frac{m}{n-m+1}\right)$$
$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{n+1}{(n-m+1)}$$
$$=\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}=\binom{n+1}{m}.$$

1.4 单阶乘与双阶乘间的关系

设n、m、p为自然数，则$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$称为$n$的阶乘，并且规定$0!=1$，又定义：

1.4.1 $p!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\ \cdot p$. （$p$为奇数）

1.4.2 $(2n)!!=2^n\cdot n!$.

1.4.3 $(2n+p)!!=\dfrac{(2n+p)!}{2^{\left(n+\frac{p-1}{2}\right)}\cdot\left(n+\dfrac{p-1}{2}\right)!}$. （$p$为奇数）

1.4.4 $(2n-1)!!=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1).$

1.4.5 $(2n-p)!!=\frac{(2n-p+1)!}{2^{\left(n-\frac{p-1}{2}\right)}\cdot\left(n-\frac{p-1}{2}\right)!}.$ （p为奇数）

1.4.6 $(2n-2m)!!=2^{n-m}(n-m)!.$

1.4.7 $0!!=1.$

1.4.8 $(-1)!!=1.$ ●

●并且规定小于$(-1)!!$的双阶乘为0.

1.4.9 $(2n+2m+1)!!=\frac{(2n+2m+1)!}{2^{n+m}(n+m)!}=1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n+2m+1).$

1.4.10 $(2n+2m-1)!!=\frac{(2n+2m)!}{2^{n+m}(n+m)!}=1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n+2m-1).$

1.4.11 $(2n-2m+1)!!=\frac{(2n-2m+1)!}{2^{n-m}(n-m)!}=1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-2m+1).$

$(n\geqslant m)$

1.4.12 $(2n-2m-1)!!=\frac{(2n-2m)!}{2^{n-m}(n-m)!}=1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-2m-1).$

$(n\geqslant m)$

1.4.13 $(2n+2m+3)!!=\frac{(2n+2m+3)!}{2^{n+m+1}(n+m+1)!}=1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n+2m+3).$

1.4.14 $(2n+2m-3)!!=\frac{(2n+2m-2)!}{2^{n+m-1}(n+m-1)!}=1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n+2m-3).$

1.4.15 $(2n-2m+3)!!=\frac{(2n-2m+3)!}{2^{n-m+1}(n-m+1)!}=1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-2m+3).$

$(n\geqslant m)$

1.4.16 $(2n-2m-3)!!=\frac{(2n-2m-2)!}{2^{n-m-1}(n-m-1)!}=1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-2m-3).$

$(n>m)$

1.4.17 $(2n+2m)!!=2^{n+m}(n+m)!.$

1.4.18 $(2n+2m+2)!!=2^{n+m+1}(n+m+1)!.$

1.4.19 $(2n+2m-2)!!=2^{n+m-1}(n+m-1)!.$

1.4.20 $(2n-2m+2)!!=2^{n-m+1}(n-m+1)!.$ $(n\geqslant m)$

1.4.21 $(2n-2m-2)!!=2^{n-m-1}(n-m-1)!.$ $(n>m)$

1.4.22 $(2n+2m+2p+1)!!=\frac{(2n+2m+2p+1)!}{2^{n+m+p}(n+m+p)!}.$

1.5 阶乘表

n	$n!$	$(10+n)!$	$(2n-1)!!=\frac{(2n)!}{2^n n!}$
1	1	39916800	1
2	2	479001600	3
3	6	6227020800	15
4	24	87178291200	105
5	120	1307674368000	945
6	720	20922789888000	10395
7	5040	355687428096000	135135
8	40320	6402373705728000	2027025
9	362880	121645100408832000	34459425
10	3628800	2432902008176640000	654729075

n	2^n	2^{10+n}	3^n	3^{10+n}	$(2n-2)!!=2^{n-1}(n-1)!$
1	2	2048	3	177147	1
2	4	4096	9	531441	2
3	8	8192	27	1594323	8
4	16	16384	81	4782969	48
5	32	32768	243	14348907	384
6	64	65536	729	43046721	3840
7	128	131072	2187	129140163	46080
8	256	262144	6561	387420489	645120
9	512	524288	19683	1162261467	10321920
10	1024	1048576	59049	3486784401	185794560

$n=m$	$(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$	$(2n+3)!!=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}(n+1)!}$	$(2n+2m+1)!!=\frac{(2n+2m+1)!}{2^{n+m}(n+m)!}$
1	3	15	15
2	15	105	945
3	105	945	135135
4	945	10395	34459425
5	10395	135135	13749310575
6	135135	2027025	7905853580625
7	2027025	34459425	6190283353629375
8	34459425	654729075	6332659870967450625
9	654729075	13749310575	8200794532902848559375
10	13749310575	316234143225	13113070458111654846440625

$n=m$	$(2n)!!=2^n n!$	$(2n+2)!!=2^{n+1}(n+1)!$	$(2n+2m)!!=2^{n+m}(n+m)!$
1	2	8	8
2	8	48	384
3	48	384	46080
4	384	3840	10321920
5	3840	46080	3715891200
6	46080	645120	3923981107200
7	645120	10321920	2848658246041600
8	10321920	185794560	2734711916199936000
9	185794560	3715891200	3347287385428721664000
10	3715891200	81749606400	5087876825851656929280000

1.6 三角函数的基本关系

1.6.1 $\sin A=\frac{1}{\csc A}$. $\cos A=\frac{1}{\sec A}$. $\tan A=\frac{1}{\cot A}$.

$\csc A=\frac{1}{\sin A}$. $\sec A=\frac{1}{\cos A}$. $\cot A=\frac{1}{\tan A}$.

1.6.2 $\sin A=\tan A\cos A$. $\cos A=\cot A\sin A$. $\tan A=\sin A\sec A$.

$\csc A=\sec A\cot A$. $\sec A=\csc A\tan A$. $\cot A=\cos A\csc A$.

1.6.3 $\sin A=\frac{\tan A}{\sec A}$. $\cos A=\frac{\cot A}{\csc A}$. $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$.

$\csc A=\frac{\sec A}{\tan A}$. $\sec A=\frac{\csc A}{\cot A}$. $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$.

1.6.4 $\sin A=\frac{\cos A}{\cot A}$. $\cos A=\frac{\sin A}{\tan A}$. $\tan A=\frac{\sec A}{\csc A}$.

$\csc A=\frac{\cot A}{\cos A}$. $\sec A=\frac{\tan A}{\sin A}$. $\cot A=\frac{\csc A}{\sec A}$.

1.6.5 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$. $\sec^2 A-\tan^2 A=1$. $\csc^2 A-\cot^2 A=1$.

$\frac{\tan^2 A}{\sec^2 A}+\frac{\cot^2 A}{\csc^2 A}=1$. $\frac{\csc^2 A}{\cot^2 A}-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=1$.

$\frac{\sec^2 A}{\tan^2 A}-\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=1$. $\frac{\cos^2 A}{\cot^2 A}+\frac{\sin^2 A}{\tan^2 A}=1$.

$\frac{\tan^2 A}{\sin^2 A}-\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=1$. $\frac{\cot^2 A}{\cos^2 A}-\frac{\csc^2 A}{\sec^2 A}=1$.

1.6.6 $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\ \sin^2 A$.

$\cot^2 A-\cos^2 A=\cot^2 A\ \cos^2 A$.

$\sec^2 A+\csc^2 A=\sec^2 A\csc^2 A=\frac{1}{\sin^2 A\ \cos^2 A}$.

$\tan^2 A\ \csc^2 A=\sec^2 A$.

$\sec^2 A-\csc^2 A=\tan^2 A-\cot^2 A$.

$\cot^2 A\ \sec^2 A=\csc^2 A$.

$\tan^2 A\ \csc^2 A+\cot^2 A\ \sec^2 A=\csc^2 A\ \sec^2 A$.

1.6.7 $\sin(A\pm B)=\sin A\ \cos B\pm\cos A\ \sin B$.

1.6.8 $\cos(A\pm B)=\cos A\ \cos B\mp\sin A\ \sin B$.

1.6.9 $2\sin A\ \cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$.

1.6.10 $2\cos A\ \cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$.

1.6.11 $2\sin A\ \sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$.

1.6.12 $2\cos A\ \sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$.

1.6.13 $\sin A\pm\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A\pm B)\cos\frac{1}{2}(A\mp B)$.

1.6.14 $\cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B).$

1.6.15 $\cos A-\cos B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)$

1.6.16 $\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}=\frac{\cot B\pm\cot A}{\cot A\cot B\mp 1}.$

1.6.17 $\cot(A\pm B)=\frac{\cot B\cot A\mp 1}{\cot B\pm\cot A}=\frac{1\mp\tan A\tan B}{\tan A\pm\tan B}.$

1.6.18 $\tan A\pm\tan B=\frac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}.$

1.6.19 $\cot A\pm\cot B=\frac{\sin(B\pm A)}{\sin B\sin A}.$

1.6.20 $\tan A+\cot B=\frac{\cos(A-B)}{\cos A\sin B}.$

1.6.21 $\cot A-\tan B=\frac{\cos(A+B)}{\sin A\cos B}.$

1.6.22 $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B).$

1.6.23 $\cos^2 A-\cos^2 B=\sin(B+A)\sin(B-A).$

1.6.24 $\cos^2 A-\sin^2 B=\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 B-\sin^2 A.$

1.6.25 $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C.$

1.6.26 $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C$
$-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C.$

1.6.27 $\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}.$

1.6.28 $\cot(A+B+C)=\frac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A-1}.$

1.6.29 $4\sin A\sin B\sin C=\sin(A+B-C)+\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)$
$-\sin(A+B+C).$

1.6.30 $4\sin A\sin B\cos C=\cos(B+C-A)+\cos(C+A-B)-\cos(A+B-C)$
$-\cos(A+B+C).$

1.6.31 $4\sin A\cos B\cos C=\sin(A+B-C)+\sin(C+A-B)-\sin(B+C-A)$
$-\sin(A+B+C).$

1.6.32 $4\cos A\cos B\cos C=\cos(A+B+C)+\cos(A+B-C)+\cos(B+C-A)$
$+\cos(C+A-B).$

1.7 倍角公式

1.7.1 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{2}}=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

$$=\frac{\sin 2A}{\sqrt{2(1+\cos 2A)}}.$$

1.7.2 $\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=1-2\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1=\sqrt{\frac{1+\cos 2A}{2}}$

$$=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}.$$

1.7.3 $\tan A=\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\frac{1-\cos 2A}{\sin 2A}=\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}}=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

$$=\frac{2}{\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}}.$$

1.7.4 $\cot A=\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}=\sqrt{\frac{1+\cos 2A}{1-\cos 2A}}=\frac{\cot^2\frac{A}{2}-1}{2\cot\frac{A}{2}}$

$$=\frac{\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}}{2}.$$

1.7.5 $\sec A=\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{2}{1+\cos 2A}}=\frac{1+\tan^2\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{1-2\sin^2\frac{A}{2}}$

$$=\frac{1}{2\cos^2\frac{A}{2}-1}=\sqrt{\frac{2(1-\cos 2A)}{1-\cos^2 2A}}=\frac{\sqrt{2(1-\cos 2A)}}{\sin 2A}.$$

1.7.6 $\csc A=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{2}{1-\cos 2A}}=\sqrt{\frac{2(1+\cos 2A)}{1-\cos^2 2A}}$

$$=\frac{\sqrt{2(1+\cos 2A)}}{\sin 2A}=\frac{1+\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}}.$$

1.7.7 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$

1.7.8 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{(1+\tan^2 A)\sqrt{1+\tan^2 A}}.$

1.7.9 $\sin 4A=\cos A(4\sin A-8\sin^3 A)=4\sin A\cos A(2\cos^2 A-1)$

$$=\frac{4\tan A-4\tan^3 A}{(1+\tan^2 A)^2}.$$