常 微 分 方 程

复旦大学数学系主编

金福临、李训经等编

上海科学技术出版社

常 微 分 方 程

复旦大学数学系主编

金福临、李训经等编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 11.875　字数 301,000

1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷

印数 1—13,300

统一书号：13119·368　　定价：2.80元

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学、力学专业的教材进行改革. 这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960 年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订，从 1962 年到 1965 年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验. 当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的.

1980 年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲，同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现"统一性与灵活性相结合的原则". 按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性则是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革. 我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材.

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套比较成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程. 这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端.

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的. 其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是不可少的. 这是一个基本的事实，是我们编写时选材的重要依据. 但是我们还要注意到，在各门基础课程的教材中需要防止片面追求自身的完备化. 应当根据每门课程在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑. 使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计

划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律.我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学.

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨，陈述更明确简练，并起到承上启下的作用．在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受．正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系.

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材都经过多次的课堂教学实践．一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学，我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版.

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务．由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟.

上海科学技术出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢.

复旦大学数学系

1982 4.

编者的话

经过多年来的教学实践，我们重新编写了这本教材．由我们编写的一九六二年版的《常微分方程》，曾在复旦大学和一些兄弟院校、研究单位作为基础课教材或教学参考书使用．根据读者的建议和意见，以及在使用中发现的问题，从一九七八年起就着手进行本书的编写工作，初稿又在复旦大学数学系试用多次．

本书与一九六二年本比较，把初等积分法和常系数线性微分方程分别单独列为第一章和第二章，对常系数线性微分方程组的求解重新进行了处理，目的在于使这些内容的讲述能适应有关的理工科读者学习常微分方程的需要．同时，讲述了它与方阵的若当(Jordan)标准型理论的关系．另外，增添了边值问题、压缩映象原理，并且用压缩映象原理统一处理了解的存在性、唯一性和解对初值或参数的连续性、可微性理论．在定性理论方面，删去了在基础课不宜讲授的部分，而较详细地讨论了电子管振荡器的工作原理和初等奇点附近轨线的性状．并对稳定性的一次近似理论的证明作了一些修改．关于一阶偏微分方程部分，现仍保留一九六二年本的内容．有些不一定在基础课讲授的内容，在标题前用*标出．

本书是在一九六二年本的基础上编写的，各章初稿分别由李君如(第一章和第四章的§1～3、§6)、姚允龙(第二章和第三章)、阮炯(第四章的§4、5和第五章)和黄振勋(第三章的§6)执笔．李训经统一整理修改，金福临最后定稿．习题答案是李君如整理的．

南京大学叶彦谦教授详细审阅了本书，提出了许多宝贵的有价值的意见．编者谨向叶彦谦教授表示深切的谢意．上海科学技术出版社为本书的出版付出了辛勤劳动，我们也表示深切的感谢．最后殷切期望同志们批评指教．

编者　一九八三年四月

目　录

第一章

常微分方程的初等解法

§1 基本概念

在一个(或者一组)方程中,如果未知的是函数,并且在方程中含有未知函数的导数或偏导数,就称该方程为微分方程(或者微分方程组). 如果微分方程中未知函数只是一个自变量的函数,就称该方程为常微分方程;如果未知函数是两个或多个自变量的函数,就称该方程为偏微分方程.

例如数学分析中求已知函数 $f(t)$ 的原函数, 可以视为求未知函数 $x(t)$ 满足常微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t).$$

这个方程是最简单的常微分方程.

又如

$$\frac{dx}{dt}+p(t)x=q(t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g,$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}+a^2x=\sin t,$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

等,都是微分方程.第一、二、三是常微分方程;第四、五是偏微分方程. 由于本书主要是讨论常微分方程,为方便起见,有时也简称常微分方程为方程.

从历史上来看,微分方程与微积分是同时产生的,而微分方程

从它诞生之日起就成为人类认识和改造自然的有力工具．早在十七世纪，牛顿(Newton)在创立微积分时，研究了天体力学，它与微分方程是密切不可分割的．而海王星在它未被发现之前，就被天文学家用微分方程的方法，经过许多计算预测了它的存在，后来才根据预测位置而被找到的．随着生产实践和科学技术的发展，微分方程也不断地向前发展成为数学学科的分支，并且是数学理论联系实际的重要桥梁之一．在化学、生物学、力学、电子技术、自动控制和星际航行等学科和现代技术中，微分方程已经成为不可少的工具，更加显示出它的作用．

一、基本术语

1．阶

在微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数称为这个方程的阶．例如前一段所列举的三个常微分方程，依次为一阶、二阶和三阶；两个偏微分方程分别为一阶和二阶．一般的 n 阶常微分方程可以表示为

$$F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \cdots,\ \frac{d^n x}{dt^n}\right)=0, \tag{1}$$

这里，F 是 t, x, $\frac{dx}{dt}$, $\cdots$, $\frac{d^n x}{dt^n}$ 的已知函数，t 是自变量，x 是未知函数．所谓 n 阶方程，必须在方程中明显地出现未知函数的 n 阶导数，而低于 n 阶的导数以及自变量和未知函数则可能不明显地出现．

在常微分方程的讨论中，常用 t 代表自变量，用 x, y, z, $\cdots$ 或者 x_1, x_2, $\cdots$, x_k 代表未知函数．除通常惯用的导数记号外，有时也用记号 $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$．在物理意义上，自变量 t 常代表时间，一阶和二阶导数分别代表速度和加速度．当然，也可以用其他记号来表示各个变量．

2．解和积分曲线

如果函数 $\varphi(t)$ 在某区间 $a<t<b$ 内有 n 阶连续导数，且把 $x=\varphi(t)$ 代入方程(1)后，能使等式

$$F(t,\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\cdots,\varphi^{(n)}(t))=0$$

在 $a<t<b$ 内恒成立，则称函数 $x=\varphi(t)$ 为方程(1)的解。而称区间 $a<t<b$ 是解 $x=\varphi(t)$ 的定义区间。

有时不易求得解的表达式 $x=\varphi(t)$，而易求得 t, x 的关系式 $\Phi(t,x)=0$，若由它确定的隐函数 $x=\varphi(t)$ 是方程(1)的解，则称 $\Phi(t,x)=0$ 是方程(1)的积分。对于一个微分方程，求得它的积分，就相当于求得它的解。

解或积分在 t, x 平面上的几何表示是平面曲线，称为方程(1)的积分曲线。

例如，容易验证函数 $x=\sqrt{C^2-t^2}$ 和 $x=-\sqrt{C^2-t^2}$ (C 是正的任意常数)都是一阶方程

$dx=\frac{-2t}{2\sqrt{C^2-t^2}}$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{t}{x}$$

的解，它们的定义区间是 $-C<t<C$，而关系式

$$t^2+x^2=C^2$$

就是这个方程的积分。它在 t, x 平面上的图形是以原点为中心的圆周，是这方程的积分曲线。

3．方向场——微分方程的几何解释

已经解出导数的一阶方程的一般形状为

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\tag{2}$$

其中，$f(t,x)$ 是在 t, x 平面上某区域 D 内定义的函数。方程(2)的解 $x=\varphi(t)$ 表示 t, x 平面上的曲线，是我们所称的积分曲线，在其上每一点 (t,x) 处，积分曲线的切线斜率 $\frac{dx}{dt}$ 是函数 $f(t,x)$ 在这点的数值。反之，如果曲线 $x=\psi(t)$ 在其上每点 (t,x) 处的切线斜率 $\frac{d\psi(t)}{dt}$ 恰好是函数 $f(t,x)$ 在这点的值 $f(t,\psi(t))$，那末，$x=\psi(t)$ 就是方程(2)的解，曲线 $x=\psi(t)$ 就是方程(2)的积分曲线。

根据这样的几何解释，为了得到方程(2)的积分曲线，我们可

以在区域D内每一点(t, x)，用$f(t, x)$的值为斜率作直线段，有时还在这些直线段的一方画上箭头，这样，方程(2)在D内每点确定了一个方向，称方程(2)在D内确定了一个方向场．以这个方向场中的直线(或方向)为切线作出的曲线，就是积分曲线．

实际遇到的形状为(2)的方程，往往很难求出它的解的表达式．但是，我们总可以用方向场的方法近似地画出它的积分曲线，从而可以研究解的几何性状．当然，数学上的方向场，要每点作一直线段(或方向)，这在实际上是办不到的．但是，我们可以尽可能多画一些，以这些直线作为切线，把它们一小段一小段地连成光滑曲线，这样就近似地画出了方程(2)的积分曲线．还可以用等倾线的方法作方向场．

［例1］　用方向场的方法画出方程

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{t}{x}$$

的积分曲线．

解　这方程在t, x平面上除坐标轴$x=0$外都有定义，如果我们允许把斜率为∞的铅垂线也当作有意义的，那末，方程在除原点而外的平面上确定了方向场．为了画出方向场，可以先找出场中具有相同方向的点，即$\frac{dx}{dt}=$常数k的点的轨迹，这种轨迹称为等倾(斜)线．这个方程的等倾线就是$-\frac{t}{x}=k$，即从原点出发的直线$x=-\frac{1}{k}t$．在其上每一点(t, x)的切线方向恰好与方向场在这点的方向垂直．取$k=0, \pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm3, \cdots$，就容易画出方向场．根据这个方向场，可以描出积分曲线就是以原点为中心的圆周(图

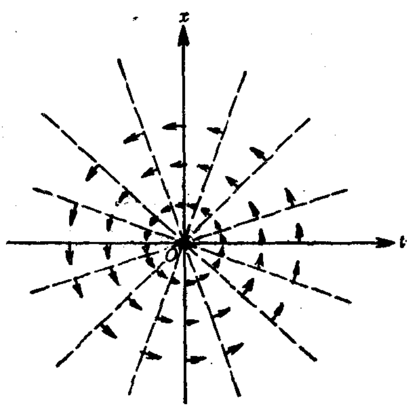

图　1.1

1.1). 这与上一段验证的结果相符.

[例 2] 试作方程

$$\frac{dx}{dt}=t^2+x^2 \tag{3}$$

基本概念

的方向场,并画出积分曲线.

解 方程右端的函数在全平面上都有定义,因此,在全平面上确定了一个方向场. 场中的等倾线是圆周 $t^2+x^2=k^2$, 在其上方向场中的方向合于以斜率为 k^2 的直线的方向, 当 k 取某些定值, 例如 $k=1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$ 时, 就可以作出方向场. 然后, 以方向场确定的方向作为切线就可以描出积分曲线的大致图形. 图 1.2 中的曲线分别代表过 $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $(1, 0)$ 的三条积分曲线.

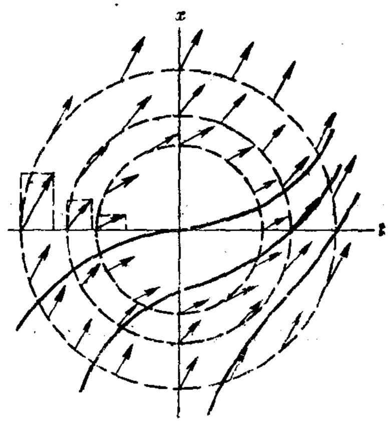

图 1.2

常用的所谓欧拉(Euler)折线, 就是根据方向场的原理, 从点 $P_0(x_0, y_0)$ 开始作以 $f(x_0, y_0)$ 为斜率的直线段, 沿着它向右稍微移动到一个新点 $P_1(t_1, x_1)$, 然后再作以 $f(t_1, x_1)$ 为斜率的直线段, 沿着它仍向右方稍微移动到第三点 $P_2(t_2, x_2)$, $\cdots$, 如此继续几次, 就在 P_0 点的右方构造成了一条"折线"(左方可完全类似地作出), 它可以近似地代表积分曲线. 如果加以光滑, 就更加接近积分曲线的形状了. 如果对函数 $f(t, x)$ 加上某些条件的限制, 当

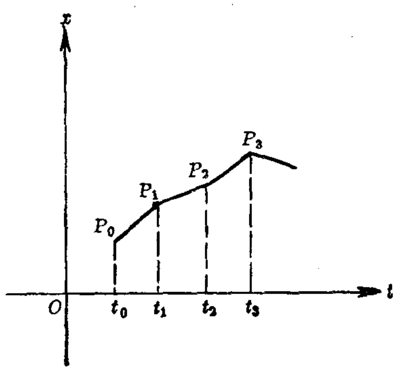

图 1.3

$t_0, t_1, t_2, \cdots$ 充分接近时，分段写出上述折线的函数表达式(直线方程)，这函数将逼近于方程(2)的解。

二、几个实例

[例 3]　放射性物质的衰变

放射性物质的原子核很不稳定，会自发地放出射线，变为另一种元素的原子核，这种现象，称为放射衰变．实验表明，原子核数目为 N 的镭，在单位时间衰变的原子核数目与 N 成正比，即

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N, \tag{4}$$

这里 $\lambda>0$ 是常数，由实验决定．设在 $t=0$ 时镭的原子核数目为 N_0，即

$$N(0)=N_0. \tag{5}$$

试问经多长时间它衰减一半，即确定它的半衰期．

容易验证 $N=N_0e^{-\lambda t}$ 是(4)的解，且满足条件(5)．现在研究怎样求方程(4)的解．移项得

$$\frac{dN}{dt}+\lambda N=0,$$

而 $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}N)\equiv e^{\lambda t}\left(\frac{dN}{dt}+\lambda N\right)$，所以

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}N)=0,$$

从而得到 $$e^{\lambda t}N=C,$$
这里 C 是任意常数. 所以
$$N=Ce^{-\lambda t}\tag{6}$$
是(4)的全部解, 我们称它为(4)的通解.

根据初始条件(5)来决定(6)中的 $C=N_0$, 所以(4)满足条件(5)的解是
$$N=N_0e^{-\lambda t},\tag{7}$$
它称为(4)的特解.

如果 T 是它的半衰期, 那末
$$N_0e^{-\lambda T}=\frac{N_0}{2},$$
所以
$$T=\frac{\ln 2}{\lambda}.\tag{8}$$

实验可以测得 $\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=0}$, 从而可以决定 λ. 由此可得镭的半衰期为 1622 年.

该例表明, 为用微分方程研究实际问题, 首先应当根据物理实验得出的规律来列写方程, 即它的数学模型. 然后求解微分方程.

从解的表达式(6)看到, 方程(4)有无穷多个解, 而具体问题往往需要求出满足特定条件的解, 例如(7)是(4)的满足条件(5)的特解. 而条件(5)称为初值条件. 寻求满足初值条件的解的问题, 称为初值问题.

[例 4] 延时器的设计原理

气动延时器是利用恒容容器中气体排放规律设计的计时装置. 设容器中充满具有一定压强的气体, 从某时刻开始经过毛细管向外排放, 当容器中气体达到一定压强 p_1 时发出讯号, 达到计时的目的. 设初始时气体压强为 p_0, 在时刻 t 时的压强为 $p(t)$, 根据实验, 它的变化速度与压差 $p(t)-q$ 成正比, 其中 q 是大气压强, 即
$$\frac{dp(t)}{dt}=-\lambda(p(t)-q),\ p(0)=p_0.\tag{9}$$

这里 $\lambda>0$ 是常数，它与毛细管的内径有关．试问：为了计测时间 T，应如何选择 λ，使得在 $t=T$ 时，压强 $p(t)$ 的变化速度为最大，这时的气体压强 p_1 称为发讯压强．

首先求解方程(9)．由于

$$\frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}[p(t)-q]\}\equiv e^{\lambda t}\left\{\frac{dp}{dt}+\lambda[p(t)-q]\right\}\equiv 0,$$

所以

$$e^{\lambda t}[p(t)-q]\equiv C(\text{任意常数}),$$

即

$$p(t)=q+Ce^{-\lambda t}.$$

再根据 $p(0)=p_0$ 得 $C=p_0-q$．所以(9)的解为

$$p(t)=q+(p_0-q)e^{-\lambda t}. \tag{10}$$

由此，可以计算在 T 时刻 $\frac{dp}{dt}$ 的值

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=T}=-\lambda(p_0-q)e^{-\lambda T}.$$

选取 λ 使得 $\lambda(p_0-q)e^{-\lambda T}$ 达到最大值，为此关于 λ 求导而得

$$(p_0-q)(1-\lambda T)e^{-\lambda T}=0,$$

因此 $\lambda T=1$ 时，p 在 $t=T$ 时的变化速度达到最大，从而压强

$$p_1=p(T)=q+(p_0-q)e^{-1}=0.632q+0.368p_0.$$

这就是说，在设计时间为 T 的发讯装置时，宜于选取毛细管，使 $\lambda=\frac{1}{T}$，从而发讯压强

$$p_1=0.632q+0.368p_0.$$

气动计时装置在由气动器件组成的控制仪表中有广泛应用．这里只是谈谈设计时的基本原理．

[例 5]　阻容电路

由电阻 R、电容 C 和电源 E 串联而成的线性电路(如图 1.4 所示)，当考虑电容两端的电势降 $x(t)$ 时，称为阻容电路．

设电路中的电流强度为 $i(t)$，根据基尔霍夫(Kirchhoff)定律，电源电势 $E(t)$ 等于电路中电势降的和，即

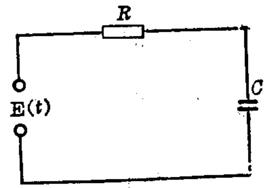

图 1.4

$$Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=E(t). \tag{11}$$

电容 C 的电势降 x 为

$$x=\frac{1}{C}\int i\,dt,$$

所以

$$i=C\frac{dx}{dt}.$$

代入(11)式得到

$$RC\frac{dx}{dt}+x=E(t). \tag{12}$$

这就是阻容电路的微分方程. $T=RC$ 称为这电路的时间常数. 现在求方程(12)满足初值条件

$$x(0)=0 \tag{13}$$

的解, 即设开始时电容两端的电势为 0.

用 $e^{t/T}$ 乘(12)的两端, 得到

$$\frac{d}{dt}\{Te^{t/T}x\}=Te^{t/T}\frac{dx}{dt}+e^{t/T}x=e^{t/T}E(t).$$

从 0 到 t 积分上式两端得到

$$Te^{t/T}x=\int_0^t e^{s/T}E(s)\,ds,$$

从而

$$x=\frac{1}{T}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-s)}E(s)\,ds \tag{14}$$

是方程(12)满足条件(13)的解.

特别, 当 $E(t)\equiv E_0$ 时, 它成为

$$x=E_0(1-e^{-t/T}). \tag{15}$$

由表达式(15)看出，当 $t\to+\infty$ 时电容两端的电势最终趋于电源的电动势 E_0，并且当 $t=T=RC$ 时，达到 E_0 的 63.2%. 从方程

$$x+T\frac{dx}{dt}=E_0$$

看出，如果 x 自 t_0 开始以恒速 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$ 增长，经时间 T 后达到最终的稳态值 E_0，这也就是我们称 $T=RC$ 为阻容电路的时间常数的理由. 当 $RC\gg1$ 时，称该电路为积分电路.

从方程(4)、(9)和(12)看出，它们都是一阶常微分方程，而且未知函数和未知函数的导数都是一次地出现，系数都是常数. 称这样的方程为一阶常系数线性微分方程，在它们的求解过程中都有乘上某个因子 $e^{\lambda t}$ 的步骤. 关于常系数线性方程的求解，我们将在第二章详细讨论. 这些不同的物理问题，归结为同一类型的微分方程，对于我们是十分重要的. 就是说，我们在研究一种物理问题后，可以用类似的方程研究另一种物理问题. 这种数学方程的一致，促使我们有必要系统地研究常微分方程问题.

[例 6] 探照灯的设计原理

探照灯是用来获得平行光线的. 假设把灯泡近似地视为点光源，我们试图获得一旋转曲面镜，使光线经反射后成为与旋转轴平行的光线.

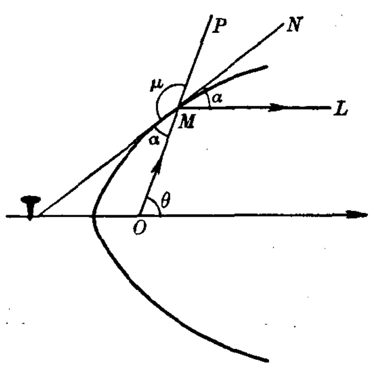

图 1.5

取点光源的位置为极点，旋转曲面的旋转轴为极轴，坐标平面与旋转曲面的交线是旋转曲面的母线，它的方程为 $r=r(\theta)$ (图 1.5).

设光线自极点 O 经镜面的一点 M 反射后沿 ML 射出，根据要求，ML 应平行于极轴. 又设曲线在 M 点的切线为 TMN. 根据几何光学原理，$\angle OMT=\angle NML=\alpha$. 又设极径 OM 与切线