周述岐

微积分思想简史

微积分思想简史

周 述 岐

中国人民大学出版社

微积分思想简史
周 述 岐

中国人民大学出版社出版发行
（北京西郊海淀路39号）
国防工业出版社印刷厂印刷
新 华 书 店 经 销

开本：850×1168毫米32开　印张：5.75
1987年8月第1版　1987年8月第1次印刷
字数：144,000　册数：1—5,000

ISBN 7-300-00061-4/O·1
书号：13011·36　定价：1.45元

序　　言

现代微积分有时作为“数学分析”的同义语。通常数学分析的概念很广，包括微积分、级数论、函数论、微分方程、积分方程、变分法和泛函分析等。这些学科又称“分析数学”，是整个数学三个基本部门之一。在古典意义下，微积分是微分学和积分学的合称，它不仅是分析学的基础部分，而且是现代数学的基础部分，同时也是马克思主义经典著作中所说的“变量数学”或“高等数学”的主要部分。

本书所说的微积分是指古典意义下的微积分。它作为一门科学，产生于17世纪后半期，基本完成于19世纪，而它的一些概念则萌芽于15世纪以前的古代。

微积分的奠基人是英国的牛顿和德国的莱布尼茨。牛顿的微积分包括“流数法”(Fluxions)和“求积法”(Method of quadatures)两种方法，分别相当于今天的微分法和积分法。在莱布尼茨的著作中使用了术语“差的计算”(calculus differentialis)和“求和计算”(calculus summatorius)。拉丁文calculus原意为石子，古代欧洲人曾经用石子作计算，后来就把“计算”叫做calculus。约翰·贝努里曾把莱布尼茨的“求和计算”改为“求整计算”(calculus integralis)，以后成为专门术语“积分学”(英文Integeral calculus)；“差的计算”后来成为专门术语“微分学”(英文Differential calculus)；二者合称“微积分”(英文简称为calculus)。由于无穷小概念是该学科的基本概念，所以早期的微积分称“无穷小分析”。在数学史上第一部以无穷小命名的微积分著作是法国洛必达的《无穷小分析》(1696)。18世纪瑞士著名

的数学家欧拉的名著叫《无穷小分析引论》，不过欧拉也使用微分学和积分学名称。

我国第一部微积分著作是清代数学家李善兰(1811—1882)和伟烈亚力合译的《代微积拾级》(1859)。这里的“代”是指代数几何(即今之解析几何)，“微”指微分学，“积”指积分学。译名“微分”和“积分”是李善兰首创的，今已定型通用。

本书初稿承蒙北京大学黄耀枢同志详细审阅，并提出了不少宝贵意见；中国人民大学朱效亮同志和辽宁师范大学杜瑞芝同志为本书提供了不少照片；中国人民大学出版社的同志为本书的出版付出了辛勤的劳动；在此一并致谢。

微积分的古典文献极为繁杂，但作者由于条件限制，知之甚少。作者不揣冒昧，仅将自己所了解的点滴材料写成这本小册子，奉献给初学微积分且对其历史有兴趣的读者。由于作者业务能力与理论水平有限，所以挂一漏万和错误之处肯定不少，期望读者与数学史专家多多赐教。

1984年12月

目　录

序　言

现代微积分有时作为“数学分析”的同义语。通常数学分析的概念很广，包括微积分、级数论、函数论、微分方程、积分方程、变分法和泛函分析等。这些学科又称“分析数学”，是整个数学三个基本部门之一。在古典意义下，微积分是微分学和积分学的合称，它不仅是分析学的基础部分，而且是现代数学的基础部分，同时也是马克思主义经典著作中所说的“变量数学”或“高等数学”的主要部分。

本书所说的微积分是指古典意义下的微积分。它作为一门科学，产生于17世纪后半期，基本完成于19世纪，而它的一些概念则萌芽于15世纪以前的古代。

微积分的奠基人是英国的牛顿和德国的莱布尼茨。牛顿的微积分包括“流数法”(Fluxions)和“求积法”(Method of quadatures)两种方法，分别相当于今天的微分法和积分法。在莱布尼茨的著作中使用了术语“差的计算”(calculus differentialis)和“求和计算”(calculus summatorius)。拉丁文calculus原意为石子，古代欧洲人曾经用石子作计算，后来就把“计算”叫做calculus。约翰·贝努里曾把莱布尼茨的“求和计算”改为“求整计算”(calculus integralis)，以后成为专门术语“积分学”(英文Integeral calculus)；“差的计算”后来成为专门术语“微分学”(英文Differential calculus)；二者合称“微积分”(英文简称为calculus)。由于无穷小概念是该学科的基本概念，所以早期的微积分称“无穷小分析”。在数学史上第一部以无穷小命名的微积分著作是法国洛必达的《无穷小分析》(1696)。18世纪瑞士著名

的数学家欧拉的名著叫《无穷小分析引论》，不过欧拉也使用微分学和积分学名称。

我国第一部微积分著作是清代数学家李善兰(1811—1882)和伟烈亚力合译的《代微积拾级》(1859)。这里的"代"是指代数几何(即今之解析几何)，"微"指微分学，"积"指积分学。译名"微分"和"积分"是李善兰首创的，今已定型通用。

本书初稿承蒙北京大学黄耀枢同志详细审阅，并提出了不少宝贵意见；中国人民大学朱效亮同志和辽宁师范大学杜瑞芝同志为本书提供了不少照片；中国人民大学出版社的同志为本书的出版付出了辛勤的劳动；在此一并致谢。

微积分的古典文献极为繁杂，但作者由于条件限制，知之甚少。作者不揣冒昧，仅将自己所了解的点滴材料写成这本小册子，奉献给初学微积分且对其历史有兴趣的读者。由于作者业务能力与理论水平有限，所以挂一漏万和错误之处肯定不少，期望读者与数学史专家多多赐教。

1984 年 12 月

第一章
微积分一些概念的萌芽
（15世纪以前）

第一节　古代中国

1. 简单几何图形面积和体积的计算

在微积分的发展历史上，对任意封闭的平面曲线围成图形面积的计算，和任意封闭的空间曲面包围立体图形体积的计算，是产生积分概念的主要途径之一。计算面积和体积可以追溯到原始农业社会。根据我国甲骨文记载，约在3000年以前的殷代，就把耕种的土地分成方形小块以求面积，今之“田”字就是从甲骨文中有关象形文字（⊕、⊞、⊞）演化而来。各种形状田地面积的算法被总结在我国古典数学名著《九章算术》一书中，对该书成书年代见解虽然不一，但都认为在1世纪以前。

《九章算术》的第一章《方田》，是专讲平面图形面积的算法的，全章列举38个典型实例，包括：“方田”（正方形或矩形）、“圭田”（等腰三角形）、“邪田”（直角梯形）、“箕田”（等腰梯形）、“圆田”（圆形）、“弧田”（弓形）、“环田”（圆环形）、“宛田”（球冠形）等面积的计算。《九章算术》的第五章《商功》，专讲各种几何立体体积的算法。全章28个问题，涉及下列图形体积的计算：“堑堵”（上下底是全等的直角三角形的正柱体）、“阳马”（底为长方形，且一棱与底垂直的锥体）、“鳖臑”（四面都是直角三角形的四面体或一般四面体）、“方锥”（正四棱锥）、“圆锥”（正圆锥）、“圆亭”（正圆台）、“方亭”（正四棱台）、“刍童”（上下底为长方形

的台体)、“刍甍”(上底为直线的刍童)以及“羡除”(三个侧面为不同的等腰梯形，其他两个侧面为三角形的楔形)等。以专章系统地研究各种图形面积和体积的算法，在世界数学史上是最早的。

顺带说一下埃及的几何学。埃及留传下来的数学文献，现存的仅有两本，其中也有简单直线形面积和体积的计算。这两部书的成书年代大约距今3800年左右，其中计算面积和体积的内容远不如《九章算术》系统、丰富。该书计算正圆形锥台体积的方法用现在的符号表示是

$$V=\frac{h}{12}\left[3\left(\frac{d+D}{2}\right)\right]^2,$$

式中V是体积，h是高，d与D分别是上下底的周长，且$\pi=3$。这是一个近似公式。该书计算正方形锥台体积的方法用现在的符号表示是

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2),$$

式中V是体积，h是高，a、b为上下底的边长。这个公式是正确的，但没有说明是怎么来的，很可能是经验公式。

积分概念就是在初等几何计算面积和体积的基础上逐渐形成的。

2.《庄子》和《墨经》中的极限思想

极限概念是微积分区别于初等数学的特有概念，没有极限概念就没有现代的微积分。

战国时代的《庄子·天下篇》中，有不少极限思想，其中最脍炙人口的一句话是：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”“棰”就是木棍，“万世”就是永远。“万世不竭”有人认为是对“取”说的，意思是“万世”所取之数不足一尺；也有人认为“万世不竭”是对取后之“余”说的，意思是永远取不完。不管作何理解，都是无穷无尽、永远达不到极限的潜无限思想。

无穷或无限概念，是极限概念的特殊情况，是微积分的重

三、二與一為三也、**白狗黑。**司馬云、狗之目眇謂之眇狗、狗之目大不曰大狗、此乃一是一非、然則白狗黑目、以可為黑狗、二**孤駒未嘗有母。一尺之棰。日取其半。萬世不竭。**孤駒未嘗有母、李云駒生有母、言

世德堂刊　莊子卷十　四十一

孤則無母、孤稱立則母名去也、母嘗為駒之母、故孤駒未嘗有母也、本亦無此句、一尺一本無一字、棰章蘂反、日取其半、萬世不竭、同馬云、棰杖也、若其可析、其一常存、故曰萬世不竭、**辯者以此與惠施相應。終身無窮。桓團公**

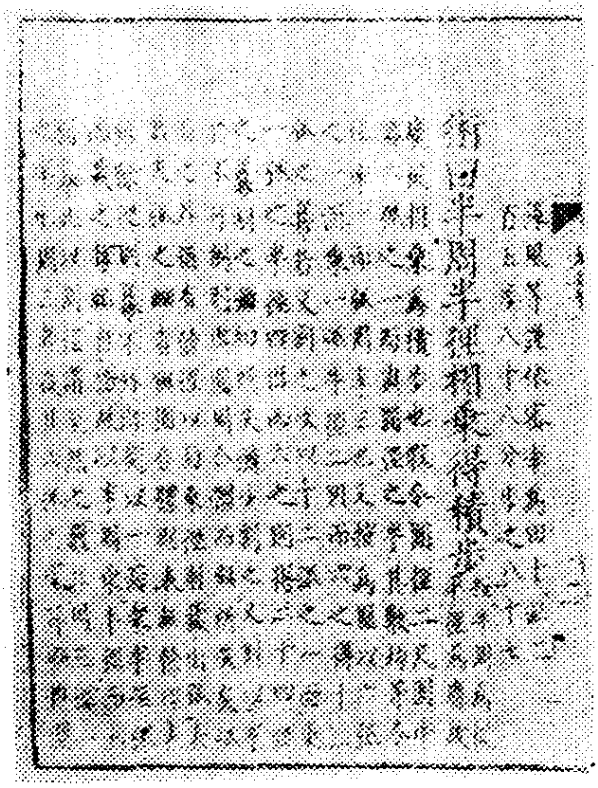
《庄子》的极限思想（采自明世德堂刻本）

要概念。《庄子·天下篇》中记有惠施（约公元前370—公元前310）的一句话："至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。"这里的"大一"和"小一"，分别相当于今天的无穷大和无穷小概念。这句话的意思是说：大到没有边界（外）时，叫做无穷大；小到没有内部时，叫做无穷小。

《墨经》也是战国时代的重要著作之一，该书对有穷与无穷作了明确的区分。该书说，"穷，或有前，不容尺也"；"穷，或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也"。根据《说文解字》的解释，"或"就是用武器（戈）保卫一个地区（一）内的人民（口），可见，"域"就是加上土字边的"或"，它同加上边界的"国"一样。"前"就是前方、前面，"有前"即有界。第一句话是说，有穷（穷）就是有边界的区域，用尺沿一个方向去量它一定能量完（不容尺）。第二句话是说，有穷就是能量尽这个区域；如果量不尽(莫不容尺)就是无穷。

《墨经》也有丰富的微分思想，比如："端，体之无厚而最前者也"；"端，无间也"；"非半弗斱则不动，说在端"。这里的"体"就是形体、图形，"斱"有分割的意义。第一句话就是说，"端"就是不可度量（无厚）且位于物体的最前面的东西。第二和第三句是说，如果没有空隙（无间）、也不能再进行分割（非半、弗斱）的就是端。这是对构成物质的最基本的元素相当精确的定义，端是无厚、无间、非半、弗斱的。构成物质基本元素的端就是几何图形的点。实际上就是对物体经"化整为零"后的微分概念。

我国古代的逻辑思想也是很丰富的。例如，《墨经》上说："小故，有之不必然，无之必不然。体也，若有端。大故，有之必然。若见之成见也。"这里的"小故"，就是今天数学中的必要条件，"大故"就是充分条件。这句话是说：小故是一种条件，有了它不一定得出结果，但若没有它，一定得不出结果，犹如有了点不一定构成体，而没有点则一定没有体一样。大故是一种条件，有它一定能得出结果，犹如有了看之动作就一定能看见东西。



刘徽割圆术（采自宋本《九章算术》）

刘徽造像（蒋兆和绘）

3．极限思想的运用——割圆术

我国三国时的数学家刘徽（3 世纪）在《九章算术》的注文中，第一次把《庄子》中的极限思想用于计算“圆田”和“弧田”的面积，计算“阳马”的体积以及开方运算。其中最典型的是用“割圆术”求圆的面积。

刘徽先在圆内作内接正 6 边形，该 6 边形的面积不难求出。再继续算出正 12 边形、正 24 边形……。刘徽肯定，随着边数不断加倍其面积不断增大，但永远不会大于圆面积；同时刘徽指出：“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”这同于现代微积分中的极限思想。

令 S、S_n、S_{2n} 分别表示圆、圆内接正 n 边形和圆内接正 $2n$ 边形的面积，刘徽建立了不等式

$$S_{2n} < S < 2S_{2n} - S_n.$$

设圆的半径为 1，刘徽已经求得

$$S_{96}=3.13\frac{5.84}{625}, \qquad S_{192}=3.14\frac{0.64}{625}。$$

于是得出

$$3.14\frac{0.64}{625}<\pi<3.14\frac{1.69}{625}。$$

为了计算方便，刘徽"弃其余分"（弃去分数部分）得出

$$\pi=3.14=\frac{157}{50}。$$

刘徽用 3.14 或$\frac{157}{50}$作圆周率，数学史称该数为"徽率"。

在《九章算术》圆田术的注文中还有一段话："径得一千二百五十，周得三千九百二十七，即其相与之率。……当求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之幂，而裁其微分，数亦宜然，重其验耳。"

如果这一注文是刘徽所写，则他已求得圆内接正 3072 边形之面积，证实圆周率为$\frac{3927}{1250}$，化成小数就是 3.1416。

继刘徽之后，南北朝的天文学、数学家祖冲之（429—500）很可能用刘徽所创的割圆术又把π继续算到小数点后 7 位，即

$$3.1415926<\pi<3.1415927。$$

第二节 古希腊罗马

1. 原子论者朴素的微分和积分思想

古希腊的原子论者具有朴素的微分和积分思想。该学派的创始人是留基伯，代表人物则是百科全书式的学者德谟克利特。他们认为：宇宙间的万物，从日、月、星、辰到人的灵魂都是由不同形状、不同大小的原子构成的；原子的数量和形状都是无限的；所有原子的性质是相同的；由于原子的数量、形状和排列次序的

不同而构成现实世界形形色色的万物。

由于时代和科学的进步，希腊后期的伊壁鸠鲁和卢克莱茨认为：原子的数量是无限的而形状则是有限的；原子内部仍有结构但不可分；原子不仅有体积和形状的不同，而且也有重量的不同；承认原子在互相结合时的偶然性等。这些都是对德漠克利特思想的重要发展。

原子论者把宇宙间的万物看成由不可再分的原子构成，以及原子虽然不能再分但仍有内部结构的思想，表现在数学上就是对于表示有限的长度、面积和体积的量x，进行了一次微分(dx)和二次微分(dx^2)。根据1906年在君士坦丁堡发现的阿基米德的著作(经整理而成《阿基米德方法》一书)所述，德漠克利特曾用原子论思想第一次算出圆锥和棱锥的体积分别等于和它们同底同高的圆柱和棱柱体积的三分之一。至于如何得出这样的结果，现在已无从知道，但是原子论者具有朴素的微分和积分思想则是显然的。

2. 穷竭法——极限法的早期形式

公元前5世纪是希腊奴隶主民主制的繁荣时期，社会上出现了一批教授智慧的教师即“智者”(sophist)。这是当时一批职业教育家、科学家和哲学家。智者中的许多人对于当时流行的“几何三大难题”颇感兴趣。“几何三大难题”是：三等分一角、化圆为方和立方倍积。智者安提丰在研究“化圆为方”问题时，联想到用圆的内接正方形的边数不断加倍的办法来接近圆的面积，并且提出把圆看成是正无穷多边形的思想。这可以说是西方最早的割圆术。和安提丰几乎同时，布赖森用圆的外切正多边形来接近圆的面积；他还进一步提出，圆的面积可以取作边数不断增加时它的内接和外切正多边形面积的平均值。这是西方应用极限计算圆面积的最早设想，但没有看到具体的计算。

对安提丰、布赖森的思想作出重大发展的是欧多克斯，他曾提出如下著名原理：“对于两个不相等的量，若从较大量减去大于其半的量，再从所余量中减去大于其半的量，继续重复这一步

骤，则所余之量必小于原来较小的量。”这是现代称之为“阿基米德公理”的前身。如果反复运用欧多克斯所指出的步骤，则所余的量要多小就会有多小。所以这个原理中也蕴涵有极限思想。

为了计算曲边形的面积和体积，欧多克斯曾提出了一个计算方法，这个方法在17世纪时被人称为“穷竭法”。他用这个方法证明了德漠克利特已得出的求圆锥和棱锥体积的公式。欧多克斯的方法被欧几里得记述在《几何原本》第12章中，用现代的符号表示就是：如果对于任意的正整数n，等式$\frac{a_n}{b_n}=k$（常数）成立，且当$n\to\infty$时，$a_n\to A$，$b_n\to B$，则有$\frac{A}{B}=k$。

例如，设半径为a和b的两圆面积分别为A和B，用A_n和B_n分别表示两圆内接正n边形的面积。欧几里得证明了$A-A_4<\frac{1}{2}A$，$A-A_8<\frac{1}{4}A$，$A-A_{16}<\frac{1}{8}A$。这样继续下去可知差值$A-A_n$无限地减小。“穷竭”就是指差值$A-A_n$能够任意小。也就是说，随着边数n的无限增加，多边形A_n穷竭了圆A，用刘徽的说法就是A_n与A“合体”。由于对任意的n能够证明$\frac{A_n}{B_n}=\frac{a^2}{b^2}$，于是得出$\frac{A}{B}=\frac{a^2}{b^2}$。为了证明这一结论的正确性，欧几里得使用了反证法：先设$\frac{A}{B}\neq\frac{a^2}{b^2}$，而$\frac{A}{B'}=\frac{a^2}{b^2}$，从$B'<B$和$B'>B$两种情况都证得同原设矛盾。

继欧几里得之后，阿基米德对穷竭法作出了重要贡献。他在《圆的度量》、《论圆柱和球》、《抛物线求积》、《论螺线》以及《方法》等著作中，应用了穷竭法，并引用了近似现代微积分中“大和”与“小和”概念。例如，他从圆的内接与外切正6边形算起，直到内接与外切正96边形，既证明了$\pi>3\frac{10}{71}$，又证明了$\pi<3\frac{1}{7}$，也就是