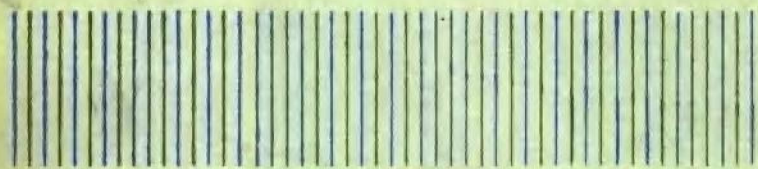


并行计算方法



(上册)

王嘉谟 沈毅 主编

国防工业出版社

并行计算方法

(上册)

王嘉谟 沈毅 主编

741/201/18

国防工业出版社

内 容 简 介

本书较深入、系统地介绍了单指令流多数据流 (SIMD) 型并行计算机特别是纵横加工向量机的并行计算方法, 对科学和工程技术领域中某些典型问题介绍了如何构造相应的并行算法, 对多处理机 (MIMD) 型并行算法也用专门章节作了简要的介绍。

全书分上、下两册。本书为上册, 共分七章, 内容包括: 并行机简介及使用, 并行计算方法的一般概念, 几个典型问题的并行算法, 线性代数、快速变换及最优化方法的并行算法。

本书可供从事并行算法研究及使用并行机工作的广大工程技术人员参考, 亦可作为大专院校计算数学专业的高年级学生、研究生的教学参考书。

并行计算方法

(上 册)

王嘉谟 沈 毅 主编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168¹/₃₂ 印张 10⁷/₈ 284千字

1987年2月第一版 1987年2月第一次印刷 印数: 0,001—2,700册

统一书号: 15034·3132 定价: 2.45元

序 言

近十几年来，计算机趋于向微型、巨型和网络化三个方向发展。巨型机方面，美、日、英、苏和我国相继研制成各种型号的亿次级并行机。到目前为止，世界上投入运行的亿次级并行机已超过 130 台。高度并行的、超高速的新一代并行机研制工作，正在世界各国蓬勃开展。科学家们预测，到1992年将出现第五代计算机——人工智能计算机。

并行机具有精度高，速度快，容量大，输入输出吞吐率高，系统软件功能强和完善等特点。我国自行研制的银河（YH）机就是这种具有超高性能的并行机之一，它专门用来计算那些在一般计算机上不能计算的大型和超大型科学计算和工程设计问题。该机自国家鉴定以来，运行情况良好，在国防和国民经济建设中已初步发挥了效益。

为了发挥现有并行机的并行处理能力和探讨新一代并行机的系统结构，需要大力开展并行处理和并行算法研究。充分发掘体系结构和计算问题本身的内在并行性，已成为当今世界上一个崭新的研究课题。由此可见，开展并行处理和并行算法研究的深远意义。

为了推动我国并行处理和并行算法研究工作的开展，推广并行机的应用，由国防科学技术大学、核工业部、航天工业部、复旦大学和国防科工委的有关单位联合成立了并行处理和并行算法丛书编辑委员会，拟组织出版一套丛书。决定由国防工业出版社出版《并行计算方法》上、下册。该套丛书将于1986年起陆续出版发行。

丛书编委会的工作受到国防科工委有关方面的高度重视，编委会的成员单位给予了大力支持和帮助，国防科学技术大学计算

机研究所对书的出版给予了赞助,因而使本书能早日与读者见面。在此,我代表丛书编委会表示衷心的感谢。同时,也欢迎国内各大专院校和研究所对我们的工作给予帮助和指导,并欢迎来稿,以扩充和丰富该丛书的内容,共同推动我国并行机事业的发展。

该书可作为大学计算数学专业和计算机专业的教材或参考书,也可作为并行机使用者的参考书。由于我们经验不足,错误和缺点在所难免,欢迎读者批评指正。

慈云桂

1985年2月4日

于长沙

前 言

并行计算方法是计算数学领域近期发展起来的一门崭新的学科。国内外的实践证明，它在提高并行处理机和向量机的效率方面起着重要的作用，随着并行处理技术的发展，它将显示出越来越强大的生命力。

计算机科学技术的发展极大地推动着科学和社会的发展，现代科学技术的发展，又提出了许多大型和超大型的计算课题，这些课题要求提供更高速度、更大容量的计算机系统予以处理。例如，对于核技术、航空航天技术、地质资源勘探、气象预报等领域，巨型计算机已成为不可缺少的重要工具和技术开发的必要手段。七十年代以来，几种不同类型的并行计算机先后问世，它使人们看到：许多复杂过程的实时动态模拟将逐渐变成现实。从传统的诺伊曼式的串行计算机发展到并行计算机，被人们视为当代计算机科学最有意义的发展。近几年来，我国自己设计的 757 向量机及 YH 亿次机研制成功，标志着我国计算机技术发展到了新的阶段。

并行处理是信息处理的一种方式，它与串行处理不同，为了发挥并行处理机的效率，需要研究和建立与并行机相适应的并行算法。事实证明，并行算法不是也不可认为是串行算法的扩充或推广，甚至算法的性质（如稳定性、收敛性和舍入误差影响等）也与串行算法有所不同。从我国 757 向量机及 YH 亿次机的使用情况，也使我们进一步认识到研究和建立与并行机相适应的并行计算方法的迫切性和重要性。

目前，并行算法的研究工作已经引起国际科学技术界的重视，国内亦已起步，并已取得一些重要的成果和效益。但是，由于并行机的研制尚处于发展阶段，不同类型的并行机的结构有一定的差异，并行算法的效率又与并行机的结构密切相关，因此，不论

是算法还是算法的理论基础，还都处于开发阶段，但正在迅速地发展。

本书是一本综合性的并行算法著作，重点是介绍纵横加工向量机的并行计算方法，在内容上尽可能注意到系统性、全面性、实用性和理论上的严谨性，并力图反映这门学科的最新成果和发展趋势。

全书分为上下两册，本书为上册，共分七章。第一章到第三章介绍并行计算机、并行机的使用及并行算法的一般概念。由王嘉谟编写。第四章介绍几种典型问题的并行计算方法，由吴功广编写。第五章介绍线性代数的并行计算方法，由陈增荣编写。第六章介绍快速变换的并行计算方法，由宋剑、马寅国、王嘉谟编写。第七章介绍最优化问题的并行计算方法，由费景高、张绍新编写。

由于并行算法本身尚处于开发阶段，且编者水平有限，所以本书在内容上难免有错误和不当之处，欢迎读者批评指正。

本书编写过程中，得到国防科技大学慈云桂教授、陈火旺教授的直接指导和帮助，编者谨在此致以诚挚的谢意。

目 录

| | |
|----------------------------|----|
| 第一章 并行机简介 | 1 |
| 1.1 基本概念 | 1 |
| 1.1.1 单指令流-单数据流 | 2 |
| 1.1.2 串行机 | 2 |
| 1.1.3 单指令流-多数据流 | 3 |
| 1.1.4 多指令流-多数据流 | 4 |
| 1.1.5 并行机 | 5 |
| 1.2 阵列机 | 7 |
| 1.2.1 ILLIAC-IV 机 | 7 |
| 1.2.2 位阵列机 DAP | 11 |
| 1.2.3 相联阵列机 | 13 |
| 1.2.4 数列处理机 | 15 |
| 1.3 纵向加工向量机 STAR-100 | 15 |
| 1.4 纵横加工向量机 | 20 |
| 1.4.1 757 机 | 21 |
| 1.4.2 YH 机 | 23 |
| 1.5 并行机的发展 | 31 |
| 1.5.1 整机系统 | 31 |
| 1.5.2 结构的变化 | 34 |
| 1.5.3 数据流计算机 | 36 |
| 第二章 并行机的使用 | 39 |
| 2.1 数据调度问题之一——数组存储 | 39 |
| 2.1.1 等间距存储 | 40 |
| 2.1.2 非等间距存储 | 44 |
| 2.1.3 交叉问题 | 45 |
| 2.2 数据调度问题之二——数据流 | 48 |
| 2.2.1 一般概念 | 48 |
| 2.2.2 内加工计算问题 | 49 |
| 2.2.3 海存加工计算问题 | 56 |
| 2.3 指令流问题 | 57 |
| 2.4 运算流水线 | 59 |
| 2.4.1 无关化运算 | 59 |

| | |
|-------------------------------|-----------|
| 2.4.2 提高并行度 | 61 |
| 2.5 程序优化 | 64 |
| 2.6 并行机的使用效率分析 | 68 |
| 第三章 并行算法的一般概念 | 75 |
| 3.1 数值问题分类 | 75 |
| 3.1.1 串行计算问题 | 75 |
| 3.1.2 并行计算问题 | 76 |
| 3.1.3 串并行混合计算问题 | 76 |
| 3.2 算法比较 | 77 |
| 3.2.1 SIMD 型并行算法 | 78 |
| 3.2.2 MIMD 型并行算法 | 82 |
| 3.3 算法并行性度量 | 85 |
| 3.4 并行算法复杂性 | 86 |
| 3.5 并行算法的收敛性和稳定性 | 89 |
| 3.5.1 收敛速度 | 89 |
| 3.5.2 舍入误差和格式稳定性 | 90 |
| 3.6 并行算法构造中的几个问题 | 92 |
| 第四章 几个典型问题的并行计算法 | 96 |
| 4.1 矩阵乘法 | 96 |
| 4.1.1 内积算法 | 96 |
| 4.1.2 外积算法 | 97 |
| 4.1.3 斯特拉森(Strassen)算法 | 98 |
| 4.1.4 威诺格拉德(Winograd)算法 | 100 |
| 4.1.5 n 阶方阵矩阵乘法实例 | 101 |
| 4.2 递归问题 | 104 |
| 4.2.1 一般概念 | 104 |
| 4.2.2 倍增法 | 106 |
| 4.2.3 分段法 | 117 |
| 4.2.4 循环加倍法 | 120 |
| 4.2.5 一类递归函数 | 122 |
| 4.2.6 并行效率分析与比较 | 128 |
| 4.3 多项式求值的并行算法 | 136 |
| 4.3.1 霍纳(Horner)法及其推广 | 137 |
| 4.3.2 倍增法 | 139 |
| 4.3.3 分段法 | 143 |

| | | |
|--------------------|----------------------|------------|
| 4.3.4 | 分段-倍增法 | 146 |
| 4.3.5 | 直接向量法 | 147 |
| 4.3.6 | 比较与分析 | 147 |
| 4.4 | 叠加问题 | 150 |
| 4.4.1 | 循环加倍法 | 151 |
| 4.4.2 | 分段法 | 152 |
| 4.5 | 分类问题 | 154 |
| 4.6 | 求根问题的并行计算 | 158 |
| 第五章 线代数并行计算 | | 161 |
| 5.1 | 下三角方程组 | 161 |
| 5.1.1 | 向量回代法 | 162 |
| 5.1.2 | 列扫描法 | 163 |
| 5.1.3 | 块回代法 | 163 |
| 5.1.4 | 并行乘法 | 164 |
| 5.2 | 稠密方程组 | 166 |
| 5.2.1 | 主元高斯消去法 | 166 |
| 5.2.2 | 约当(Jordan)消去法 | 169 |
| 5.3 | 三对角方程组 | 170 |
| 5.3.1 | 倍增法 | 170 |
| 5.3.2 | 循环奇偶约化法 | 172 |
| 5.3.3 | 任意三对角方程组的求解 | 174 |
| 5.3.4 | 多重特解法 | 178 |
| 5.4 | 矩阵求逆 | 180 |
| 5.4.1 | 皮斯(Pease)法求逆 | 180 |
| 5.4.2 | 刘易斯(Lewis)方法 | 181 |
| 5.4.3 | 任意三对角阵的求逆 | 184 |
| 5.5 | 拟块对角阵 | 186 |
| 5.6 | 迭代法和梯度法 | 187 |
| 5.7 | 稀疏方程组 | 190 |
| 5.8 | 特征值问题的并行计算 | 192 |
| 5.8.1 | 雅可比算法 | 192 |
| 5.8.2 | 乘幂法和反幂法 | 196 |
| 5.8.3 | 豪斯赫尔德(Householder)方法 | 198 |
| 5.8.4 | QR法 | 200 |
| 5.8.5 | 海曼(Hyman)方法 | 202 |

| | |
|--|-----|
| 第六章 快速变换 | 205 |
| 6.1 快速富氏变换 | 205 |
| 6.1.1 FFT | 205 |
| 6.1.2 并行的FFT(PFFT) | 210 |
| 6.1.3 PFFT在循环卷积中的应用 | 221 |
| 6.2 数论变换 | 226 |
| 6.2.1 数论基础知识 | 226 |
| 6.2.2 数论变换 | 231 |
| 6.2.3 FNT的快速算法和并行算法 | 239 |
| 6.2.4 PFNT在循环卷积计算中的应用 | 244 |
| 6.3 快速多项式变换 | 248 |
| 6.3.1 多项式变换 | 248 |
| 6.3.2 多项式变换的快速算法(FPT) | 253 |
| 6.3.3 数字循环卷积的计算 | 254 |
| 6.3.4 多维多项式变换及多维循环卷积 | 267 |
| 6.3.5 利用FPT计算多维DFT | 269 |
| 6.3.6 小结 | 272 |
| 第七章 最优化并行算法 | 275 |
| 7.1 一维优化的并行计算 | 275 |
| 7.1.1 应用导数的一维优化算法 | 276 |
| 7.1.2 黄金分割批寻找方法 | 277 |
| 7.1.3 偶数分批法 | 284 |
| 7.1.4 并行效率 | 287 |
| 7.2 利用导数的多维优化算法的并行计算 | 290 |
| 7.3 并行变尺度最优化算法 | 296 |
| 7.4 梯度投影并行拟牛顿算法 | 298 |
| 7.5 并行约克勃生-屋克斯曼 (Jacobson-Oksman) 最优化算法 | 312 |
| 7.6 求函数总极值的组合随机并行算法 | 316 |
| 7.7 鲍威尔 (Powell) 算法和查赞-麦连科 (Chazan-Miranker) 算法 | 322 |
| 7.7.1 鲍威尔算法 | 322 |
| 7.7.2 查赞-麦连科算法 | 328 |
| 7.8 斯洛波达 (Sloboda) 算法和修梯 (Sutti) 算法 | 332 |
| 参考文献 | 335 |

第一章 并行机简介

从七十年代开始,世界上相继出现了并行计算机。并行机的体系结构,从理论上说来,其速度的提高是不受限制的,这是并行机结构的最大特点。由于这个原因,并行机一经问世,便受到人们广泛的重视,仅十几年的时间,并行机的研制、生产和使用,已经相当普遍。有人认为八十年代是并行机年代,这充分反映了人们对并行机的重视程度。

我国研制的YH(“银河”的拼音缩写)机和757机都属于并行机。并行机及其使用不同于通常的串行机。为便于读者阅读后面各章节的内容,我们首先介绍并行机的一些概念及现今一些主要并行机的类型、结构特点和运算方式,并重点介绍YH的结构和结构特点。

1.1 基本概念

人们都熟悉,在计算机上计算一个题目,首先需要将计算问题编制成程序,然后经过编译或不经过编译,得到由机器指令组成的目标程序。也就是把数学计算问题转化成由逐条机器指令构成的序列。该序列可以分成为两个子序列:

(1) 指令序列——由各条指令中操作符构成的序列。亦称指令流。

(2) 数码序列——由各条指令中操作数构成的序列。也称为数据流。

〔例1-1〕 计算

$$\frac{(a + b - c) * d}{e} \Rightarrow f \quad (1-1)$$

的计算程序是

$$a + b \Rightarrow L, L - C \Rightarrow L, L * d \Rightarrow L, L / e \Rightarrow f$$

其中，操作符构成的序列——指令流为

$$+, -, *, /, \Rightarrow \quad (1-2)$$

操作数构成的序列——数据流为

$$a, b, L; L, c, L; L, d, L; L, e, f \quad (1-3)$$

一般地，假定指令序列为

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots \quad (1-4)$$

其中 θ_i 为通常意义下的操作符。

1.1.1 单指令流-单数据流

如果指令序列 (1-4) 中的每个操作符 θ_i 仅对相应的一对操作数进行操作 (称双目操作)，或对一个操作数进行操作 (称单目操作)，并产生一个计算结果，则称这种加工方式为单指令流-单数据流加工方式。也称为横向加工方式，简记为 SISD。

1.1.2 串行机

按单指令流-单数据流方式进行计算的计算机，称为串行机 (参见图 1-1)。现今普遍使用的各类中、小型数字计算机，基本上都属于这一类型。

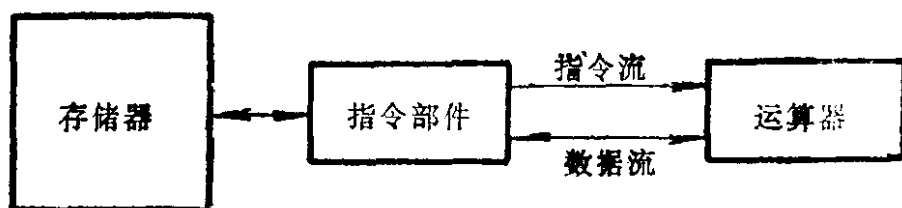


图1-1 SISD计算机结构示意图

〔例1-2〕 计算

$$\frac{(a_i + B) \times C_i}{d_i} \Rightarrow e_i \quad (1-5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

其中 B 为标量常数。图 1-2 给出了用串行机计算这个题目的程序框图。

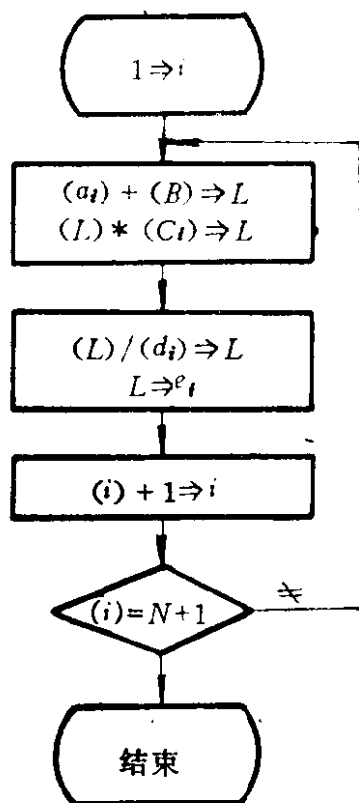


图1-2 式 (1-5) 的串行程
序框图

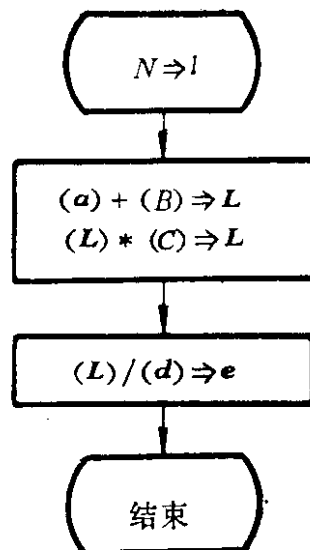


图1-3 式 (1-5) SIMD加工方
式程序框图

1.1.3 单指令流-多数据流

如果指令序列 (1-4) 中的操作符对相应的一对数组(或单个数组)进行操作, 并产生一组计算结果, 则称这种加工方式为单指令流-多数据流加工方式。亦称为纵向加工方式, 简记为 SIMD。

这里引入“横向加工方式”和“纵向加工方式”的概念是为了便于下面引入“纵横加工方式”的概念, 这样可以更形象地反映机器的加工特点。

计算式 (1-5) 单指令流-多数据流加工方式的框图如图 1-3 所示。其中

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T; \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T;$$

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)^T; \quad \mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N)^T;$$

B 为标量常数 (或称播散常数), l 用来控制数组操作的次数。

以控制器与运算器之间的关系来划分，SIMD 型计算机又包括阵列机和流水线机两种类型，它们的基本结构分别如图 1-4和图 1-5 所示。

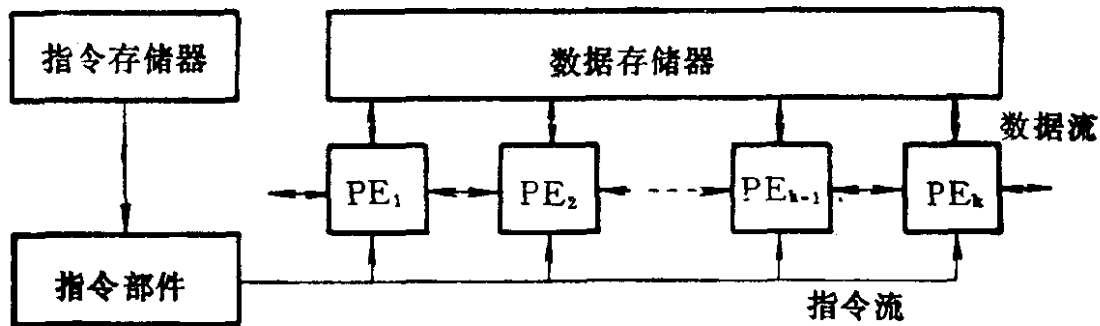


图1-4 阵列结构 SIMD 系统 PE_i 处理部件

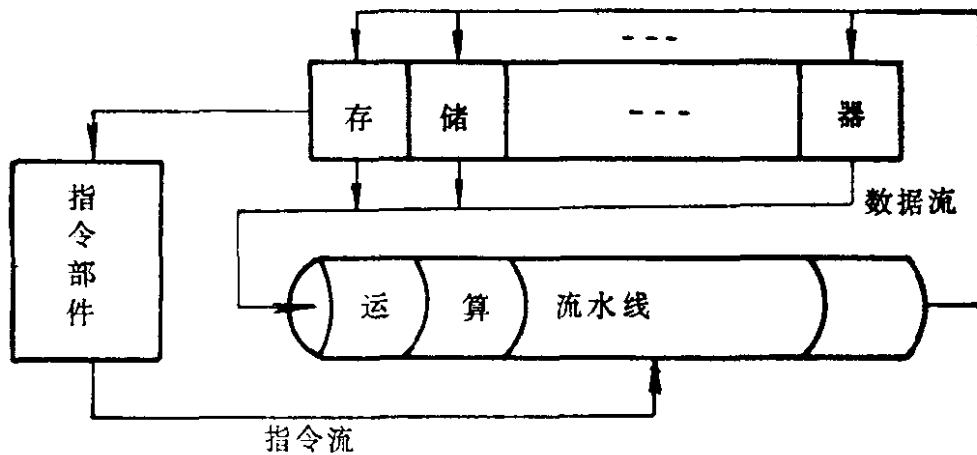


图1-5 流水线结构SIMD系统

注意，本书中的向量计算，仅定义为向量对应分量之间的计算。它不同于代数学中关于向量计算的概念。

1.1.4 多指令流-多数据流

如果指令序列有 T 个， $T \geq 2$

$$\theta_{1t}, \theta_{2t}, \dots, \theta_{it}, \dots \quad (1-6)$$

$$i = 1, 2, \dots, t = 1, 2, \dots, T$$

每个指令序列中的操作符对相应的单目或双目（或单数组，双数组）执行操作，并分别产生一个（或一组）计算结果，则这种加工方式称为多指令流-多数据流加工方式。简记为MIMD。其系统

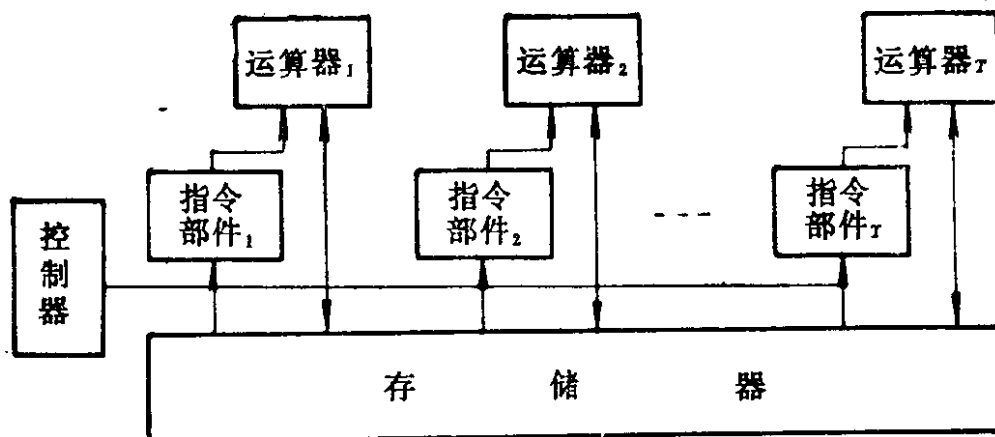


图1-6 MIMD结构示意图

基本结构如图 1-6 所示。

1.1.5 并行机

按 SIMD 或 MIMD 加工方式进行计算的计算机统称为并行机。按 MIMD 加工方式进行计算的并行机特称为多处理机。

根据数字计算机加工方式的不同，可以将其归列成如表 1-1 所示的谱系。

表1-1 数字计算机分类

| 分类 | 计算机 | 年代 | 速度 (亿次/s) | 容量 (万字(64位)) | | | |
|--------|------|--------|------------------------------|--|---------------|--------------------|----------|
| SISD | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 指令流计算机 | SIMD | 纵向流水线机 | STAR-100 ASC Cyber 203 | 1970 ~1979 | 1 | 50 | |
| | | | Cyber 205 | 1980~ 1984 | 5 | 800 | |
| | | | CDCNASF | 1985以后 | 10 | 800 | |
| | SIMD | 线机 | 纵横向流水线机 | CRAY-1 | 1970 ~1979 | 1 | 100 |
| | | | | CRAY-IM FACOM VP- HITACS-810 NECSX-2 YH 757 | 1980 ~1984 | 1~10 (757是 0.1) | 200~3200 |
| | | | | 无 | 1985以后 | | |

(续)

| 分 类 | 计 算 机 | 年 代 | 速 度 (亿次/s) | 容 量 (万字(64位)) | |
|---|-------|--|---------------|-------------------|------------|
| 指令流计算机 SIMD | 阵列处理机 | ILLIAC-IV (8 × 8) PE BSP 16PE PEPE 288PE | 1970 ~1979 | 1 | 13~100 |
| | | 无 | 1980 ~1984 | | |
| | | BNASF 512PE Phoenix 1024PE | 1985 | 10 | 800 |
| | 阵列计算机 | DAP (32 × 32~256 × 256) PE Clip (96 × 96) PE | 1970 ~1979 | < 1 | ≤ 4096位/PE |
| | | MPP (128 × 128) PE | 1980 ~1984 | 10 | 1024位/PE |
| | | 无 | 1985以后 | | |
| | 数列处理机 | FACOM 230-75 Cyber-172 IBM2938/3838 MAP II UAP | 1970以后 | | |
| | | 相联阵列机 | Staran 256PE | 1970以后 | |
| | MIMD | IBM 370/168 (2台) Univac1100/80 (4台) Cyber-170 (2台) | 1970~ 1979 | | |
| | | IBM 308X (≤ 4台) CRAYX-MP (2台) HEP-1 (< 16台) | 1980~ 1984 | 5~10 | 800 ≤ |
| HEP-2 (16台) S-1 (16台) CRAY-2 (4台) CRAY-3 (16台) ETA-10 (8台) Japan/SP US/SC | | 1985以后 | 10~100 | 10 ⁴ ≤ | |