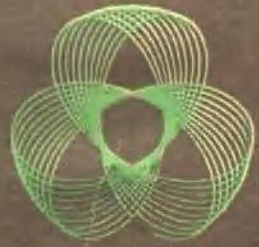
应用解析数学选讲

徐利治
朱自强　编著
丁培柱



吉林人民出版社

应用解析数学选讲

徐利治　朱自强　丁培柱　编著

吉林人民出版社

应用解析数学选讲

徐利治　朱自强　丁培柱　编著

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春市印刷厂印刷

*

850×1168毫米32开本　$7\frac{1}{4}$印张　169,000字

1983年2月第1版　1983年2月第1次印刷

印数：1—9,340册

书号：13091·115　定价：0.79元

序

1979～1980年间，我们曾采取协作方式为吉林大学理论物理方面的研究生和中青年教师们，开设了一门名叫"应用解析数学"的课程，目的无非是为物理科学领域的理论工作者介绍必备的现代分析数学工具。这本小书便是当时所用讲稿经过加工、补充、发展而成的。

本书着重讲述重要基础知识，故篇幅较小；讲述方法注重直观背景，尽力做到由浅入深；再者，为使读者易于掌握方法，书中还加入适当数量的例题。这些特点，对读者用较少的时间去掌握现代分析数学工具相信会有帮助的。

从题材内容性质看，这本书可供物理、化学方面从事理论研究工作的教师、研究生及科技人员参考，也可作为大学理工科高年级学生课外自修阅读之用。

使用数学工具的科技工作者，未必都有足够的时间精力去钻研数学定理的严谨证明。对于这样一些读者来说，我们认为本书中某些定理（例如Banach的逆算子存在定理和Hilbert的谱表现定理）的繁长论证确实是可以略去不读的。应该相信，这不会影响他们去理解和使用由定理和公式所表述的数学工具。

本书题材仅经过一次教学实践的检验，且仓促成稿，难免有考虑不周之处。谨希读者不吝指正。

作 者

1981年4月于长春

引　言

物理科学与数学之间的关系看来是很复杂的. 历史的事实告诉我们，物理科学借助于数学工具，使它不断解决一些出现的问题，并使它成为更富于理性的、科学系统性的有用知识；另一方面数学又往往从物理科学方面不断得到刺激、推动、启发而获得发展. 在许多方面，可以看到这两门科学之间的交错发展相辅相成关系. 量子力学开始就找到了Hilbert空间理论作为刻画量子体系的工具，反过来促进了算子的谱表现理论的发展. Dirac从物理的需要引进了δ函数，但数学家经过近二十年的研究，才弄清了它的数学性质. 产生了一个新的数学分支，即分布理论. 近年来发展的模糊数学，突变数学更分别是直接从讯息理论，相变的研究中发展而来的.

一般公认的意见是：数学是一门研究“量的关系和空间形式”的学科，而物理科学是以物质世界中的种种物理运动形态及其规律的研究作为其对象的. 正因为运动形态及其规律本质的探讨离不开量的变化关系和空间形式的分析，所以数学自然就成为物理科学的一个工具.

作为工具，数学的作用看来主要在于描述（刻画、表现）、分析（度量、揭示）和预见一些物理现象（运动形态）之间的本质联系和规律. 如果说实验物理主要是用物质手段来揭示物质运动的现象和规律而获得素材，那末数学就是在整理、分析、抽象、提高等方面帮助人们把这些宝贵的客观素材上升到理性的阶段，使经验规律带上“逻辑演绎的性质”，从而使人们掌握更一

般，更具有普遍性质的规律。同时也将帮助人们去预言新的物理规律和发现新的物理现象。无论从 Kepler 到 Newton，从 Faraday 到Maxwell，还是从 Rutherford 到 Bohr 理论都清楚地说明了数学作为工具对物理学所产生的深远影响。

但是作为“物理学助手”的数学工具并不是万能的。数学工具的特点是它的“逻辑精确性”和“对象的一般性”。这种特点是由它的“抽象性”决定的。也正是由于这种“抽象性”使得它带来难以克服的“局限性”。数学为了形成它“自身的体系”，不能不把数学的对象加以纯粹化和单一化，不如此就无法形成“数学概念”，无法形成“纯演绎性质”的数学理论系统。可是“纯粹化和单一化”的数学思维过程（也即哲学上所说的“扬弃过程”），恰恰是把客观存在的复杂事物对象——处于复杂的运动形态中的具有无穷多个因素的客体对象——加以简单化，分离化，概念固定化，也即僵化的过程。如此，客观上联系在一起的诸多环节被分裂开来了，其间的某些联系被扬弃了。而在思维过程中扬弃掉的每一“非主要环节”，积累起来很可能成为一定场合下的举足轻重的环节。因此，数学理论工具在这种情况下就不仅会显得软弱无力，而且还会由于对它生搬硬套而导致谬误！

综上所述，可见对物理科学工作者的最好忠告或许是：既要重视数学工具的作用，又不要过分相信数学工具的作用。数学作为工具不管发展到什么阶段，都有它的局限性或不完全性；所以物理科学工作者在运用数学工具时最好对它采取“试试看”的态度。

另一方面，数学又不能脱离它的运用而存在和发展。物理科学是数学的生命源泉中重要的一部分。相信数学和物理科学工作者的紧密联系、密切配合，肯定将不断充实“数学工具仓库”中的库藏内容，使仓库变得更为丰硕有用。

为了简化叙述，有时采用如下一些记号

逻辑关系记号

$\Longrightarrow$：隐涵（或蕴涵）

$\Longleftarrow$：被隐涵于

$\Longleftrightarrow$：互相隐涵

如以 A，B代表两个命题，则“$A\Rightarrow B$”表示由A可推出B；“$B\Leftarrow A$”表示B可由A推出；“$A\Longleftrightarrow B$”表示两者可以互推。换言之$A\Rightarrow B$表示A是B成立的充分条件，B是A成立的必要条件；$\Longleftrightarrow$表示A和B互为充要条件。

常用的两个量词

$\exists$：存在重词；$\exists$系 *Exist*一词第一个字母的反写，表示存在着，有。

$\forall$：全称量词；$\forall$系 *All* 一词第一个字母的倒写，表示对所有，对每一。

常用记号

$\{\ \}$：集合或序列

$\equiv$：定义（恒同于）

$\subset$：包含关系

$\in$：隶属关系，$a\in A$ 表示 a 属于集合 A

$\overline{\in}$（$\notin$）：$a\overline{\in}A$ 表示 a 不属于集合 A

$\perp$：正交关系（直交关系）

sup：上确界

inf：下确界

$\bigcup(\Sigma)$：并（集合论意义下的和）

$\bigcap(\Pi)$：交

$A^*(\overline{A})$：A的复数共轭

A^+：A的转置复数共轭

目　录

0 Lebesgue 积分简述

Riemann 积分对于求力矩和重心、研究变速运动和变力作功等古典物理学中的问题是一个有力的工具．但是，Riemann 积分只适用于连续函数或“间断点不太多”的函数，并且对积分与极限换序（包括积分与极限换序、积分与微分换序、积分与积分换序）这样一些基本运算需要有较严格的条件．这就限制了Riemann积分在近代物理中的运用．Lebesgue 积分理论创始于1902年，它以测度论为基础发展了 Riemann 积分理论，拓广了可积分的函数类，大大减弱了对积分与极限换序的限制条件．现在 Lebesgue积分作为更方便有力的工具广泛应用于近代物理研究中．

为了读者阅读本书方便起见，我们在一维空间 E_1 中简述点集的测度和 Lebesgue 积分理论．从 E_1 过渡到n维空间 E_n 没有本质上的困难．

0.1 集 合

我们称具有某种性质的事物的全体为一个集合，称这些事物为该集合的元素．通常用大写字母 A，B，C，…，X，Y，Z等表示集合，而用小写字母 a，b，c，…，x，y，z 等表示元素．我们用

$$A=\{x\mid\cdots\}$$

表示集合 A 是由满足条件“…”的元素x所组成．例如

$$N=\{n\mid n=1,\ 2,\ 3,\cdots\}$$

表示由正整数 1，2，3，… 组成的正整数集．又如

$$X=\{x\,|x^2-x-2=0\}$$

表示由方程 $x^2-x-2=0$ 的根所组成的集合，即 $X=\{-1.2\}$。元素个数有限的集合称为有限集合；否则称为无穷集合。上面的集合 X 为有限集，而集合 N 为无穷集。

如果 a 为集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；否则记作 $a\overline{\in}A$，读作 a 不属于 A. 如果 A 的每一元素都属于 B，则说 A 含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。此时，称 A 为 B 的子集。例如正整数集是整数集的子集，整数集又是有理数集的子集，等等。如果 $A\subset B$ 而同时 $B\subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$。若 $A\subset B$ 而 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集。例如正偶数集

$$M=\{m|\,m=2,\ 4,\ 6,\cdots\}$$

是正整数集 N 的真子集.

不包含任何元素的集合叫做空集，记作 ϕ。

由集合 A 的元素与集合 B 的元素合在一起组成的集合，叫做 A 与 B 的和集（或并集），记作 $A+B$。由集合 A 与集合 B 的公共元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cdot B$ 或 AB。例如

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\qquad B=\{2,\ 3,\ 4\},$$

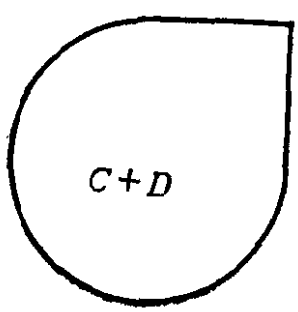
则 $$A+B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\qquad AB=\{2,\ 3\};$$

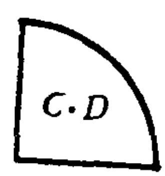
又如

$$C=\{(x,\ y)|\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$D=\{(x,\ y)\ |x^2+y^2\leqslant 1\},$$

则 $C+D$ 和 CD 如下图所示：





同样可以定义有限多个集合的和集与交集，分别记作

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \quad 与 \quad \prod_{j=1}^{n} A_j;$$

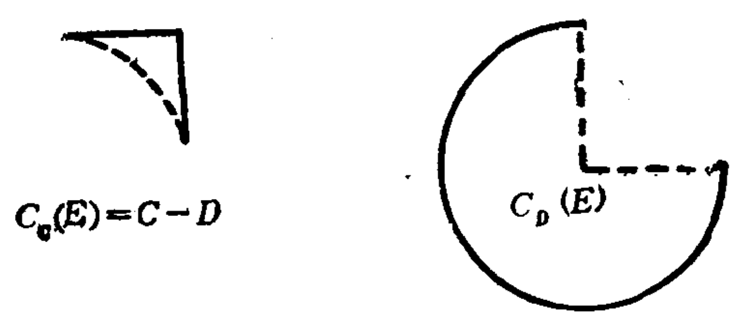
同样还可以定义无穷多个集合的和集与交集，并分别记作

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \quad 与 \quad \prod_{j=1}^{\infty} A_j.$$

集合 A 中不属于集合 B 的元素所组成的集合叫做 A 与 B 的差集，记作 $A-B$；若 $B\subset A$，则称 $A-B$ 为 B 在 A 中的余集（或补集），记作 $C_A(B)$（在不致引起混乱时也简记为 $C(B)$）。例如，集合 C 和 D 如上例所设，且

$$E=\{(x,\ y)\,|x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1\},$$

则 $C-D$ 与 $C_G(E)$ 以及 $C_D(E)$ 如下图所示。



从定义出发可以直接验证集合的和、交、差运算满足：

交换律 $A+B=B+A$，

$AB=BA$；

结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$，

$(AB)C=A(BC)$；

分配律 $(A+B)C=AC+BC$；

和交关系　设集合 A_1，A_2，…中的每一个均含于 S，则

$$S-\sum_j A_j=\prod_j (S-A_j),$$
$$S-\prod_j A_j=\sum_j (S-A_j).$$

设A和B为二集合．如果有一个规则φ，使得A中的每一个元素a对应着B中的唯一的一个元素b，则称规则φ为从A到B的一个映射（或变换）；称b为a在映射φ之下的像，而称a为b在映射φ之下的原像；集合A称为映射φ的定义集合，而所有元素$\varphi(a)$ $(a\in A)$所组成的集合称为映射φ的像集合，记作$\varphi(A)$．若φ为A到B的映射，通常记作

$$b=\varphi(a) \qquad a\in A$$

或

$$A\ni a\xrightarrow{\varphi} b\in B$$

或

$$A\xrightarrow{\varphi} B.$$

确切地说，若$\varphi(A)\subset B$但$\varphi(A)\neq B$，则称φ为A到B中的映射，或映射φ将A映入B中；若$\varphi(A)=B$，则称φ为A到B上的映射，或映射φ将A映满B．例如

$$A=\{x\mid -\infty<x<+\infty\},$$

$$B=\{y\mid -2\leqslant y\leqslant 2\},$$

$$C=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\},$$

映射为

$$y=\varphi(x)=\sin x,$$

则映射φ的定义集合为A，像集合为

$$\varphi(A)=\{y\mid -\leqslant y\leqslant 1\},$$

映射φ将A映入B中，而φ将A映满C．

从上例可见，对像集合中的一个元素，它的原像不一定只有一个．如果映射φ将A映满B而像集合B中每一个元素的原像是唯一的，则称φ为A到B的一一映射，并称A和B为一一对应的．例如正整数集N到正偶数集M的映射

$$m=\varphi(n)=2n$$

就是N到M的一一映射．又如

$$A=\left\{x \middle| -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

$$B=\{y \mid -1\leqslant y\leqslant 1\},$$

映射

$$y=\varphi(x)=\sin x$$

是A到B的一一映射．

0.2 点集的测度

凡由数轴上的点组成的集合称为点集．

用E_1表示数轴上所有点组成的点集，用R表示全体实数组成的数集．φ按下述规则将实数集R中的每一实数x映射到点集E_1中的点P：

i）数轴上的原点O到点P的距离

$$\overline{OP}=|x|;$$

ii）若$x>0$，向量$\overrightarrow{OP}$的指向与数轴的正方向一致；若$x<0$，向量$\overrightarrow{OP}$的指向与数轴的正方向相反．显然，映射φ是R到E_1的一一映射；实数集R与点集E_1是一一对应的．因此，今后对数轴上的点集和与它一一对应的实数集不加区别．

我们从集合论的观点来看看“无穷”这一熟知的概念．大家知道，自然数集合N、〔0，1〕中全体有理数组成的集合以及〔0，1〕中所有的（实）数组成的集合它们所含元素的个数均为无穷，都是无穷集合．Cantor把无穷分成两类：可数无穷与不可数无穷．一个无穷集合的元素如果能用自然数编号，或者说能与自然数集N一一对应，则称该集合的元素的个数为可数无穷，称该集合为可数的；否则，就称该集合的元素的个数为不可数无穷，称该集合为不可数的．例如，全体正偶数集合M是可数的，

这只要按如下规则用自然数编号：

$$\begin{array}{ccccccc} 2, & 4, & 6, & \cdots, & 2n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & \cdots, & n, & \cdots. \end{array}$$

又如（0，1）中全体有理数也是可数的，因为（0，1）中的有理数可表成

$$x=\frac{n}{m}\quad (m>n \text{ 为互质的自然数})$$

只要按分子加分母等于3，4，5，…排列，且将小的排在前面就可以将（0，1）中的有理数用自然数编号：

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{4}, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \cdots. \end{array}$$

容易看出，（0，1）中的任一有理数都排进去了，而且只排进去一次。

两个可数无穷集合的和集也是可数无穷集合。证明如下：设有二可数无穷集合 A 与 B，记 B 中不属于 A 的元素所组成的集合为 B_1。显然，$A+B=A+B_1$，且 B_1 为有限集或可数无穷集。因而 A 和 B_1。均可按自然数编号而表示成

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,a_n,\cdots\},$$

$$B_1=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\cdots,b_n,\cdots\}.$$

于是 $A+B$ 的元素可如下编号：

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & \cdots, & a_n, & b_n, \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & 2n-1, & 2n, \cdots. \end{array}$$

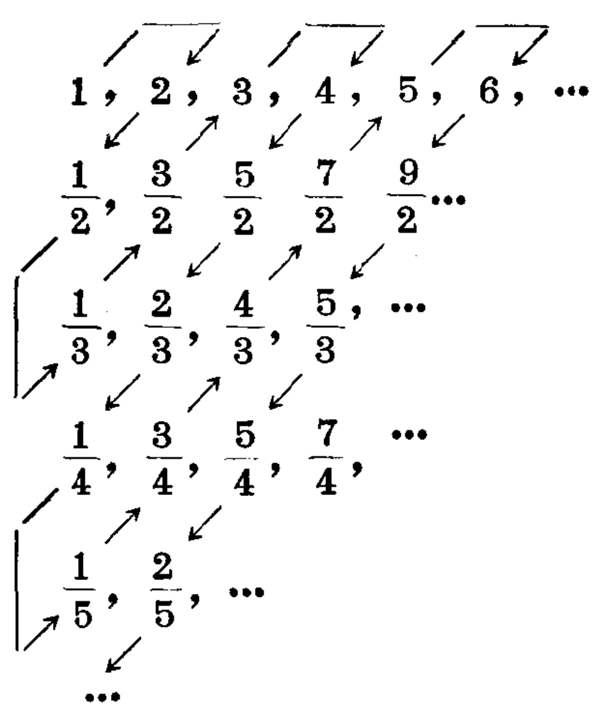
所以，和集 $A+B$ 是可数无穷集。

命题1 全体有理数是可数的.

证明 先证所有正有理数是可数的. 把所有正有理数按下表排列起来

$$
\begin{array}{llllll}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \cdots \\[6pt]
\dfrac{1}{2}, & \dfrac{3}{2}, & \dfrac{5}{2}, & \dfrac{7}{2}, & \dfrac{9}{2}, & \cdots \\[6pt]
\dfrac{1}{3}, & \dfrac{2}{3}, & \dfrac{4}{3}, & \dfrac{5}{3}, & \cdots & \\[6pt]
\dfrac{1}{4}, & \dfrac{3}{4}, & \dfrac{5}{4}, & \cdots & & \\[6pt]
\dfrac{1}{5}, & \dfrac{2}{5}, & \cdots & & & \\[6pt]
\cdots & & & & &
\end{array}
$$

然后如下图沿对角线来回编号:



这样, 每一正有理数都编在一定位置上而且不会重复. 同样, 所有负有理数也是可数的. 于是, 所有正负有理数并在一起是可数的; 再加上0还是可数的. 所以, 全体有理数是可数的.

仿照两个集合的情形可以证明，可数无穷多个可数无穷集的和集仍是可数无穷的。

如上所述，Cantor 从集合论的观点把全体有理数与全体自然数看作是"一般多"的，数学上叫做这两个集合有相同的"势"（或"基数"、"浓度"）. Cantor 还证明了下述命题.

命题 2 全体实数是不可数的。

证明 只需证明 (0, 1) 中的全体实数不可数. 采用反证法，设 (0, 1) 中的全体实数已按自然数编号排列起来

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,x_n,\cdots.$$

既然每个x_n都在0和1之间，则必可用十进制小数来表示：

$$x_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$

$$x_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$

$$x_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$$

$$\cdots\cdots.$$

这里有个唯一性问题，譬如 $0.2\dot{9}$和 0.3表示同一个数，对于这种情况，我们规定取进位的，即取 0.3，如此，表示法就是唯一的了。现在，我们构造这样一个数

$$\overline{x}=0.\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\overline{a}_{33}\cdots,$$

其中

$$\overline{a}_{11}\neq a_{11},\ \overline{a}_{22}\neq a_{22},\cdots,\ \overline{a}_{nn}\neq a_{nn},\cdots.$$

显然 $0<\overline{x}<1$，且$\overline{x}$与每一x_n的第n位小数不同，故$\overline{x}$不在x_1，x_2，…，x_n，…之中。这与原设"(0, 1)中的全体实数已按自然数编号排列成

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots"$$

相矛盾！所以，(0, 1) 中全体实数不可数。

推论 (0, 1) 中的全体无理数不可数。

无理数集与有理数集都是无穷集合. 但是，从集合论的观点